UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI
INSTYTUT MATEMATYKI

IZOMETRIE ZESPOLONE

Włodzimierz Zwonek

PRACA DOKTORSKA

KRAKÓW, 1994

Tą drogą chciałbym
przekazać serdeczne podziękowania
memu promotorowi Profesorowi Markowi Jarnickiemu
za jego nieocenione merytoryczne uwagi
dotyczące treści doktoratu
oraz za wielką pomoc w zredagowaniu całości pracy.

Osobne podziękowania, za stworzenie
wspaniałej naukowej atmosfery w czasie pobytu
autora w Vechcie
składam Profesorowi Peterowi Pflugowi.

SPIS TREŚCI

ROZDZIAŁ I

WPROWADZENIE

Rozpocznijmy od przypomnienia *odległości Poincarégo* p w kole jednostkowym $E := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| < 1\}$:

$$p(\lambda_1, \lambda_2) := \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 \overline{\lambda}_2}\right|}{1 - \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 \overline{\lambda}_2}\right|}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in E.$$

Wiadomo, że topologia zadana przez odległość p jest zwykłą topologią euklidesową, że (E, p) jest przestrzenią zupełną oraz, że z punktu widzenia geometrii (E, p) jest przestrzenią nieeuklidesową. Dla nas najważniejsze jest to, że odległość p jest „zgodna" ze strukturą odwzorowań holomorficznych $f \colon E \to E$. Prawdziwe są bowiem następujące twierdzenia.

(a) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(E, E)$ ([1]) mamy:

$$p(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) \le p(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in E \text{ }(^2).$$

W szczególności, dowolny automorfizm koła E jest *p-izometrią*.

(b) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(E, E)$, jeżeli

$$p(f(\lambda_1^0), f(\lambda_2^0)) = p(\lambda_1^0, \lambda_2^0) \text{ dla pewnych } \lambda_1^0 \ne \lambda_2^0,$$

to $f \in \operatorname{Aut}(E)$ ([3]).

(c) Dla dowolnego odwzorowania $f \colon E \to E$, jeżeli

$$p(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = p(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in E \text{ }(^4),$$

to $f \in \operatorname{Aut}(E)$ lub $\overline{f} \in \operatorname{Aut}(E)$.

Na szczególną uwagę zasługuje ostatnia własność. Oznacza ona, że z punktu widzenia teorii funkcji holomorficznych nie ma nieregularnych p-izometrii.

W tym momencie pojawia się naturalne pytanie, czy podobną odległość (lub choćby tylko pseudoodległość) d_D da się znaleźć dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ — mamy nadzieję, iż badając przestrzeń (D, d_D) uzyskamy pewne informacje o strukturze przestrzeni $\mathcal{O}(D)$ ([5]).

Definicja 1.1. Niech $\mathfrak{D}$ oznacza klasę wszystkich obszarów $D \subset \mathbb{C}^n$ przy dowolnym n. Niech $d = (d_D)_{D \in \mathfrak{D}}$ będzie rodziną funkcji $d_D \colon D \times D \longrightarrow [0, \infty)$. Rodzinę d nazywamy *holomorficznie niezmienniczą*, gdy $d_E = p$ oraz dowolne odwzorowanie $F \in \mathcal{O}(D, G)$, gdzie $D, G \in \mathcal{D}$, jest *d-kontrakcją*, czyli:

$$d_G(F(z_1), F(z_2)) \le d_D(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in D.$$

(1) Przez $\mathcal{O}(X, Y)$ oznaczamy zbiór wszystkich odwzorowań holomorficznych $f \colon X \to Y$.
(2) Tzn. $f \colon E \to E$ jest *p-kontrakcją*.
(3) Przez $\operatorname{Aut}(X)$ oznaczamy grupę wszystkich automorfizmów holomorficznych $f \colon X \to X$.
(4) Tzn. $f \colon E \to E$ jest p-izometrią.
(5) $\mathcal{O}(X) := \mathcal{O}(X, \mathbb{C})$.

Powiemy, że odwzorowanie $F\colon D \to G$ jest *d-izometrią* ($F \in \operatorname{Isom}_d(D,G)$) jeżeli

$$d_G(F(z_1), F(z_2)) = d_D(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in D.$$

W przypadku, gdy każda z funkcji d_D jest pseudoodległością mówimy, że d jest *holomorficznie niezmienniczą rodziną pseudoodległości.*

Tak więc, jeżeli d jest holomorficznie niezmienniczą rodziną funkcji, to dowolne odwzorowanie biholomorficzne $F\colon D \to G$ jest d-izometrią. W szczególności, $\operatorname{Aut}(D) \subset \operatorname{Isom}_d(D,D)$. Jak wiadomo, istnieje wiele rodzin holomorficznie niezmienniczych. Najważniejsze z nich to:
— *pseudoodległość Carathéodory'ego* [Car]:

$$c_D(z_1, z_2) := \sup\{p(f(z_1), f(z_2))\colon f \in \mathcal{O}(D, E)\}, \quad z_1, z_2 \in D;$$

— *funkcja Lemperta*:

$$\tilde{k}_D(z_1, z_2) := \inf\{p(\lambda_1, \lambda_2)\colon \exists_{\varphi \in \mathcal{O}(E,D)}\colon \varphi(\lambda_1) = z_1,\ \varphi(\lambda_2) = z_2\}, \quad z_1, z_2 \in D;$$

— *pseudoodległość Kobayashi'ego* ([Kob], § 4.1):

$$k_D := \sup\{\rho\colon \rho \text{ jest pseudoodległością na } D,\ \rho \le \tilde{k}_D\},$$

— *zespolona funkcja Greena* [Kli]: $\hat{g}_D := p(0, g_D)$, gdzie

$$\begin{aligned} g_D(z_1, z_2) := \sup\{u(z_2)\colon & u\colon D \to [0,1) \\ & \text{jest funkcją logarytmicznie plurisubharmoniczną,} \\ & \exists_{r,M>0}\colon u(z) \le M\|z - z_1\|,\ z \in B(z_1, r)\}, \quad z_1, z_2 \in D. \end{aligned}$$

Wiadomo (np. [Jar-Pfl], § 4.1, § 4.2), że $(c_D)_{D\in\mathfrak{D}}$ i $(k_D)_{D\in\mathfrak{D}}$ są holomorficznie niezmienniczymi rodzinami pseudoodległości, zaś $(\tilde{k}_D)_{D\in\mathfrak{D}}$ i $(\hat{g}_D)_{D\in\mathfrak{D}}$ — rodzinami holomorficznie niezmienniczymi. Ponadto, dla dowolnej rodziny holomorficznie niezmienniczej d mamy: $c_D \le d_D \le \tilde{k}_D$. Trudno powiedzieć, która z rodzin holomorficznie niezmienniczych jest najbardziej użyteczna w analizie zespolonej — wszystko zależy od konkretnej sytuacji. Problem wyboru nie istnieje w przypadku obszarów biholomorficznych z obszarami wypukłymi. Prawdziwe jest bowiem wtedy następujące *Twierdzenie Lemperta.*

Twierdzenie 1.2 ([Lem1], [Lem2]). *Jeżeli $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem biholomorficznym z obszarem wypukłym, to $c_D \equiv \tilde{k}_D$. Oznacza to, że dla dowolnej rodziny holomorficznie niezmienniczej d mamy: $c_D \equiv d_D \equiv \tilde{k}_D$ dla dowolnego obszaru D biholomorficznego z obszarem wypukłym.*

W szczególności, jeżeli $D, G \in \mathfrak{D}$ są obszarami biholomorficznie równoważnymi z pewnymi obszarami wypukłymi, to można mówić o **izometriach zespolonych** $F\colon D \to G$ mając na myśli d-izometrie dla dowolnego (pewnego) d.

Rozdział II. będzie poświęcony badaniu d-izometrii dla iloczynów kartezjańskich obszarów. Ustalmy holomorficznie niezmienniczą rodzinę pseudoodległości d oraz d-izometrię

$$F = (F_1, \dots, F_n)\colon D_1 \times \dots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \dots \times G_n,$$

gdzie $D_j \subset \mathbb{C}^{\alpha_j}$ dla $j = 1, \dots, m$, $G_k \subset \mathbb{C}^{\beta_k}$ dla $k = 1, \dots, n$ oraz dodatkowo $\alpha_1 \le \dots \le \alpha_m$, $\beta_1 \le \dots \le \beta_n$ ([6]) ([7]). Interesuje nas odpowiedź na pytanie, czy odwzorowanie F ma składowe F_t takie, że $F_t(z) = \varphi_t(z_{j_t})$, $z = (z_1, \dots, z_m)$, gdzie $\varphi_t\colon D_{j_t} \to G_t$ jest pewną d-izometrią. Ponadto, będziemy zainteresowani oszacowaniem ilości takich „dobrych" składowych.

Najpierw rozważymy przypadek, gdy obszary D_j i G_k są kulami euklidesowymi. Niech

$$\mathbb{B}_k := \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k : |z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 < 1\}.$$

Przyjmijmy $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{A}$ i wprowadźmy następujące wygodne oznaczenie:

$$\alpha \preceq \beta \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} m \le n,\ \alpha_m \le \beta_n,\ \alpha_{m-1} \le \beta_{n-1}, \dots, \alpha_1 \le \beta_{n-m+1}.$$

Jeżeli $m = 1$, to zdefiniujmy:

$$\Lambda(\alpha, \beta) := \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \ge 3,\ \alpha_1 \le \beta_{n-2} \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Dla $m \ge 2$ definiujemy rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} \Lambda(\alpha, \beta) &:= \Lambda\big((\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \dots, \beta_{n-3})\big), \\ &\qquad \text{gdy } \big(n \ge m + 2,\ \alpha_m \le \beta_{n-2},\ (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \preceq (\beta_1, \dots, \beta_{n-3})\big), \\ \Lambda(\alpha, \beta) &:= \Lambda\big((\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})\big) + 1, \text{ w pozostałych przypadkach.} \end{aligned}$$

Twierdzenie 1.3 (Twierdzenie 2.1.2). *Niech*

$$F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{B}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathbb{B}_{\alpha_m} \longrightarrow \mathbb{B}_{\beta_1} \times \dots \times \mathbb{B}_{\beta_n}$$

będzie dowolną izometrią zespoloną. Wtedy $\alpha \preceq \beta$ i jeśli $s = \Lambda(\alpha, \beta) > 0$, to istnieją wskaźniki

$$1 \le j_1 < \dots < j_s \le m, \quad 1 \le k_1, \dots, k_s \le n,\ k_\mu \ne k_\nu \text{ dla } \mu \ne \nu,$$

takie, że $F_{k_t}(z) = \varphi_t(z_{j_t})$, $z = (z_1, \dots z_m)$, gdzie $\varphi_t : \mathbb{B}_{\alpha_{j_t}} \to \mathbb{B}_{\beta_{k_t}}$ jest pewną izometrią zespoloną, $t = 1, \dots, s$.

Przypomnijmy (zob. [Jar-Pfl], § 2.2; [Kucz-Ray]), że każde z odwzorowań φ_t musi być holomorficzne lub antyholomorficzne.

([6]) Te ostatnie założenia nie stanowią oczywiście ograniczenia ogólności rozważań.

([7]) Dla naszej wygody wprowadźmy ponadto oznaczenie $\mathcal{A} := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, gdzie $k \ge 1$ i $\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_k\}$.

Oszacowanie liczby składowych regularnych podane w Twierdzeniu 1.3 jest ostre (zob. Uwaga 2.1.6).

Twierdzenie 1.3 stanowi uogólnienie kilku wcześniejszych wyników:

przypadek $m = n$ był badany w [Jar-Pfl] (Proposition 2.2.8) i [Kucz-Ray] — wtedy Twierdzenie 1.3 daje: $s = m$, co zgadza się w pełni z [Jar-Pfl];

przypadek $m = 1$, $n = 2$ był badany w [Zwo1] — Twierdzenie 1.3 daje $s = 1$, co zgadza się z [Zwo1];

przypadek $m = 1$, $n = 3$, $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ to Remark 2.2.6(d) w [Jar-Pfl] — na podstawie Twierdzenia 1.3 dostajemy $s = 0$, a więc znów mamy pełną zgodność.

W dalszej części Rozdziału II. powrócimy do sytuacji ogólnej i zajmiemy się odpowiedzią na pytanie kiedy *wszystkie* składowe izometrii F są „dobre".

Definicja 1.4. Mówimy, że d ma *własność produktową*, jeśli dla dowolnych $D, G \in \mathfrak{D}$ zachodzi wzór

$$d_{D\times G}((z_1, w_1), (z_2, w_2)) = \max\{d_D(z_1, z_2), d_G(w_1, w_2)\}, \quad z_1, z_2 \in D,\ w_1, w_2 \in G.$$

Odnotujmy, iż nierówność „$\geq$" zachodzi zawsze i jest prostą konsekwencją definicji rodziny holomorficznie niezmienniczej. Wiadomo (zob. [Jar-Pfl], Chapter IX), że pseudoodległości Carathéodory'ego i Kobayashi'ego oraz funkcja Lemperta mają własność produktową.

Mówimy, że para (D, d_D), gdzie $D \in \mathfrak{D}$, spełnia warunek $(*)$, jeśli

(a) d_D jest odległością,

(b) dla dowolnego $z \in D$ istnieje ciąg $(x_\nu, y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset D \times D$ taki, że

$$d_D(x_\nu, z) = d_D(y_\nu, z) = (1/2)d_D(x_\nu, y_\nu) \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
$$d_D(x_\nu, y_\nu) = d_D(x_\nu, x_{\nu-1}) + d_D(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}) + d_D(y_{\nu-1}, y_\nu), \quad \nu \in \mathbb{N},$$

(c) dla dowolnego ciągu $(x_\nu, y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset D \times D$ mającego powyższe własności istnieje ν_0 takie, że dla każdego $\nu \geq \nu_0$ odcinek $[x_\nu, y_\nu]_{d_D}$ ma dokładnie jeden środek ([8]).

Twierdzenie 1.5 (Twierdzenie 2.2.5). *Załóżmy, że d ma własność produktową oraz, że każda z par (D_j, d_{D_j}), $j = 1, \dots, m$, (G_k, d_{G_k}), $k = 1, \dots, n$, ma własność $(*)$. Przypuśćmy, że $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \beta_1 + \dots + \beta_n$. Niech*

$$F : D_1 \times \dots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \dots \times G_n$$

będzie bijektywną i ciągłą d-izometrią. Wtedy $m = n$ oraz (po ewentualnej permutacji) $F_t(z) = \varphi_t(z_t)$, $z = (z_1, \dots, z_m)$, gdzie $\varphi_t \in \operatorname{Isom}_d(D_t, G_t)$, $t = 1, \dots, m$.

Warunek $(*)$ ma charakter wybitnie „techniczny". W Rozdziale II. pokażemy, że założenia powyższego twierdzenia są spełnione w szczególności dla ściśle wypukłych obszarów ograniczonych (zob. Propozycja 2.2.3).

([8]) $[x, y]_{d_D} := \{\xi \in D \colon d_D(x, \xi) + d_D(\xi, y) = d_D(x, y)\}$. Z kolei mówimy, że $\xi \in D$ jest *środkiem odcinka* $[x, y]_{d_D}$, gdy $2d_D(x, \xi) = 2d_D(\xi, y) = d_D(x, \xi) + d_D(\xi, y) = d_D(x, y)$.

W przypadku, gdy odworowanie F jest biholomorficzne, problem „przekątniowego” rozkładu F był badany np. w [Nara] (Chapter 5) (przy założeniu, że brzegi rozpatrywanych obszarów nie zawierają nietrywialnych zbiorów analitycznych), czy też w [Cyg] (brzegi klasy $\mathcal{C}^2$).

W Rozdziale III. zajmiemy się specjalnym rodzajem d-izometrii jakim są d-geodezyjne zespolone.

Definicja 1.6. Dowolne odwzorowanie holomorficzne $\varphi : E \to D$ takie, że

$$d_D(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2)) = p(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in E,$$

nazywamy *d-geodezyjną zespoloną*. W przypadku, gdy obszar D jest biholomorficzny z obszarem wypukłym będziemy mówić po prostu o *geodezyjnych zespolonych.*

Idea geodezyjmych zespolonych pochodzi od Carathéodory'ego („metrische Ebene” w [Car]). Pomysł jest prosty: zastąpić badanie pary (D, d_D) badaniem pary (E, p) (a więc niejako powrót do źródeł). Znajomość geodezyjnych zespolonych dla jakiegoś obszaru D pozwala efektywnie badać d_D. Trzeba wyraźnie powiedzieć, że geodezyjne zespolone są znane dla bardzo niewielkiej klasy obszarów. Są to: klasyczne obszary Cartana ([Aba]) oraz *wypukłe elipsoidy zespolone* ([Pol], [Gen], [Dine-Tim], [BFKKMP], [Jar-Pfl-Zei]) postaci

$$\mathcal{E}(p) := \{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_1|^{2p_1} + \dots + |z_N|^{2p_N} < 1\},\ p = (p_1, \dots, p_N),\ p_j > 0.$$

W pierwszej części Rozdziału III. zajmiemy się znalezieniem efektywnych wzorów na geodezyjne zespolone dla *uogólnionych wypukłych pseudoelipsoid zespolonych.* Uogólnione pseudoelipsoidy zespolone „rzędu 1” to elipsoidy zespolone postaci zdefiniowanej powyżej. Uogólnione pseudoelipsoidy zespolone „rzędu 2” to obszary postaci:

$$\mathcal{E} := \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^N : \|z_1\|^{2p_1} + \dots + \|z_k\|^{2p_k} < 1\},$$
$$z_j \in \mathbb{C}^{n_j},\ N = n_1 + \dots + n_k\ (k \geq 2),\ p_j > 0,\ j = 1, \dots, k.$$

Łatwo widać, że tak, jak w przypadku elipsoid zespolonych pseudoelipsoidy uogólnione są wypukłe tylko wtedy, gdy $p_j \geq 1/2$, $j = 1, \dots, k$. Dla „rzędu 3” definiujemy (tak jak wcześniej wszystkie potęgi występujące w poniższym wzorze są dodatnie)

$$\mathcal{E} := \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^N :$$
$$(|z_{1,1}|^{2p_{1,1}} + \dots + |z_{1,m_1}|^{2p_{1,m_1}})^{p_1} + \dots + (|z_{k,1}|^{2p_{k,1}} + \dots + |z_{k,m_k}|^{2p_{k,m_k}})^{p_k} < 1\},$$
$$z_j = (z_{j,1}, \dots, z_{j,m_j}) \in \mathbb{C}^{m_j},\ N = m_1 + \dots + m_k.$$

Wreszcie ogólnie

$$\mathcal{E} := \left\{ z : \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{j_2}^{m_{j_1}} \left(\dots \left(\sum_{j_n=1}^{m_{j_1,\dots,j_{n-1}}} |z_{j_1,\dots,j_n}|^2 \right)^{p_{j_1,\dots,j_{n-1}}} \dots \right)^{p_{j_1,j_2}} \right)^{p_{j_1}} < 1 \right\},$$

$m_0, m_{j_1,\dots,j_k} \in \mathbb{N}_*$, $p_{j_1,\dots,j_k} > 0$ $(k = 1,\dots,n-1)$, $z = (z_1,\dots,z_{m_0}) \in \mathbb{C}^N$, $z_j = (z_{j,1},\dots,z_{j,m_j})$ $(j = 1,\dots,m_0)$, $z_{j_1,\dots,j_{k-1}} = (z_{j_1,\dots,j_{k-1},1},\dots,z_{j_1,\dots,j_{k-1},m_{j_1,\dots,j_{k-1}}})$ $(k = 2,\dots,n)$, $z_{j_1,\dots,j_n} \in \mathbb{C}$,

$$N = \sum_{j_1=1}^{m_0}\left(\sum_{j_2}^{m_{j_1}}\left(\dots\left(\sum_{j_{n-1}=1}^{m_{j_1,\dots,j_{n-2}}} m_{j_1,\dots,j_{n-1}}\right)\dots\right)\right).$$

Dla wygody zapisu przyjmijmy poza tym, że $p_{j_1,\dots,j_n} := 1$.

Stosując powyższe oznaczenia zdefiniujmy pewną klasę (†) odwzorowań holomorficznych $\varphi : E \to \mathbb{C}^N$.

$$\varphi_{j_1,\dots,j_n}(\lambda) :=$$
$$\left(\frac{\lambda - \alpha_{j_1,\dots,j_n}}{1-\bar{\alpha}_{j_1,\dots,j_n}\lambda}\right)^{s_{j_1,\dots,j_n}} \prod_{k=1}^{n}\left(a_{j_1,\dots,j_k}\left(\frac{1-\bar{\alpha}_{j_1,\dots,j_k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j_1,\dots,j_{k-1}}\lambda}\right)\right)^{1/p_{j_1,\dots,j_k}\cdots p_{j_1,\dots,j_n}},$$

gdzie

(a) $s_{j_1,\dots,j_n} \in \{0,1\}$,

(b) $a_{j_1,\dots,j_k} \in \mathbb{C}_*$,

(c) $\alpha_{j_1,\dots,j_k} \in \bar{E}$,

(d) $\alpha_0 \in E$,

(e) $(s_{j_1,\dots,j_n} = 0) \implies (\exists_{(j_1,\dots,j_k)} : \alpha_{j_1,\dots,j_k} \neq \alpha_0)$,

(f) $(s_{j_1,\dots,j_n} = 1) \implies (\alpha_{j_1,\dots,j_n} \in E)$,

(g) $(|\alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}}| = 1) \implies (\alpha_{j_1,\dots,j_k} = \alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}})$,

(h) $\alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}} = \displaystyle\sum_{j_k=1}^{m_{j_1,\dots,j_{k-1}}} |a_{j_1,\dots,j_k}|^2 \alpha_{j_1,\dots,j_k}$,

(i) $1 + |\alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}}|^2 = \displaystyle\sum_{j_k=1}^{m_{j_1,\dots,j_{k-1}}} |a_{j_1,\dots,j_k}|^2 (1 + |\alpha_{j_1,\dots,j_k}|^2)$.

Twierdzenie 1.7 (Twierdzenie 3.2.1). *Jeżeli uogólniona pseudoelipsoida $\mathcal{E}$ jest wypukła, to każde odwzorowanie φ postaci (†) jest geodezyjną zespoloną dla $\mathcal{E}$. Na odwrót, jeśli odwzorowanie holomorficzne $\varphi : E \to \mathcal{E}$ jest geodezyjną zespoloną taką, że $\varphi_{j_1,\dots,j_n} \not\equiv 0$ dla wszelkich możliwych $(j_1,\dots,j_n)$, to φ jest postaci (†)* ([9]).

W dalszej części Rozdziału III., korzystając z efektywnych wzorów na geodezyjne zespolone, podamy nowy elementarny dowód następującego podstawowego twierdzenia klasyfikacyjnego.

Twierdzenie 1.8 (Twierdzenie 3.3.1). *Niech $\mathcal{E}(p)$ i $\mathcal{E}(q)$ będą wypukłymi elipsoidami zespolonymi. Wtedy $\mathcal{E}(p)$ jest biholomorficznie równoważne z $\mathcal{E}(q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$ (z dokładnością do permutacji).*

([9]) Zauważmy, że warunek $\varphi_{j_1,\dots,j_n} \not\equiv 0$ nie stanowi ograniczenia na ogólną postać geodezyjnej zespolonej, gdyż geodezyjna zespolona w $\mathcal{E}$ mająca jedną składową równą tożsamościowo zeru jest, po oczywistych utożsamieniach, geodezyjną zespoloną w wypukłej pseudoelipsoidzie zespolonej niższego wymiaru.

ROZDZIAŁ II

IZOMETRIE ZESPOLONE ILOCZYNÓW KARTEZJAŃSKICH OBSZARÓW

Jak już wcześniej zapowiedzieliśmy, w tej części pracy będziemy zajmować się problemem regularności izometrii zespolonych iloczynów kartezjańskich obszarów. W części pierwszej rozpatrzymy przypadek iloczynów kartezjańskich kul euklidesowych, a w drugiej zajmiemy się pewną sytuacją ogólniejszą.

Niech $d = (d_D)_{D\in\mathfrak{D}}$ będzie holomorficznie niezmienniczą rodziną funkcji. Dla $w, z \in D$ definiujemy

$$[w, z]_{d_D} := \{\xi \in D\colon d_D(w, \xi) + d_D(\xi, z) = d_D(w, z)\}.$$

Zbiór $[w, z]_{d_D}$ nazywamy *odcinkiem względem* d_D *łączącym* w *i* z. Jeśli dla $x \in D$ zachodzi

$$2d_D(w, x) = 2d_D(x, z) = d_D(w, x) + d_D(x, z) = d_D(w, z),$$

to wówczas mówimy, że x jest *środkiem odcinka* $[w, z]_{d_D}$. Niech $\varphi : E \longrightarrow D$, gdzie $D \in \mathfrak{D}$, będzie d-geodezyjną zespoloną. Zauważmy, że punkt $\varphi(0)$ jest środkiem odcinka $[\varphi(-t), \varphi(t)]_{d_D}$ dla dowolnego $t \in [0, 1)$ ([10]). Zbiór $\varphi((-1, 1))$ nazywamy d-*geodezyjną rzeczywistą*. Na koniec wprowadźmy bardzo użyteczne oznaczenie: $d^*_D := \operatorname{tgh} d_D$.

2.1. PRZYPADEK KUL EUKLIDESOWYCH

Na wstępie przypomnimy kilka podstawowych faktów dotyczących grupy automorfizmów $\operatorname{Aut}(\mathbb{B}_k)$ i odległości Carathéodory'ego $c_{\mathbb{B}_k}$ ([11]), z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Dla $b \in \mathbb{B}_k \setminus \{0\}$ niech

$$F_b(z) := \frac{1}{\|b\|^2}\frac{\|b\|^2(z\sqrt{1-\|b\|^2} - b) + \langle z, b\rangle b(1 - \sqrt{1-\|b\|^2})}{1 - \langle z, b\rangle}, \quad z \in \mathbb{B}_k,$$

([10]) Żeby to zobaczyć przypomnijmy następującą własność odległości Poincarégo p. Dla $-1 < t_1 \le t_2 \le t_3 < 1$ zachodzi następująca zależność: $p(t_1, t_2) + p(t_2, t_3) = p(t_1, t_3)$ (zob. np. [Jar-Pfl], Chapter I). Znając już tę zależność otrzymujemy wprost z defincji d-geodezyjnej zespolonej następujący ciąg równości, kończący uzasadnienie:

$$d_D(\varphi(-t), \varphi(t)) = p(-t, t) = p(-t, 0) + p(0, t) = d_D(\varphi(-t), \varphi(0)) + d_D(\varphi(0), \varphi(t)).$$

([11]) Przypomnijmy, że dla dowolnej holomorficznie niezmienniczej rodziny d mamy: $d_{\mathbb{B}_k} = c_{\mathbb{B}_k}$.

gdzie $\langle w, z\rangle := \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{z}_j$, $z = (z_1, \dots, z_k)$, $w = (w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{C}^k$, jest klasycznym iloczynem skalarnym w $\mathbb{C}^k$. Ponadto, niech $F_0 := \mathrm{id}_{\mathbb{B}_k}$. Łatwo widać, że $F_b(b) = 0$. Można sprawdzić (zob. np. [Fra-Ves], § 6.1), że $F_b \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k)$ oraz $(F_b)^{-1} = F_{-b}$ Automorfizmy F_b generują całą grupę $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k)$ w tym sensie, że

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k) = \{U \circ F_b \colon U \in \mathfrak{U}(\mathbb{C}^k),\ b \in \mathbb{B}_k\},$$

gdzie $\mathfrak{U}(\mathbb{C}^k)$ oznacza grupę wszystkich odwzorowań *unitarnych* $U \colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ (zob. np. [Fra-Ves], § 6.1) ([12]). W szczególności, grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k)$ *działa tranzytywnie* na $\mathbb{B}_k$ ([13]).

Łatwo sprawdzić (zob. np. [Jar-Pfl], Proposition 2.2.1), że $c^*_{\mathbb{B}_k}(0, z) = \|z\|$, $z \in \mathbb{B}_k$. Stąd, wobec faktu, iż $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k) \subset \mathrm{Isom}_c(\mathbb{B}^k)$ ([14]), wynika, że

$$c^*_{\mathbb{B}_k}(w, z) = c^*_{\mathbb{B}_k}(0, F_w(z)) = \left(1 - \frac{(1 - \|w\|^2)(1 - \|z\|^2)}{|1 - \langle w, z\rangle|^2}\right)^{1/2}, \quad w, z \in \mathbb{B}_k.$$

W szczególności $c_{\mathbb{B}_k}(\bar{w}, \bar{z}) = c_{\mathbb{B}_k}(w, z)$, $z, w \in \mathbb{B}_k$, a zatem dowolne odwzorowanie antyholomorficzne $F \colon \mathbb{B}_k \to \mathbb{B}_l$ jest c-kontrakcją ([15]). Tak więc $\bar{\mathfrak{U}}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l) \subset \mathrm{Isom}_c(\mathbb{B}_k, \mathbb{B}_l)$, $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{B}_k) \subset \mathrm{Isom}_c(\mathbb{B}_k)$ ([16]). Wobec tranzytywności grupy $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_l)$, problem charakteryzacji $\mathrm{Isom}_c(\mathbb{B}_k, \mathbb{B}_l)$ sprowadza się do opisu zbioru

$$\{F \in \mathrm{Isom}_c(\mathbb{B}_k, \mathbb{B}_l) \colon F(0) = 0\}.$$

Sytuacja jest dokładnie taka sama jak w przypadku koła jednostkowego:

Twierdzenie 2.1.1 ([Jar-Pfl], Proposition 2.2.7; [Kucz-Ray]).

$$\{F \in \mathrm{Isom}_c(\mathbb{B}_k, \mathbb{B}_l) \colon F(0) = 0\} = \mathfrak{U}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l) \cup \bar{\mathfrak{U}}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l),$$
$$\mathrm{Isom}_c(\mathbb{B}_k) = \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k) \cup \overline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{B}_k).$$

Zauważmy, że dla dowolnego $b \in \partial\mathbb{B}_k$ odwzorowanie $E \ni \lambda \to \lambda b \in \mathbb{B}_k$ jest geodezyjną zespoloną. Odwzorowania tej postaci to jedyne z dokładnością do

---

([12]) Przypomnijmy, iż odwzorowanie liniowe $U \colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^l$ nazywamy unitarnym ($U \in \mathfrak{U}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$) jeżeli

$$\langle U(w), U(z)\rangle = \langle w, z\rangle \text{ dla dowolnych } w, z \in \mathbb{C}^k.$$

Każde odwzorowanie unitarne jest iniekcją (w szczególności, musi być $k \le l$). Dla $k = l$ odwzorowania unitarne tworzą grupę.

([13]) Tzn. dla dowolnych $w, z \in \mathbb{B}_k$ istnieje automorfizm $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k)$ taki, że $F(w) = z$.

([14]) $\mathrm{Isom}_d(D) := \mathrm{Isom}_d(D, D)$.

([15]) Odwzorowanie $F \colon D \to \mathbb{C}^l$ nazywamy *antyholomorficznym* jeżeli odwzorowanie $D \ni z \to \overline{F(z)}$ jest holomorficzne lub, co na jedno wychodzi, jeżeli odwzorowanie $\{\bar{z} \colon z \in D\} \ni z \to F(\bar{z})$ jest holomorficzne.

([16]) $\bar{\mathcal{F}} := \{\bar{F} \colon F \in \mathcal{F}\}$. Odwzorowania klasy $\bar{\mathfrak{U}}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$ nazywamy *antyunitarnymi*; są one scharakteryzowane przez warunek

$$\langle U(w), U(z)\rangle = \overline{\langle w, z\rangle} \text{ dla dowolnych } w, z \in \mathbb{C}^k.$$

$\mathrm{Aut}(E)$ ([17]) geodezyjne zespolone $\varphi\colon E \to \mathbb{B}_k$ takie, że $0 \in \varphi(E)$ (wystarczy zastosować Lemat Schwarza). Stąd, korzystając ponownie z tranzytywności grupy $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_k)$, łatwo wykazać, że geodezyjne zespolone $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\colon E \to \mathbb{B}_k$ można z dokładnością do permutacji zmiennych opisać wzorami:

$$\varphi_j(\lambda) = \begin{cases} a_j \frac{\lambda - \alpha_j}{1-\bar{\alpha}_0\lambda}, & j = 1, \ldots, s \\ a_j \frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda}, & j = s+1, \ldots, t \\ 0, & j = t+1, \ldots, k \end{cases},$$

gdzie
$0 \le s \le t \le k$, $t \ge 1$,
$a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
$\alpha_0, \ldots, \alpha_s \in E$, $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_t \in \bar{E}$,
$\alpha_0 = \sum_{j=1}^t |a_j|^2 \alpha_j$,
$1 + |\alpha_0|^2 = \sum_{j=1}^t |a_j|^2 (1 + |\alpha_j|^2)$,
przypadek $s = 0$, $\alpha_0 = \cdots = \alpha_t = 0$ jest wykluczony.

Dla dowolnej geodezyjnej zespolonej $\varphi\colon E \to \mathbb{B}_k$ istnieje zespolona prosta afiniczna $L \subset \mathbb{C}^k$ taka, że $\varphi(E) = L \cap \mathbb{B}_k$ (zob. [Fra-Ves], § 6.1).

Dla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_*^m$ niech $\mathbb{B}_\alpha := \mathbb{B}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{B}_{\alpha_m}$.
Zdefiniujmy

$$\mathcal{A} := \{\alpha \colon \exists_{m \in \mathbb{N}_*} \colon \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_*^m,\ \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_m\}.$$

Dla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathcal{A}$ przyjmijmy $L(\alpha) := m$.

Zasadniczym celem tego podrozdziału jest wykazanie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1.2. *Niech $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{B}_\alpha \to \mathbb{B}_\beta$ będzie dowolną izometrią zespoloną. Połóżmy $m := L(\alpha)$, $n := L(\beta)$. Wtedy $\alpha \preceq \beta$ i jeśli $s := \Lambda(\alpha, \beta) > 0$ ([18]), to istnieją wskaźniki*

$$1 \le j_1 < \cdots < j_s \le m, \quad 1 \le k_1, \ldots, k_s \le n,\ k_\mu \ne k_\nu \text{ dla } \mu \ne \nu,$$

takie, że $F_{k_t}(z) = \varphi_t(z_{j_t})$, $z = (z_1, \ldots z_m)$, gdzie $\varphi_t : \mathbb{B}_{\alpha_{j_t}} \to \mathbb{B}_{\beta_{k_t}}$ jest pewną izometrią zespoloną, $t = 1, \ldots, s$.

Zanim przejdziemy do dowodu podamy kilka elementarnych własności funkcji Λ.

([17]) Jezeli $\varphi\colon E \to D$ jest d-geodezyjną zespoloną, to dla dowolnego automorfizmu $h \in \mathrm{Aut}(E)$ odwzorowanie $\varphi \circ h\colon E \to D$ jest również d-geodezyjną zespoloną.

([18]) Relacja $\preceq$ oraz funkcja Λ zostały zdefiniowane we „Wprowadzeniu”.

Propozycja 2.1.3. *Niech* $\alpha, \beta, \beta', \beta'' \in \mathcal{A}$, $m := L(\alpha)$, $n := L(\beta)$, $n' := L(\beta')$, $n'' := L(\beta'')$. *Załóżmy, że* $\alpha \preceq \beta$. *Wówczas:*

(a) $0 \leq \Lambda(\alpha, \beta) \leq m$;

(b) *jeśli* $\alpha \preceq (\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, *wtedy* $\Lambda(\alpha, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) \leq \Lambda(\alpha, \beta) + 1$;

(c) *jeśli* $\alpha \preceq \beta' \preceq \beta''$, *wtedy* $\Lambda(\alpha, \beta') \geq \Lambda(\alpha, \beta'')$;

(d) *jeśli* $\alpha \preceq \beta'$, $\alpha \preceq \beta''$ *oraz dla* $j = 1, \ldots, m$ *zachodzi*
$\#\{k \in \{1, \ldots, n'\} \colon \alpha_j \leq \beta'_k < \alpha_{j+1}\} = \#\{k \in \{1, \ldots, n''\} \colon \alpha_j \leq \beta''_k < \alpha_{j+1}\}$,
gdzie $\alpha_{m+1} \colon = +\infty$, *wtedy* $\Lambda(\alpha, \beta') = \Lambda(\alpha, \beta'')$;

(e) *jeśli* $\beta_j < \alpha_1$, *wtedy* $\Lambda(\alpha, (\beta_{j+1}, \ldots, \beta_n)) = \Lambda(\alpha, \beta)$;

(f) *jeśli* $m \geq 2$, *to dla* $\tilde{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$, $\tilde{\beta} := (\beta_1, \ldots, \check{\beta}_{j_1}, \ldots, \check{\beta}_{j_p}, \ldots, \beta_n)$ [19] *takich, że* $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$, $\beta_{j_1} \geq \alpha_m$ *i* $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, *mamy następujące związki:*
  (i) *jeśli* $p \geq 3$, *wtedy* $\Lambda(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq \Lambda(\alpha, \beta)$,
  (ii) *jeśli* $p = 1$, *wtedy* $\Lambda(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + 1 \geq \Lambda(\alpha, \beta)$.

Dowód. Własność (a) wynika wprost z definicji Λ.

Żeby dowieść własności (b) używamy indukcji ze względu na $L(\alpha)$. I tak jeśli $L(\alpha) = 1$, wtedy (b) jest oczywiste. Przypuśćmy zatem, że (b) zachodzi dla wszelkich możliwych α i β takich, że $L(\alpha) = m - 1$, gdzie $m \geq 2$ jest pewną ustaloną liczbą. Weźmy dowolne α takie, że $L(\alpha) = m$. Zdarzyć się mogą dwa przypadki. Jeśli z definicji Λ dostaniemy

$$\Lambda(\alpha, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{n-5})),$$

to wtedy $\Lambda(\alpha, (\beta_1, \ldots, \beta_n)) = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{n-3}))$. Założenie indukcyjne zastosowane do $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-3})$ kończy dowód w tym przypadku.

Załóżmy zatem, że z defincji Λ otrzymamy

$$\Lambda(\alpha, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{n-3})) + 1. \tag{$*$}$$

Rozpatrujemy dwa podprzypadki w zależności od tego czemu jest równe $\Lambda(\alpha, \beta)$ (a dokładniej w zależności od tego według której części definicji funkcji Λ wyliczamy tę wartość). I tak, jeśli

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})) + 1,$$

to wtedy stosując założenie indukcyjne do $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ uzyskujemy żądany wynik. Załóżmy zatem, że

$$\Lambda(\alpha, (\beta_1, \ldots, \beta_n)) = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{n-3})).$$

Z ($*$) wynika, że $\Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{n-3})) = \Lambda(\alpha, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) - 1$, co kończy dowód (b).

---

[19] $\check{\beta}_j$ oznacza, że wskaźnik β_j opuszczamy.

Żeby dowieść własności (c) używamy powtórnie indukcji ze względu na $L(\alpha)$. Jeśli $L(\alpha) = 1$, wtedy (c) wynika wprost z definicji. Załóżmy zatem, że (c) zachodzi dla wszelkich możliwych α i β takich, że $L(\alpha) = m - 1$, gdzie $m \geq 2$. Weźmy α takie, że $L(\alpha) = m$. Jeśli z definicji Λ otrzymamy, że

$$\Lambda(\alpha, \beta') = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta'_1, \ldots, \beta'_{n'-3})),$$

wówczas $\Lambda(\alpha, \beta'') = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta''_1, \ldots, \beta''_{n''-3}))$. Założenie indukcyjne zastosowane do $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$ kończy dowód tego przypadku.

Załóżmy zatem, że z definicji Λ otrzymamy

$$\Lambda(\alpha, \beta') = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta'_1, \ldots, \beta'_{n'-1})) + 1. \qquad (**)$$

Rozważamy znowu (podobnie jak w dowodzie (b)) dwa podprzypadki. Jeśli z definicji Λ mamy

$$\Lambda(\alpha, \beta'') = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta''_1, \ldots, \beta''_{n''-1})) + 1,$$

to wtedy stosując założenie indukcyjne do $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$ otrzymamy żądany wynik. Przyjmijmy zatem, że z definicji Λ mamy

$$\Lambda(\alpha, \beta'') = \Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta''_1, \ldots, \beta''_{n''-3})),$$

ale jest to na mocy (b) nie większe niż $\Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta''_1, \ldots, \beta''_{n''-1})) + 1$. Założenie indukcyjne powoduje z kolei, że ostatnia liczba jest równa co najwyżej $\Lambda((\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), (\beta'_1, \ldots, \beta'_{n'-1})) + 1$, co na mocy $(**)$ równa się $\Lambda(\alpha, \beta')$. Kończy to dowód (c).

Własność (d) jest konsekwencją faktu, że wartość $\Lambda(\alpha, \beta)$ nie zmienia się, jeśli zamiast β'_k takiego, że $\alpha_j \leq \beta'_k < \alpha_{j+1}$ weźmiemy dowolne inne β''_k takie, że $\alpha_j \leq \beta''_k < \alpha_{j+1}$ (wynika to wprost z definicji funkcji Λ).

Żeby wykazać (e) zauważmy, że β_j takie, że $\beta_j < \alpha_1$ nie ma wpływu na wartość $\Lambda(\alpha, \beta)$ (widać to również wprost z definicji).

Dla dowodu (f)(i) zauważmy, że na mocy (c), (d) i definicji Λ zachodzi

$$\Lambda(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \Lambda(\tilde{\alpha}, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-p})) \geq \Lambda(\tilde{\alpha}, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-3})) = \Lambda(\alpha, \beta)$$

Żeby dowieść z kolei (f)(ii) zauważmy, że na mocy (d) zachodzi

$$\Lambda(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + 1 = \Lambda(\tilde{\alpha}, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})) + 1.$$

Rozpatrujemy znowu dwa przypadki. Jeśli z definicji Λ otrzymujemy

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \Lambda(\tilde{\alpha}, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})) + 1,$$

to nasza teza jest spełniona. Jeśli natomiast z definicji Λ otrzymujemy

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \Lambda(\tilde{\alpha}, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-3})),$$

to na mocy (b) mamy nierówność $\Lambda(\tilde{\alpha}, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-3})) \leq \Lambda(\tilde{\alpha}, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})) + 1$, która kończy dowód. □

Przykład 2.1.4. Niech $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $m := L(\alpha)$, $n := L(\beta)$. Załóżmy, że $\alpha \preceq \beta$. Zachodzą wówczas następujące związki:

(a) jeśli $L(\alpha) = 1$, wtedy
   (i) jeśli $\#\{j : \beta_j \geq \alpha_1\} \geq 3$, to $\Lambda(\alpha, \beta) = 0$,
   (ii) jeśli $\#\{j : \beta_j \geq \alpha_1\} \leq 2$, to $\Lambda(\alpha, \beta) = 1$;

(b) jeśli $n = m$ lub $n = m + 1$, wtedy $\Lambda(\alpha, \beta) = m$;

(c) jeśli $\Lambda(\alpha, \beta) = 0$, wtedy $n \geq 3m$;

(d) $\Lambda((1, 2, 3), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3)) = 2$,
$\Lambda((1, 2, 3), (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3)) = 1$,
$\Lambda((1, 2, 3), (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)) = 0$,
$\Lambda((1, 2), (1, 1, 1, 1, 2, 2)) = 1$,
$\Lambda((1, 2), (1, 1, 1, 2, 2, 2)) = 0$;

(e) jeśli $\alpha_m \leq \beta_1$, wtedy

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \geq 3m \\ m - \left[\frac{n-m}{2}\right] & \text{gdy } m \leq n \leq 3m \end{cases},$$

gdzie $[\,\cdot\,]$ oznacza część całkowitą liczby.

Poniżej pokrótce uzasadnimy wyżej podane równości.

Własności (a), (b) i (c) są natychmiastową konsekwencją definicji. W (d) stosujemy bezpośrednio definicję $\Lambda(\alpha, \beta)$. Dla przykładu sprawdzamy drugą równość.

$$\Lambda((1, 2, 3), (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3)) = \Lambda((1, 2), (1, 1, 1, 1, 1, 2)) = \\ \Lambda((1), (1, 1, 1, 1, 1)) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Dla dowodu własności (e) w przypadku $m \leq n \leq 3m$ zauważmy, że na mocy (b) i definicji Λ mamy

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \Lambda((\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}), (\beta_1, \dots, \beta_{n-3})) = \\ \Lambda((\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}), (\beta_1, \dots, \beta_{n-6})) = \dots = \\ \Lambda((\alpha_1, \dots, \alpha_{m-\left[\frac{n-m}{2}\right]}), (\beta_1, \dots, \beta_{n-3\left[\frac{n-m}{2}\right]})) = m - \left[\frac{n-m}{2}\right],$$

gdyż $m - j \leq n - 3j$ dla $j = 1, \dots, \left[\frac{n-m}{2}\right]$ i $0 \leq n - 3\left[\frac{n-m}{2}\right] - (m - \left[\frac{n-m}{2}\right]) \leq 1$.

Przykład 2.1.4(b) pokazuje, że w przypadku $m = n$ lub $m = n + 1$ ilość „dobrych” składowych dowolnej izometrii zespolonej z Twierdzenia 2.1.2 jest zawsze maksymalnie duża (to znaczy równa m).

Twierdzenie 2.1.2 stanowi jednoczesne uogólnienie kilku wcześniejszych wyników, które ujmiemy w postaci następującego „zbiorczego” twierdzenia.

Twierdzenie 2.1.5. *Niech α, $\beta \in \mathcal{A}$, $m := L(\alpha)$, $n := L(\beta)$.*
(a) ([Jar-Pfl], Proposition 2.2.8) *Jeżeli $F : \mathbb{B}_\alpha \to \mathbb{B}_\beta$ jest izometrią zespoloną, to $m \leq n$.*
(b) ([Jar-Pfl], Proposition 2.2.8) *Jeżeli $m = n$, to wówczas dowolna izometria zespolona $F : \mathbb{B}_\alpha \to \mathbb{B}_\beta$ jest postaci*

$$F(z_1, \dots, z_n) = (\varphi_1(z_{\sigma(1)}), \dots, \varphi_n(z_{\sigma(n)})),$$

gdzie $\varphi_j\colon \mathbb{B}_{\alpha_{\sigma(j)}} \to \mathbb{B}_{\beta_j}$ *jest izometrią zespoloną,* $j = 1, \dots, n$ *oraz* σ *jest pewną permutacją zbioru* $\{1, \dots, n\}$.
(c) ([Zwo1]) *Jeżeli* $m = 1$, $n = 2$, *to wtedy dla dowolnej izometrii zespolonej* $F = (F_1, F_2) : \mathbb{B}_\alpha \to \mathbb{B}_\beta$ *co najmniej jedno z odwzorowań* F_1, F_2 *jest izometrią zespoloną.*
(d) ([Jar-Pfl], Remark 2.2.6(d)) *Jeżeli* $n \geq 3$, *to istnieje izometria zespolona* $F : E \longrightarrow \mathbb{B}_\alpha$ *taka, że żadna ze składowych odwzorowania* F *nie jest różniczkowalna (w szczególności żadna ze składowych nie jest izometrią zespoloną).*

Uwaga 2.1.6. *Oszacowanie liczby składowych regularnych podane w Twierdzeniu 2.1.2 jest ostre. Ustalmy* m, n *takie, że* $m \leq n \leq 3m$ *oraz ciąg* $\beta \in \mathcal{A}$ *taki, że* $L(\beta) = n$. *Niech* $\varphi_j : E \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_{3j-2}, \beta_{3j-1}, \beta_{3j})}$ *będzie dowolną izometrią zespoloną taką jak w Twierdzeniu 2.1.5(d) dla* $j = 1, \dots, r$, *gdzie* $r = \left[\frac{n-m}{2}\right]$. *Zdefiniujmy*

$$F(z_1, \dots, z_m) := (\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_r(z_r), z_{r+1}, \dots, z_m), \quad \textit{gdy } n - m \textit{ jest parzyste,}$$

$$F(z_1, \dots, z_m) := (\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_r(z_r), z_{r+1}, \dots, z_m, \psi(z_1)), \qquad \textit{gdy } n - m \textit{ jest nieparzyste,}$$

gdzie $\psi : E \longrightarrow \mathbb{B}_{\beta_n}$ *jest dowolną c-kontrakcją, która nie jest izometrią zespoloną. Wtedy* $F : E^m = \mathbb{B}_{(1,\dots,1)} \longrightarrow \mathbb{B}_\beta$ *jest izometrią zespoloną, która ma dokładnie* $\Lambda(\alpha, \beta) = m - \left[\frac{n-m}{2}\right]$ *„dobrych" składowych (por. Przykład 2.1.4(e)).*

Przechodzimy do dowodu Twierdzenia 2.1.2. Z grubsza biorąc, idea znalezienia liczby „dobrych" składowych odwzorowania F, a więc Λ wygląda następująco:

Załóżmy, że szukana przez nas liczba jest dodatnia. Jeśli „dodamy" pewną kulę $\mathbb{B}_k$ do $\mathbb{B}_\alpha$ i co najwyżej dwie kule do $\mathbb{B}_\beta$, wtedy szukana liczba wzrośnie o jeden. Jeśli natomiast do $\mathbb{B}_\beta$ „dodamy" co najmniej trzy kule, wtedy szukana liczba nie powinna się zmienić.

Na początku udowodnimy pewną propozycję, która w istocie będzie pierwszą częścią Twierdzenia 2.1.2, a która jest uogólnieniem Twierdzenia 2.1.5(a).

Propozycja 2.1.7. *Niech* $F : \mathbb{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}_\beta$, *gdzie* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, *będzie izometrią zespoloną. Wtedy* $\alpha \preceq \beta$.

W dowodzie Propozycji 2.1.7 wykorzystamy podany poniżej Lemat 2.1.8, który pokażemy używając tej samej metody co w dowodzie Lemma 3 w [Zwo1].

Lemat 2.1.8. *Niech* $F\colon \mathbb{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}_\beta$, *gdzie* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, *będzie izometrią zespoloną,* $(m := L(\alpha), n := L(\beta))$. *Załóżmy dodatkowo, że* $\beta_k < \alpha_1$ *dla pewnego* $k \leq n$. *Wtedy*

$$F_{(k+1,\dots,n)}\colon \mathbb{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_{k+1},\dots,\beta_n)} \tag{2.1.1}$$

jest izometrią zespoloną.

Teza Lematu 2.1.8 jest dosyć naturalna. Mówi nam ona mianowicie, że te kule w przestrzeni docelowej, które mają mały wymiar (w stosunku do wymiarów kul w dziedzinie funkcji) nie wpływają w żaden sposób na fakt izometryczności odwzorowania.

Dowód Lematu 2.1.8. Przypuśćmy, że (2.1.1) nie zachodzi. Istnieją zatem punkty $a, b \in \mathbb{B}_\alpha$ takie, że (wiemy, że $F_{(k+1,\dots,n)}$ jest kontrakcją – w tym miejscu jak i wielokrotnie później korzystamy z własności produktowej c ([20])):

$$\max_{j=k+1,\dots,n} \left\{ c_{\mathbb{B}_{\beta_j}}(F_j(a), F_j(b)) \right\} < c_{\mathbb{B}_\alpha}(a, b).$$

Nierówność ta implikuje na mocy izometryczności F, że dla pewnych zbiorów otwartych $\varnothing \neq U, U' \subset \mathbb{B}_\alpha$ i dla pewnego $s \leq k$ mamy

$$c_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(F_s(x), F_s(y)) = c_{\mathbb{B}_\alpha}(x, y) \text{ dla wszelkich } (x, y) \in U \times U'.$$

Łatwo można wywnioskować z tej równości, że istnieją niepuste zbiory otwarte $V, V' \in \mathbb{B}_\alpha$ i $p \in \{1, \dots, m\}$ takie, że:

$$c_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(F_s(x), F_s(y)) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_p}}(x_p, y_p) = c_{\mathbb{B}_\alpha}(x, y) \text{ dla } (x, y) \in V \times V', \tag{2.1.2}$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m)$.

Dla uzyskania sprzeczności i w ten sposób zakończenia dowodu Lematu 2.1.8 wystarczy wykazać zatem następujący lemat.

Lemat 2.1.9. *Niech $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^m$, $k \in \mathbb{N}_*$ oraz $0 \in V$, V' będą niepustymi zbiorami otwartymi w $\mathbb{B}_\alpha$. Niech $f : \mathbb{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}_k$ będzie kontrakcją zespoloną taką, że*

$$c_{\mathbb{B}_k}(f(w), f(z)) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_1}}(w_1, z_1) = c_{\mathbb{B}_\alpha}(w, z) \text{ dla } w, z \in V \times V'.$$

Wtedy $\alpha_1 \leq k$.

W dowodzie Lematu 2.1.9 wykorzystamy z kolei następujący fakt.

Lemat 2.1.10. *Niech α, k, V, V' oraz f spełniają założenia Lematu 2.1.9. Przyjmijmy dodatkowo, że $f(0) = 0$, $V = V_1 \times \dots \times V_m$, $V' = V'_1 \times \dots \times V'_m$ oraz $f((r, 0, \dots, 0), \overset{o}{z}) = (r, 0, \dots, 0)$ dla pewnego $\overset{o}{z} = (\overset{o}{z}_2, \dots, \overset{o}{z}_m) \in V'_2 \times \dots \times V'_m$, $r > 0$, $(r, 0, \dots, 0) \in V'_1$. Wtedy*

$$f(t(z_1, \overset{o}{z})) = t f(z_1, \overset{o}{z}) \text{ dla } z_1 \in V'_1,\ t \in \mathbb{R} \text{ takiego, że } t(z_1, \overset{o}{z}) \in V.$$

Dowód Lematu 2.1.10. Z założeń lematu (dokładniej z kontraktywności f) dostajemy, że

$$\|f(z)\| = \|z_1\| \geq \|z_j\| \text{ dla } z = (z_1, \dots, z_m) \in V',\ j = 2, \dots, m\ . \tag{2.1.3}$$

([20]) Z Rozdziału I. pamiętamy, że pseudoodległość c ma własność produktową.

Zauważmy, że z (2.1.3) i kontraktywności f wynika dla $z_1 \in V_1'$ oraz $t \in \mathbb{R}$ takiego, że $t(z_1, \overset{o}{z}) \in V$ nierówność

$$\|f(t(z_1, \overset{o}{z}))\| \leq |t| \max\{\|z_1\|, \|\overset{o}{z}_j\|, \ j = 2, \ldots, m\} = |t|\|z_1\|. \tag{2.1.4}$$

Na podstawie założeń lematu zastosowanych do $t(z_1, \overset{o}{z})$ i $(z_1, \overset{o}{z})$ takich jak wyżej otrzymujemy

$$c_{\mathbb{B}_k}(f(t(z_1, \overset{o}{z})), f(z_1, \overset{o}{z})) = c_{\mathbb{B}_\alpha}(t(z_1, \overset{o}{z}), (z_1, \overset{o}{z})) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_1}}(tz_1, z_1). \tag{2.1.5}$$

Nierówności

$$\frac{1 - \|f(t(z_1, \overset{o}{z}))\|^2}{(1 + \|f(t(z_1, \overset{o}{z}))\|\|z_1\|)^2} \leq \frac{1 - \|f(t(z_1, \overset{o}{z}))\|^2}{|1 - \langle f(t(z_1, \overset{o}{z})), f(z_1, \overset{o}{z})\rangle|^2}$$
$$\leq \frac{1 - \|f(t(z_1, \overset{o}{z}))\|^2}{(1 - \|f(t(z_1, \overset{o}{z}))\|\|z_1\|)^2}$$

razem z (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) i faktem, że dla $0 < v < 1$ funkcja

$$(-\infty, v) \ni u \longrightarrow \frac{1 - u^2}{(1 - uv)^2} \in \mathbb{R}$$

jest rosnąca (por. również wzór na $c^*_{\mathbb{B}_k}$), implikują, że

$$\|f(t(z_1, \overset{o}{z}))\| = |t|\|z_1\|.$$

Zatem na mocy równości w (2.1.5) dostajemy

$$|1 - \langle f(t(z_1, \overset{o}{z})), f(z_1, \overset{o}{z})\rangle| = 1 - t\|z_1\|^2,$$

z której to równości wynika teza Lematu 2.1.10. $\square$

Dowód Lematu 2.1.9. Zmniejszając ewentualnie V i V' oraz używając automorfizmów możemy przyjąć, że V i V', f oraz pewne r i $\overset{o}{z}$ spełniają założenia Lematu 2.1.10.

Przypuśćmy, że $\alpha_1 > k$. Zdefiniujmy

$$v_1 := re_1, \ v_j := re_1 + \varepsilon e_j, \quad j = 2, \ldots, \alpha_1,$$

gdzie $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{\alpha_1}$ i $\varepsilon > 0$ jest wybrane tak, żeby $v_j \in V_1'$.

Udowodnimy indukcyjnie, że z dokładnością do odwzorowania unitarnego

$$f(v_l, \overset{o}{z}) = v_l, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.1.6}$$

Tak jak i w dowodzie Lematu 2.1.10 widzimy, że mamy następująca zależność:

$$\|f(z)\| = \|z_1\| \geq \|z_j\|,\ z = (z_1, \dots, z_m) \in V',\ (j \geq 2). \tag{2.1.7}$$

Gdy $l = 1$, wtedy (2.1.6) wynika wprost z założeń poczynionych na początku dowodu. Przyjmijmy zatem, że

$$f(v_j, \overset{o}{z}) = v_j \text{ dla } j = 1, \dots, l, \text{ gdzie } l \leq k-1.$$

Po złożeniu z pewnym odwzorowaniem unitarnym równym identyczności na $\mathbb{C}^l \times \{0\}^{k-l}$ można przyjąć, że

$$f(v_{l+1}, \overset{o}{z}) = (\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{l+1}, 0, \dots, 0), \quad \xi_{l+1} \geq 0.$$

Na mocy Lematu 2.1.10, wzoru na odległość Carathéodory'ego oraz własności (2.1.7), stosując warunek kontraktywności f do $(v_{l+1}, \overset{o}{z})$ i $t(v_j, \overset{o}{z}),\ j = 1, \dots, l$, otrzymujemy dla $t \in \mathbb{R}$, bliskiego 0.

$$|1 - \langle f(v_{l+1}, \overset{o}{z}), tf(v_j, \overset{o}{z})\rangle| \leq |1 - \langle v_{l+1}, tv_j\rangle|.$$

Tak więc:

$$\text{jeśli } j = 1, \text{ to wtedy } |1 - t\xi_1 r| \leq |1 - tr^2|, \tag{2.1.8}$$

$$\text{jeśli } j > 1, \text{ to wtedy } |1 - t(\xi_1 r + \xi_j \varepsilon)| \leq |1 - tr^2|. \tag{2.1.9}$$

Nierówność (2.1.8) powoduje, że $\xi_1 = r$, a zatem na mocy (2.1.9) mamy $\xi_j = 0,\ j = 2, \dots, l$. Z kolei z (2.1.7) i faktu, że $\xi_{l+1} \geq 0$ wynika, iż $\xi_{l+1} = \varepsilon$.

Rozważmy v_{k+1}; przyjmijmy, że $f(v_{k+1}, \overset{o}{z}) = (\xi_1, \dots, \xi_k)$. Stosując warunek kontraktywności f do $(v_{k+1}, \overset{o}{z})$ i $t(v_j, \overset{o}{z}),\ j = 1, \dots, k$, otrzymujemy jak wyżej:

$$|1 - \langle f(v_{k+1}, \overset{o}{z}), tf(v_j, \overset{o}{z})\rangle| \leq |1 - \langle v_{k+1}, tv_j\rangle|, \quad j = 1, \dots, k,$$

co implikuje, że

$$\xi_1 = r,\ \xi_j = 0 \quad \text{gdy } j = 2, \dots, k.$$

Stoi to w sprzeczności z (2.1.7). Kończy to dowód Lematu 2.1.9. □

Dowód Propozycji 2.1.7. Niech $m := L(\alpha)$, $n := L(\beta)$. Przypuśćmy, że nierówność $\alpha \preceq \beta$ nie zachodzi. Ponieważ $m \leq n$ (zob. Twierdzenie 2.1.5(a)), istnieje więc $k \in \{1, \dots, m\}$ takie, że $\alpha_k > \beta_{n-m+k}$. Oczywistym jest, że odwzorowanie

$$G(z_k, \dots, z_m) := F(0, \dots, 0, z_k, \dots, z_m)$$

jest izometrią $\mathbb{B}_{(\alpha_k, \dots, \alpha_m)}$ i $\mathbb{B}_\beta$. Na mocy Lematu 2.1.8 dostajemy, że odwzorowanie

$$G_{(n-m+k+1, \dots, n)} : \mathbb{B}_{(\alpha_k, \dots, \alpha_m)} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_{n-m+k+1}, \dots, \beta_n)}$$

jest izometrią zespoloną, co na mocy nierówności $m-k+1 > n-(n-m+k+1)+1$ przeczy Twierdzeniu 2.1.5(a). □

W dowodzie Twierdzenia 2.1.2 będziemy potrzebowali następującego lematu.

Lemat 2.1.11. *Niech $F : \mathbb{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}_\beta$ będzie kontrakcją zespoloną, gdzie $\alpha \in \mathbb{N}_*^m$, $\beta \in \mathbb{N}_*^n$. Dla pewnego k ustalmy $\overset{o}{z} = (\overset{o}{z}_{k+1}, \dots, \overset{o}{z}_m) \in \mathbb{B}_{(\alpha_{k+1},\dots,\alpha_m)}$. Połóżmy*

$$G_{\overset{o}{z}} := F_{(1,\dots,l)}(\cdot, \overset{o}{z}) : \mathbb{B}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_1,\dots,\beta_l)}$$

dla pewnego $l \leq n$. Załóżmy, że $G_{\overset{o}{z}}$ jest izometrią zespoloną (w szczególności $k \leq l$ ([21])). Wtedy dla dowolnego $z = (z_{k+1}, \dots, z_m) \in \mathbb{B}_{(\alpha_{k+1},\dots,\alpha_m)}$ odwzorowanie

$$G_z := F_{(1,\dots,l)}(\cdot, z) : \mathbb{B}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_1,\dots,\beta_l)}$$

jest izometrią zespoloną.
Jeśli dodatkowo $k = l$, wtedy $G_{\overset{o}{z}} \equiv G_z$.

Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 2.1.2 poczynimy jeszcze pewne przygotowania i wprowadzimy nowe oznaczenie. Poniżej w rozważaniach przyjmujemy, że F, α i β są takie, jak w Twierdzeniu 2.1.2.

Niech k będzie tak wybrane, że $\beta_k < \alpha_m$, $\alpha_m \leq \beta_{k+1}$ (jeśli $\beta_1 \geq \alpha_m$, wtedy przyjmujemy $k := 0$). Ustalmy $z_m \in \mathbb{B}_{\alpha_m}$. Składając F z automorfizmami postaci $\mathbb{B}_\alpha \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \longrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, U_m(\lambda_m)) \in \mathbb{B}_\alpha$ $(U_m \in \operatorname{Aut}(\mathbb{B}_{\alpha_m}))$ oraz $\mathbb{B}_\beta \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longrightarrow (U_1(\lambda_1), \dots, U_n(\lambda_n)) \in \mathbb{B}_\beta$, $(U_j \in \operatorname{Aut}(\mathbb{B}_{\beta_j}),\ j = 1, \dots, n)$ przyjmijmy chwilowo, że $z_m = 0$ i $F(0) = 0$.

Ponieważ F jest izometrią, więc również odwzorowanie

$$\varphi := F(0, \cdot) : \mathbb{B}_{\alpha_m} \longrightarrow \mathbb{B}_\beta \text{ jest izometrią,}$$

a na mocy Lematu 2.1.8 otrzymujemy izometryczność odwzorowania

$$\varphi_{(k+1,\dots,n)} : \mathbb{B}_{\alpha_m} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_{k+1},\dots,\beta_n)}.$$

Niech L będzie dowolną prostą rzeczywistą przechodzącą przez 0. Zauważmy, że dla dowolnego $w_m \in L$ istnieje $s = s(L, w_m) \in \{k+1, \dots, n\}$ takie, że

$$c_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(\varphi_s(-w_m), \varphi_s(w_m)) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_m}}(-w_m, w_m)$$

(w szczególności $\|\varphi_s(\pm w_m)\| = \|w_m\|$ i w konsekwencji $\varphi_s(-w_m) = -\varphi_s(w_m)$).

Z kolei Lemma 1 z [Zwo1] ([22]) zastosowany do φ_s oraz skończoność zbioru $\{k+1, \dots, n\}$ implikują, że możemy znaleźć $s = s(L) \in \{k+1, \dots, n\}$ takie, że

$$c_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(\varphi_s(-w_m), \varphi_s(w_m)) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_m}}(-w_m, w_m) \text{ dla dowolnego } w_m \in L,$$

co dowodzi (po powrocie do wyjściowego F i z_m), że dla każdej geodezyjnej rzeczywistej L takiej, że $z_m \in L$ istnieje $s \in \{k+1, \dots, n\}$ takie, że ([23])

$$c_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(F_s(0, w_m), F_s(0, \tilde{w}_m)) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_m}}(w_m, \tilde{w}_m) \quad \text{dla wszelkich } w_m, \tilde{w}_m \in L \text{ takich, iż } z_m \text{ jest środkiem odcinka } [w_m, \tilde{w}_m] \tag{2.1.10}$$

([21]) zob. Twierdzenie 2.1.5(a).

([22]) **Lemat ([Zwo1]).** Niech $f : \mathbb{B}_k \longrightarrow \mathbb{B}_l$ $(k \leq l)$ będzie kontrakcją taką, że $f(0) = 0$, $\|f(a)\| = \|a\|$ dla pewnego $a \in \mathbb{B}_k$. Wtedy $f(ta) = tf(a)$ dla $t \in [0, 1]$.

([23]) Poprzez *odcinek* (*środek odcinka*) rozumiemy w tym podrozdziale odcinek (środek odcinka) względem $c_{\mathbb{B}_p}$.

Zdefiniujmy

$$A(z_m) := \{s \in \{k+1,\dots,n\} : \exists\, L - \text{geodezyjna rzeczywista przechodząca przez } z_m \text{ taka, że para } (L,s) \text{ spełnia (2.1.10)}\}.$$

Na mocy poprzedniej uwagi wiemy, że $A(z_m) \neq \varnothing$.

Lemat 2.1.12. *Niech $F : \mathbb{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}_\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ będzie izometrią zespoloną. Połóżmy $m := L(\alpha)$, $n := L(\beta)$. Wtedy*

(i) *dla każdego $s \in A(z_m)$* $\quad F_s(\cdot, z_m) \equiv \text{constant}$;

(ii) $\forall_{w_m \in \mathbb{B}_{\alpha_m}}\ \exists_{s \in A(z_m)} :\ c_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(F_s(0,w_m), F_s(0,z_m)) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_m}}(w_m, z_m)$;

(iii) $F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,\check{j}_p,\dots,n)}(\cdot, z_m) : \mathbb{B}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1})} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\check{\beta}_{j_p},\dots,\beta_n)}$ *jest izometrią zespoloną dla $A(z_m) = \{j_1,\dots,j_p\}$, $k+1 \le j_1 < \dots < j_p \le n$.*

Dowód Twierdzenia 2.1.2. Używamy indukcji ze względu na m. Jeśli $m = 1$, wtedy teza twierdzenia jest konsekwencją Twierdzenia 2.1.5(c). Niech $m \geq 2$. Załóżmy, że $F : \mathbb{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}_\beta$ jest izometrią i $L(\alpha) = m$.

Zdefiniujmy

$$\mathcal{B} := \bigcup_{z_m \in \mathbb{B}_{\alpha_m}} A(z_m) = \{j_1,\dots,j_p\},$$

gdzie $k+1 \le j_1 < \dots < j_p \le n$ i k jest wybrane tak, że $\beta_k < \alpha_m \le \beta_{k+1}$ (jeśli $\alpha_m \le \beta_1$, wtedy $k := 0$).

Załóżmy przez moment, że dla wszelkich $(z', z_m) \in \mathbb{B}_\alpha$ odwzorowania

$$\varphi := F_{(j_1,\dots,j_p)}(z', \cdot) : \mathbb{B}_{\alpha_m} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_p})}, \tag{2.1.11}$$

$$\psi := F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,\check{j}_p,\dots,n)}(\cdot, z_m) : \mathbb{B}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1})} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\check{\beta}_{j_p},\dots,\beta_n)} \tag{2.1.12}$$

są izometriami zespolonymi.

Rozpatrzmy trzy przypadki.

Przypadek (I): $p = 1$.

Ustalmy $z' = 0$. Ponieważ φ jest izometrią, odwzorowanie φ nie zależy od z' (używamy Lematu 2.1.11 w przypadku $k = l = 1$), więc mamy jedną składową o własnościach jak w tezie Twierdzenia 2.1.2.

Z drugiej strony, ψ jest izometrią dla $z_m = 0 \in \mathbb{B}_{\alpha_m}$ między $\mathbb{B}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1})}$ i $\mathbb{B}_{(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\beta_n)}$, więc na mocy założenia indukcyjnego funkcja $F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,n)}(\cdot, 0)$ ma $\Lambda((\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}),(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\beta_n))$ „dobrych” składowych. Wybierając te „dobre” składowe i stosując do każdej z nich Lemat 2.1.11 (ustalamy wszystkie poza jedną zmienną w $\mathbb{B}_\alpha$, na przykład równe 0) uzyskujemy, że każda składowa zależy tylko od jednej zmiennej. Reasumując mamy co najmniej

$$\Lambda((\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}),(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\beta_n))+1$$

"dobrych" składowych, co na mocy Propozycji 2.1.3(f)(ii), jest równe co najmniej $\Lambda(\alpha,\beta)$.

Przypadek (II): $p=2$.

Ponieważ $\varphi_{(j_1,j_2)}$ jest izometrią (na przykład przy $z'=0$), na mocy Twierdzenia 2.1.5(c) otrzymujemy, że φ_{j_1} lub φ_{j_2} jest izometrią. Przyjmijmy, że φ_{j_1} jest tą dobrą składową. Ale na mocy Lematu 2.1.11 odwzorowanie F_{j_1} zależy tylko od jednej zmiennej, więc składowa o wskaźniku j_1 jest „dobra”. Ponieważ odwzorowanie ψ jest izometrią, więc odwzorowanie $F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,\check{j}_2,\dots,n)}(\cdot,0)$ jest również izometrią. Powtarzając rozumowanie z Przypadku (I) zastosowane do $F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,\check{j}_2,\dots,n)}$ zamiast $F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,n)}$ otrzymujemy

$$\Lambda((\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}),(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\check{\beta}_{j_2},\dots,\beta_n))+1$$

„dobrych” składowych, która to liczba, na mocy Propozycji 2.1.3(c), nie jest mniejsza niż $\Lambda((\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}),(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\beta_n))+1$, co na mocy Propozycji 2.1.3(f)(ii) jest równe co najmniej $\Lambda(\alpha,\beta)$.

Przypadek (III): $p\geq 3$.

Dla $z_m=0$ otrzymujemy z ψ

$$\Lambda((\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}),(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\check{\beta}_{j_p},\dots,\beta_n))$$

„dobrych” składowych, które teoretycznie mogą zależeć od z_m. Ale Lemat 2.1.11 zastosowany do $m-$tej zmiennej w $\mathbb{B}_\alpha$ i tych składowych w $\mathbb{B}_\beta$, które są "dobre", implikuje, że w rzeczywistości żadna ze składowych nie zależy od z_m. Uzyskujemy, więc nie mniej niż

$$\Lambda((\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}),(\beta_1,\dots,\check{\beta}_{j_1},\dots,\check{\beta}_{j_p},\dots,\beta_n))$$

„dobrych” składowych. Ale ta liczba jest, na mocy Propozycji 2.1.3(f)(i), nie mniejsza niż $\Lambda(\alpha,\beta)$, co kończy dowód i w tym przypadku. $\square$

Zostały, więc nam do udowodnienia tylko własności (2.1.11) i (2.1.12).

Dowód (2.1.11) *i* (2.1.12). Żeby dowieść (2.1.11) zauważmy, że przy $z'=0$ znajdujemy dla $z_m^1,z_m^2\in\mathbb{B}_{\alpha_m}$ liczbę $j_s\in A(z_m^1)$ (korzystamy z Lematu 2.1.12(ii)) taką, że

$$c_{\mathbb{B}_{\beta_{j_s}}}(\varphi_{j_s}(z_m^1),\varphi_{j_s}(z_m^2))=c_{\mathbb{B}_{\alpha_m}}(z_m^1,z_m^2),$$

co powoduje, że izometrią jest odwzorowanie $F_{(j_1,\dots,j_p)}(0,\cdot)$.

Lemat 2.1.11 implikuje, że $F_{(j_1,\dots,j_p)}(z',\cdot)$ jest izometrią dla wszelkich możliwych $z'\in\mathbb{B}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1})}$.

Żeby dowieść (2.1.12) wybierzmy dla j_1 punkt $z_m^1\in\mathbb{B}_{\alpha_m}$ i geodezyjną rzeczywistą L^1 taką , że spełniają one (2.1.10) (przy $z_m:=z_m^1, L:=L^1, s:=j_1$), dzięki Lematowi 2.1.12(iii), odwzorowanie $F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,n)}(\cdot,z_m^1)$ jest izometrią. Ale Lemat

2.1.11 powoduje, że

$$F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,n)}(\cdot, z_m) \text{ jest izometrią dla wszelkich } z_m \in \mathbb{B}_{\alpha_m}. \tag{2.1.13}$$

Wybierzmy dla j_2 punkt $z_m^2 \in \mathbb{B}_{\alpha_m}$ i geodezyjną rzeczywistą L^2 taką, że spełniają one (2.1.10) (przy $z_m := z_m^2, L := L^2, s := j_2$), na mocy Lematu 2.1.12(iii) $F_{(1,\dots,\check{j}_2,\dots,n)}(\cdot, z_m^2)$ jest izometrią, a na podstawie Lematu 2.1.12(i) funkcja $F_{j_2}(\cdot, z_m^2)$ jest stała, co w świetle (2.1.13) implikuje, że $F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,\check{j}_2,\dots,n)}(\cdot, z_m^2)$ jest izometrią.

Na mocy Lematu 2.1.11

$$F_{(1,\dots,\check{j}_1,\dots,\check{j}_2,\dots,n)}(\cdot, z_m) \text{ jest izometrią dla wszelkich } z_m \in \mathbb{B}_{\alpha_m}.$$

Powtarzając powyższą procedurę p-krotnie otrzymujemy (2.1.12). $\square$

Dowód Lematu 2.1.11. Załóżmy, bez straty ogólności, że $\overset{o}{z} = 0$. Oznaczmy $\tilde{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\tilde{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_l)$. Przypuśćmy, że G_z nie jest izometrią. Oznacza to, że dla pewnych $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}$

$$c_{\mathbb{B}_{\tilde{\beta}}}(G_z(x), G_z(y)) < c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(x, y). \tag{2.1.14}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $y = -x$ i $G_0(0) = 0$ (składając odwzorowanie G_0 z automorfizmem postaci

$$\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}} \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \to (W_1(\lambda_1), \dots, W_k(\lambda_k)) \in \mathbb{B}_{\tilde{\alpha}},$$

gdzie $W_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_{\alpha_j})$ i $W_j(y) = -W_j(x)$ oraz z automorfizmem postaci

$$\mathbb{B}_{\tilde{\beta}} \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \longrightarrow (W_1(\lambda_1), \dots, W_l(\lambda_l)) \in \mathbb{B}_{\tilde{\beta}},$$

gdzie $W_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_{\beta_j})$, $j = 1, \dots, l$, $W_j(G_{0j}(0)) = 0$).

Na mocy Lemma 1 ze [Zwo1] (zastosowanego do odwzorowań

$$E \ni \xi \longrightarrow G_{0j}\left(\xi\left(\frac{x_1}{\max\{\|x_j\|,\ j = 1, \dots, k\}}, \dots, \frac{x_k}{\max\{\|x_j\|,\ j = 1, \dots, k\}}\right)\right) \in \mathbb{B}_{\beta_j},$$

$j = 1, \dots, k$), izometryczność G i własność produktowa c implikują, że możemy znaleźć $p \in \{1, \dots, l\}$ i $r \in \{1, \dots, k\}$ takie, że

$$c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{0p}(v), G_{0p}(-v)) = c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(v, -v) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_r}}(v_r, -v_r)$$

dla dowolnego v leżącego na prostej rzeczywistej łączącej x i $-x$.

Połóżmy $v := tx$, gdzie $t > 1$ jest takie, iż

$$c^*_{\mathbb{B}_{\alpha_r}}(x_r, v_r) = c^*_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(x, v) \geq \max\{\|z_j\|,\ j = k+1, \dots, m\}.$$

Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(x, v) &= c_{\mathbb{B}_{\alpha}}((x, z_{k+1}, \dots, z_m), (v, 0, \dots, 0)) \geq \\ &\quad c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(F_p(x, z_{k+1}, \dots, z_m), F_p(v, 0, \dots, 0)) = c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{zp}(x), G_{0p}(v)), \end{aligned}$$

więc $c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(x, v) \geq c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{zp}(x), G_{0p}(v))$.

Podobnie otrzymujemy nierówność $c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(-x, -v) \geq c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{zp}(-x), G_{0p}(-v))$.

Po zsumowaniu obu nierówności z (2.1.14) (pamiętajmy, że $y = -x$) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(-v, v) = c_{\mathbb{B}_{\alpha_r}}(-v_r, v_r) = \\
&\qquad c_{\mathbb{B}_{\alpha_r}}(-v_r, -x_r) + c_{\mathbb{B}_{\alpha_r}}(-x_r, x_r) + c_{\mathbb{B}_{\alpha_r}}(x_r, v_r) = \\
&\qquad\quad c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(-v, -x) + c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(-x, x) + c_{\mathbb{B}_{\tilde{\alpha}}}(x, v) > \\
&c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{0p}(-v), G_{zp}(-x)) + c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{zp}(-x), G_{zp}(x)) + c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{zp}(x), G_{0p}(v)) \geq \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad c_{\mathbb{B}_{\beta_p}}(G_{0p}(-v), G_{0p}(v)),
\end{aligned}
$$

co daje nam sprzeczność. Druga równość w powyższym ciągu nierówności wynika z faktu, że wszystkie punkty $\pm v_r, \pm x_r$ leżą na jednej geodezyjnej rzeczywistej przechodzącej przez 0.

Gdy $k = l$, wtedy na mocy Twierdzeń 2.1.1 i 2.1.5(b) możemy założyć, że $G_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = (U_1(\lambda_1), \ldots, U_k(\lambda_k))$, gdzie U_j dla $j = 1, \ldots, k$ jest odwzorowaniem unitarnym lub antyunitarnym. Odwzorowanie G_z jest również izometrią, więc jest oczywiście tego samego typu co i G_0, lecz zamiast bycia unitarnym lub antyunitarnym składowe tego odwzorowania są izometriami (nie muszą one zachowywać 0) i uporządkowanie składowych nie musi być „dobre”.

Przypuśćmy dla przykładu, że $G_{z1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = W(\lambda_2)$, gdzie odwzorowanie $W : \mathbb{B}_{\alpha_2} \longrightarrow \mathbb{B}_{\beta_1}$ jest izometrią. Wtedy

$$
\begin{aligned}
&c_{\mathbb{B}_{(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m)}}(0, z) = c_{\mathbb{B}_\alpha}((\lambda_1, 0, \ldots, 0), (\lambda_1, 0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_m)) \geq \\
&\qquad c_{\mathbb{B}_{\beta_1}}(F_1(\lambda_1, 0, \ldots, 0), F_1(\lambda_1, 0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_m)) = \\
&\qquad\quad c_{\mathbb{B}_{\beta_1}}(G_{01}(\lambda_1, 0, \ldots, 0), G_{z1}(\lambda_1, 0, \ldots, 0)) = c_{\mathbb{B}_{\beta_1}}(U_1(\lambda_1), W(0)).
\end{aligned}
$$

Ale ostatnie wyrażenie dąży do nieskończoności, gdy $\|\lambda_1\| \to 1$, co daje oczywiście sprzeczność.

Wiemy zatem, że

$$
G_z(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = (W_1(\lambda_1), \ldots, W_k(\lambda_k)),
$$

gdzie W_j jest izometrią.

Poniżej udowodnimy, że $W_j(0) = 0$ i w konsekwencji W_j będzie odwzorowaniem unitarnym lub antyunitarnym dla $j = 1, \ldots, k$.

Przypuśćmy zatem, że $W_j(0) \neq 0$ dla pewnego j, powiedzmy, że $j = 1$. Weźmy $\lambda_1 \in \mathbb{B}_{\alpha_1}$, takie, że $\|\lambda_1\| \geq \max\{\|z_j\|,\ j = k+1, \ldots, m\}$.

$$
\begin{aligned}
&\|\lambda_1\| = c^*_{\mathbb{B}_{\alpha_1}}(\lambda_1, 0) = c^*_{\mathbb{B}_\alpha}((\pm\lambda_1, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_m)) \geq \\
&\qquad \max\{c^*_{\mathbb{B}_{\beta_1}}(F_1(\pm\lambda_1, 0, \ldots, 0), F_1(0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_m))\} = \\
&\qquad\quad \max\{c^*_{\mathbb{B}_{\beta_1}}(G_{01}(\pm\lambda_1, 0, \ldots, 0), W_1(0))\} > \|U_1(\lambda_1)\| = \|\lambda_1\|,
\end{aligned}
$$

co daje nam sprzeczność (ostra nierówność zachodzi na mocy następującej prostej obserwacji: $\max\left\{c^*_{\mathbb{B}_s}(a, b), c^*_{\mathbb{B}_s}(a, -b)\right\} > \|b\|,\ a, b \in \mathbb{B}_s,\ a \neq 0$).

Przypuśćmy, że dla pewnych j i $0 \neq \lambda_j \in \mathbb{B}_{\alpha_j}$ $W_j(\lambda_j) \neq U_j(\lambda_j)$. Przyjmijmy, że $j = 1$.

$$c_{\mathbb{B}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}}(0,z) = c_{\mathbb{B}_\alpha}((t\lambda_1,0,\ldots,0),(t\lambda_1,0,\ldots,0,z_{k+1},\ldots,z_m)) \geq$$
$$c_{\mathbb{B}_{\beta_1}}(F_1(t\lambda_1,0,\ldots,0),F_1(t\lambda_1,0,\ldots,0,z_{k+1},\ldots,z_m)) =$$
$$c_{\mathbb{B}_{\beta_1}}(tU_1(\lambda_1),tW_1(\lambda_1)).$$

Ale ostatnie wyrażenie dąży do nieskończoności, gdy $t \to \frac{1}{\|\lambda_1\|}$; daje nam to sprzeczność. Kończy to dowód lematu. $\square$

Dowód Lematu 2.1.12. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $z_m = 0$ i $F(0) = 0$. Poniżej udowodnimy, że biorąc s z $A(z_m)$ dostaniemy następującą zależność:

$$F_s(\cdot,0) = 0,$$

co zakończy dowód (i).

Przypuśćmy, że tak nie jest, wówczas mamy $F_s(z',0) \neq 0$ dla pewnego punktu $z' = (z'_1,\ldots,z'_{m-1}) \in \mathbb{B}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1})}$. Weźmy $w_m \in L$ takie, że spełniona jest nierówność $\|w_m\| \geq \max\{\|z'_j\|,\ j = 1,\ldots,m-1\}$, wtedy zachodzą następujące nierówności

$$\|w_m\| = c^*_{\mathbb{B}_\alpha}((z',0),(0,\pm w_m)) \geq \max\left\{c^*_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(F_s(z',0),F_s(0,\pm w_m))\right\} =$$
$$\max\left\{c^*_{\mathbb{B}_{\beta_s}}(F_s(z',0),\pm F_s(0,w_m))\right\} > \|\pm F_s(0,w_m)\| = \|w_m\|,$$

co daje nam oczywistą sprzeczność.

Wprost z definicji $A(z_m)$ wnioskujemy (ii).

Warunek (i) implikuje, że odwzorowanie

$$F_{(1,\ldots,\check{s},\ldots,n)}(\cdot,z_m) : \mathbb{B}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1})} \longrightarrow \mathbb{B}_{(\beta_1,\ldots,\check{\beta}_s,\ldots,\beta_n)}$$

jest izometrią dla każdego $s \in A(z_m)$. Co więcej widać, że nawet ogólnie, po prawej stronie możemy usunąć dowolną ilość składowych o współczynnikach z $A(z_m)$ i dalej nasza funkcja pozostanie izometrią zespoloną. Zatem otrzymujemy (iii). $\square$

2.2. PRZYPADEK OGÓLNY

W tej części pracy jak już to zapowiadaliśmy będziemy kontynuować badanie struktury izometrii zespolonych między iloczynami kartezjańskimi obszarów nie ograniczając się jednak do kul euklidesowych, lecz rozważając obszary dużo bardziej ogólne. Co więcej obszary przez nas rozważane nie będą musiały być wypukłe;

tak więc nie będziemy mieli tak komfortowej sytuacji jak w § 2.1, gdzie wszystkie rodziny holomorficznie niezmiennicze były równe. Dlatego też za każdym razem będziemy musieli zaznaczać względem jekiej rodziny holomorficznie niezmienniczej dane odwzorowanie jest izometrią. Podkreślmy, że wyniki, które tutaj uzyskamy, będziemy mogli zastosować do odwzorowań biholomorficznych, które są zawsze d-izometriami ([24]).

Przedstawmy jako pewien model twierdzeń, które będziemy chcieli uzyskać dla izometrii zespolonych dwa twierdzenia dotyczące właśnie odwzorowań biholomorficznych iloczynów kartezjańskich obszarów.

Twierdzenie 2.2.1 (zob. [Nara] Proposition 1, Chapter 5). *Niech D_j i G_j będą ograniczonymi obszarami w $\mathbb{C}^{\alpha_j}$ dla $j = 1, \dots, m$. Załóżmy, że ∂G_j nie zawiera żadnego dodatnio wymiarowego zbioru analitycznego w zbiorze otwartym w $\mathbb{C}^{\alpha_j}$ dla $j = 1, \dots, m$. Niech $F : D_1 \times \dots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \dots \times G_m$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym. Wtedy z dokładnością do permutacji obszarów $(G_1, \dots, G_m)$*

$$F(z_1, \dots, z_m) = (\varphi_1(z_1), \dots \varphi_m(z_m)),$$

gdzie φ_j jest odwzorowaniem biholomorficznym.

Drugie twierdzenie nie wymaga założenia równości ilości czynników występujących tak w dziedzinie jak i obrazie. Jednakże musimy wtedy zmienić założenia nałożone na obszary.

Twierdzenie 2.2.2 (zob. [Cyg]). *Niech $D_j \subset \mathbb{C}^{\alpha_j}$ dla $j = 1, \dots, m$ oraz $G_k \subset \mathbb{C}^{\beta_k}$ dla $k = 1, \dots, n$ będą ograniczonymi obszarami o brzegu klasy C^2. Załóżmy, że $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \beta_1 + \dots + \beta_n$. Niech $F : D_1 \times \dots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \dots \times G_n$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym. Wtedy $m = n$ i F jest, z dokładnością do permutacji obszarów $(G_1, \dots, G_m)$, następującej postaci*

$$F(z_1, \dots, z_m) = (\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_m(z_m)),$$

gdzie φ_j jest odwzorowaniem biholomorficznym dla $j = 1, \dots, m$.

Poniżej przedstawmy pewien techniczny warunek, który będzie potrzebny nam do opisania założeń, które nakładamy na obszary występujące w głównym twierdzeniu tego podrozdziału.

Mówimy mianowicie, że para (D, d_D), gdzie $D \in \mathfrak{D}$, spełnia warunek $(*)$, jeśli

(a) d_D jest odległością ([25]),

(b) dla dowolnego $z \in D$ istnieje ciąg $(x_\nu, y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset D \times D$ taki, że

$$d_D(x_\nu, z) = d_D(y_\nu, z) = (1/2) d_D(x_\nu, y_\nu) \underset{\nu \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
$$d_D(x_\nu, y_\nu) = d_D(x_\nu, x_{\nu-1}) + d_D(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}) + d_D(y_{\nu-1}, y_\nu), \quad \nu \in \mathbb{N},$$

(c) dla dowolnego ciągu $(x_\nu, y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset D \times D$ mającego powyższe własności istnieje ν_0 takie, że dla każdego $\nu \geq \nu_0$ odcinek $[x_\nu, y_\nu]_{d_D}$ ma dokładnie jeden środek.

([24]) Przez d będziemy w § 2.2 zawsze rozumieć pewną holomorficznie niezmienniczą rodzinę pseudoodległości $(d_D)_{D \in \mathfrak{D}}$.

([25]) Warunek ten zachodzi na przykład, gdy D jest obszarem ograniczonym.

Zauważmy, że warunek (b) z definicji (∗) powoduje, iż

$$d_D(x_\nu, y_\nu) = d_D(x_\nu, x_\mu) + d_D(x_\mu, y_\mu) + d_D(y_\mu, y_\nu),$$

dla $\mu \leq \nu$.

Warunek (∗) jest dość skomplikowany jednak udowodnimy, po wykazaniu głównego twierdzenia tego podrozdziału (Twierdzenie 2.2.5), że spełniony jest on przez dosyć szeroką klasę obszarów, mianowicie ([26]):

Propozycja 2.2.3. *Jeśli D jest ściśle wypukłym obszarem ograniczonym, wtedy para (D, k_D) ([27]) spełnia (∗).*

Propozycja 2.2.4. *Para (E_*, k_{E_*}) ma własność (∗).*

Poniżej przedstawiamy główne twierdzenie § 2.2.

Twierdzenie 2.2.5. *Niech $d = (d_D)_{D\in\mathfrak{D}}$ będzie holomorficznie niezmienniczą rodziną pseudoodległości. Załóżmy, że d ma własność produktową oraz, że każda z par (D_j, d_{D_j}), $j = 1, \ldots, m$, (G_k, d_{G_k}), $k = 1, \ldots, n$, ma własność (∗). Przypuśćmy, że $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. Niech $F : D_1 \times \cdots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \cdots \times G_n$ będzie bijektywną i ciągłą d-izometrią. Wtedy $m = n$ oraz (po ewentualnej permutacji)*

$$F_t(z) = \varphi_t(z_t),\ z = (z_1, \ldots, z_m),$$

gdzie $\varphi_t \in \mathrm{Isom}_d(D_t, G_t)$, $t = 1, \ldots, m$.

Ograniczając się w Twierdzeniu 2.2.5 tylko do odwzorowań biholomorficznych otrzymujemy:

Wniosek 2.2.6. *Załóżmy, że dla pewnej holomorficznie niezmienniczej rodziny pseudoodległości $d = (d_D)_{D\in\mathfrak{D}}$, posiadającej własność produktową, pary (D_j, d) dla $j = 1, \ldots, m$ oraz (G_k, d) dla $k = 1, \ldots, n$ spełniają własność (∗). Niech $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. Niech $F : D_1 \times \cdots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \cdots \times G_n$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym. Wtedy $m = n$ i F jest, z dokładnością do permutacji obszarów G_j, postaci*

$$F(z_1, \ldots, z_m) = (\varphi_1(z_1), \ldots, \varphi_m(z_m)),$$

gdzie φ_j jest odwzorowaniem biholomorficznym dla $j = 1, \ldots, m$.

Przed przejściem do dowodu Twierdzenia 2.2.5 podajmy następującą trywialną uwagę.

Uwaga 2.2.7. *Niech $x, y, z \in D$. Wtedy*

$$\max\{d_D(x, z), d_D(y, z)\} \geq \frac{1}{2} d_D(x, y)$$

i równość zachodzi tylko wtedy, gdy z jest środkiem odcinka $[x, y]_{d_D}$.

W dowodzie Twierdzenia 2.2.5 będziemy potrzebować dwu, poniżej podanych lematów, które wykażemy jednak dopiero po zakończeniu dowodu głównego twierdzenia.

([26]) Obszar $D \subset \mathbb{R}^k$ nazywamy ściśle wypukłym, gdy dla dowolnych punktów $x, y \in \bar{D}$, mamy $tx + (1-t)y \in D$ o ile $t \in (0, 1)$.

([27]) Pamiętamy, że w tym wypadku k_D jest równe dowolnej innej odległości holomorficznie niezmienniczej.

Lemat 2.2.8. *Ustalmy punkt $z \in D$. Załóżmy, że $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ spełnia warunek* (b) *z własności* $(*)$ *z wyróżnionym punktem z. Niech $f : D \longrightarrow G$ będzie d-kontrakcją zespoloną taką, że*

$$d_G(f(x_\nu), f(y_\nu)) = d_D(x_\nu, y_\nu) \text{ dla pewnego } \nu \in \mathbb{N}. \tag{2.2.1}$$

Wtedy dla wszelkich $\mu \leq \nu$

$$2d_G(f(x_\mu), f(z)) = 2d_G(f(y_\mu), f(z)) = d_G(f(x_\mu), f(y_\mu)) = d_D(x_\mu, y_\mu), \tag{2.2.2}$$

w szczególności $f(z)$ jest środkiem odcinka $[f(x_\mu), f(y_\mu)]_{d_G}$.

Lemat 2.2.9. *Niech $d = (d_D)_{D\in\mathfrak{D}}$ będzie holomorficznie niezmienniczą rodziną pseudoodległości. Załóżmy, że d ma własność produktową oraz, że każda z par (D_j, d_{D_j}), $j = 1, \dots, m$, (G_k, d_{G_k}), $k = 1, \dots, n$, posiada własność $(*)$. Niech $F : D_1 \times \dots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \dots \times G_n$ będzie d-izometrią. Ustalmy $a = (a_1, \dots, a_m)$ oraz oznaczmy $a' = (a_2, \dots, a_m)$. Niech $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^\infty \subset D_1 \times D_1$ będzie zbiorem spełniającym warunek* (b) *z własności* $(*)$ *z wyróżnionym punktem a_1. Wtedy istnieje $j \in \{1, \dots, n\}$ takie, że*

$$\begin{aligned} 2d_{G_j}(F_j(x_\nu, a'), F_j(a)) = 2d_{G_j}(F_j(y_\nu, a'), F_j(a)) = d_{G_j}(F_j(x_\nu, a'), F_j(y_\nu, a')) = \\ d_{D_1\times\dots\times D_m}((x_\nu, a'), (y_\nu, a')) = d_{D_1}(x_\nu, y_\nu) \text{ dla dowolnego } \nu \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

$$F_j(a_1, z') = F_j(a) \text{ dla dowolnego } z' = (z_2, \dots, z_m) \in D_2 \times \dots \times D_m. \tag{2.2.4}$$

Jeśli dodatkowo $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m$, $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \beta_1 + \dots + \beta_n$ i F jest ciągłą bijekcją, to wtedy $\beta_j = \alpha_1 = \beta_1$.

Dowód Twierdzenia 2.2.5. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_m$ i $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_n$. Weźmy punkt $a = (a_1, \dots, a_m) \in D_1 \times \dots \times D_m$. Oznaczmy $F(a) = b = (b_1, \dots, b_n)$ i $a' = (a_2, \dots, a_m) \in D_2 \times \dots \times D_m$. Wybierzmy zbiór $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^\infty \subset D_1 \times D_1$ spełniający warunek (b) z własności $(*)$ z wyróżnionym punktem a_1.

Udowodnimy indukcyjnie, że dla dowolnego $k \in \{1, \dots, m\}$ istnieje liczba $t(k) \in \{1, \dots, n\}$ taka, że $\alpha_k = \beta_{t(k)}$ oraz

$$\begin{aligned} &F_{t(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m) = F_{t(k)}(a) \\ &\qquad \text{dla wszelkich } (z_1, \dots, \check{z}_k, \dots, z_m) \in (D_1, \dots, \check{D}_k, \dots, D_m); \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\text{jeśli } k_1 \neq k_2, \text{ to } t(k_1) \neq t(k_2). \tag{2.2.6}$$

Na mocy Lematu 2.2.9 istnieje $t(1)$ takie, że $F_{t(1)}(a_1, z') = F_{t(1)}(a)$ dla dowolnego $z' \in D_2 \times \dots \times D_m$ i $\alpha_1 = \beta_{t(1)}$. Załóżmy, że dla $j = 1, \dots, k-1$ istnieją liczby $t(j)$ takie, że $\alpha_j = \beta_{t(j)}$ oraz

$$\begin{aligned} &F_{t(j)}(z_1, \dots, z_{j-1}, a_j, z_{j+1}, \dots, z_m) = F_{t(j)}(a), \\ &\qquad \text{i jeśli } j_1 \neq j_2, \text{ wtedy } t(j_1) \neq t(j_2) \text{ dla każdego } j_1, j_2 < k,. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $t(j) = j$ dla $j = 1, \dots, k-1$. Zdefiniujmy

$$H_{a_1,\dots,a_{k-1}} := F_{(k,\dots,n)}(a_1, \dots, a_{k-1}, \cdot) : D_k \times \cdots \times D_m \longrightarrow G_k \times \cdots \times G_n.$$

$H_{a_1,\dots,a_{k-1}}$ jest, na mocy (2.2.7) i własności produktowej, d-izometrią zespoloną. Stosując Lemat 2.2.9 do $H_{a_1,\dots,a_{k-1}}$ oraz zbioru $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty} \subset D_k \times D_k$ spełniającego warunek (b) z własności $(*)$ dla wyróżnionego punktu a_k otrzymujemy istnienie $t(k) > k-1$ takiego, że $\beta_{t(k)} = \alpha_k$ i

$$\begin{aligned} &d_{D_k}(y_\nu, a_k) = d_{D_k}(x_\nu, a_k) = \\ &d_{G_{t(k)}}(F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, x_\nu, a_{k+1}, \dots, a_m), F_{t(k)}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)) = \\ &\quad d_{G_{t(k)}}(F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, y_\nu, a_{k+1}, \dots, a_m), F_{t(k)}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

oraz $F_{t(k)}(a_1, \dots, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m) = F_{t(k)}(a)$ dla dowolnie wybranego punktu $(z_{k+1}, \dots, z_m) \in D_{k+1} \times \cdots \times D_m$.

Poniżej udowodnimy, że dla dowolnego punktu $(z_1, \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_m)$ ze zbioru $D_1 \times \cdots \times D_{k-1} \times D_{k+1} \times \cdots \times D_m$ zachodzi

$$F_{t(k)}(z_1, \dots z_{k-1}, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m) = F_{t(k)}(a) \tag{2.2.9}$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, wówczas możemy znaleźć punkt $(z_1, \dots, \check{z}_k, \dots, z_m)$ z $D_1 \times \cdots \times \check{D}_k \times \cdots \times D_m$ taki, że $F_{t(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m) \neq F_{t(k)}(a)$. Stosując Lemat 2.2.8 do odwzorowania $F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, \cdot, z_{k+1}, \dots, z_m)$, punktu a_k oraz zbioru $(x_\nu, y_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset D_k \times D_k$ spełniającego warunek (b) z własności $(*)$ z wyróżnionym punktem a_k otrzymujemy na mocy (2.2.7) (bierzemy ν tak duże by $d_{D_k}(x_\nu, a_k) = d_{D_k}(y_\nu, a_k) \geq d_{D_1 \times \cdots \times D_{k-1}}((a_1, \dots, a_{k-1}), (z_1, \dots, z_{k-1}))$ i by istniał dokładnie jeden środek odcinka
$[F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, x_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m), F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, y_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m)]_{d_{G_{t(k)}}}$)
następujący ciąg nierówności:

$$\begin{aligned} &d_{D_k}(x_\nu, a_k) = d_{D_k}(y_\nu, a_k) = \\ &\max\{d_{G_{t(k)}}(F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, x_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m), F_{t(k)}(a_1, \dots, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m)), \\ &d_{G_{t(k)}}(F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, y_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m), F_{t(k)}(a_1, \dots, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m)\} < \max \\ &\{d_{G_{t(k)}}(F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, x_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m), F_{t(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m)), \\ &d_{G_{t(k)}}(F_{t(k)}(a_1, \dots, a_{k-1}, y_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m), F_{t(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m))\} \\ &\quad \leq \max\{d_{D_k}((a_1, \dots, a_{k-1}, x_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m), (z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m), \\ &\quad d_{D_k}((a_1, \dots, a_{k-1}, y_\nu, z_{k+1}, \dots, z_m), (z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, z_{k+1}, \dots, z_m))\} = \\ &\qquad d_{D_k}(x_\nu, a_k), \end{aligned}$$

który daje nam oczywistą sprzeczność. Kończy to dowód (2.2.5) i (2.2.6).

Z warunku $\alpha_1+\ldots+\alpha_m = \beta_1+\ldots+\beta_n$ i własności (2.2.6) wynika, że $m = n$. W konsekwencji otrzymujemy istnienie pewnej permutacji σ zbioru $\{1, \ldots, m\}$ takiej, że $\alpha_j = \beta_{\sigma(j)}$ dla dowolnego $j = 1, \ldots, m$.

Zdefiniujmy dla dowolnego punktu $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) \in D_1 \times \cdots \times D_m$ oraz $j \in \{1, \ldots , m\}$:

$$\mathcal{Z}(\tilde{a}, j) := \{k \in \{1, \ldots, m\} : F_k(\cdot, \tilde{a}_j, \cdot) = F_k(\tilde{a})\}.$$

Na mocy (2.2.5) i (2.2.6) (zastosowanych oczywiście do punktu $\tilde{a}$) otrzymujemy, że dla wszelkich $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) \in D_1 \times \ldots D_m$

$$\mathcal{Z}(\tilde{a}, j) \neq \varnothing \text{ i } \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{Z}(\tilde{a}, j) = \{1, \ldots, m\}.$$

Jako konsekwencję (2.2.5) otrzymujemy, że dla dowolnego $j \in \{1, \ldots, m\}$ istnieje $k \in \mathcal{Z}(\tilde{a}, j)$ takie, że $\alpha_j = \beta_k$.

Poniżej wykażemy, że dla wszelkich $\tilde{a} \in D_1 \times \ldots \times D_m$

$$\#\mathcal{Z}(\tilde{a}, j) = 1 \text{ dla dowolnego } j \in \{1, \ldots, m\}\ .$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, zatem dla pewnych $\tilde{a} \in D_1 \times \ldots \times D_m$ oraz $j \in \{1, \ldots, m\}$ mamy $\mathcal{Z}(\tilde{a}, j) = \{k_1, \ldots, k_p\}$, gdzie $p > 1$. Na mocy własności produktowej i definicji $\mathcal{Z}(\tilde{a}, j)$, odwzorowanie

$$\begin{aligned} F_{(1,\ldots,\check{k}_1,\ldots,\check{k}_p,\ldots,m)}(\cdot, \tilde{a}_j, \cdot) : D_1 \times \cdots \times \check{D}_j \times \cdots \times D_m \longrightarrow& \\ G_1 \times \cdots \times \check{G}_{k_1} \times \cdots \times \check{G}_{k_p} \times \cdots \times G_m&, \end{aligned}$$

jest d-izometrią. Ale nierówność

$$\alpha_1 + \cdots + \check{\alpha}_j + \cdots + \alpha_m > \beta_1 + \cdots + \check{\beta}_{k_1} + \cdots + \check{\beta}_{k_p} + \cdots + \beta_m$$

stoi w sprzeczności z faktem, że odwzorowanie $F_{(1,\ldots,\check{k}_1,\ldots,\check{k}_p,\ldots,m)}(\cdot, \tilde{a}_j, \cdot)$ jest ciągłą iniekcją.

Poniżej dowiedziemy, że dla dowolnych $a, \tilde{a} \in D_1 \times \cdots \times D_m$ i $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\mathcal{Z}(a, j) = \mathcal{Z}(\tilde{a}, j). \tag{2.2.10}$$

Żeby wykazać (2.2.10) zauważmy, że $\mathcal{Z}(a, j) = \mathcal{Z}((\tilde{a}_1, a_2, \ldots, a_m), j)$ dla $j = 2, \ldots, m$. Powoduje to, na mocy uwag, które poczyniliśmy powyżej, że $\mathcal{Z}(a, 1) = \mathcal{Z}((\tilde{a}_1, a_2, \ldots, a_m), 1)$. Analogicznie można dowieść, że $\mathcal{Z}((\tilde{a}_1, a_2, \ldots, a_m), j) = \mathcal{Z}((\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, a_3, \ldots, a_m), j)$ dla $j = 1, \ldots, m$. Postępując indukcyjnie w ten sam sposób otrzymujemy (2.2.10).

Na mocy definicji $\mathcal{Z}(a, j)$ i własności (2.2.10) otrzymujemy, po ewentualnej permutacji, że $F(z_1, \ldots, z_m) = (F_1(z_1), \ldots, F_m(z_m))$. Z d-izometryczności F otrzymujemy d-izometryczność F_j dla $j = 1, \ldots , m$. Kończy to dowód twierdzenia. $\square$

Uwaga 2.2.10. W rzeczywistości nie musimy zakładać w dowodzie Twierdzenia 2.2.5 własności produktowej d w ogólności, lecz potrzebujemy założyć tylko tę własność dla obszarów $D_1, \dots, D_m$ i $G_1, \dots, G_n$.

Dowód Lematu 2.2.8. Na mocy (2.2.1), własności zbioru $(x_\nu, y_\nu)_{\nu=1}^\infty$ i $d-$kontraktywności f mamy

$$\begin{aligned}
&d_G(f(x_\nu), f(y_\nu)) = d_D(x_\nu, y_\nu) = \\
&\qquad d_D(x_\nu, x_\mu) + d_D(x_\mu, z) + d_D(z, y_\mu) + d_D(y_\mu, y_\nu) \geq \\
&d_G(f(x_\nu), f(x_\mu)) + d_G(f(x_\mu), f(z)) + d_G(f(z), f(y_\mu)) + d_G(f(y_\mu), f(y_\nu)) \geq \\
&\qquad d_G(f(x_\nu), f(y_\nu)),
\end{aligned}$$

co daje (2.2.2) i kończy dowód Lematu 2.2.8. □

Dowód Lematu 2.2.9. Oznaczmy $F(a) = b = (b_1, \dots, b_n)$. Na mocy własności produktowej d, Lematu 2.2.8 i d-izometryczności F dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$ istnieje $j \in \{1, \dots, n\}$ takie, że

$$\begin{aligned}
&2d_{G_j}(F_j(x_\nu, a'), F_j(a)) = 2d_{G_j}(F_j(y_\nu, a'), F_j(a)) = \\
&\qquad d_{G_j}(F_j(x_\nu, a'), F_j(y_\nu, a')) = d_{D_1 \times \dots \times D_m}((x_\nu, a'), (y_\nu, a')) = d_{D_1}(x_\nu, y_\nu).
\end{aligned}$$

Z Lematu 2.2.8 i skończoności n wynika istnienie $j \in \{1, \dots, n\}$ takiego, że zachodzi (2.2.3).

Dla dowodu (2.2.4) przypuśćmy, że dla pewnego $z' \in D_2 \times \dots \times D_m$ zachodzi $F_j(a_1, z') \neq b_j = F_j(a)$. Dzięki warunkowi (b) z własności $(*)$ możemy wybrać $\nu \in \mathbb{N}$ takie, że

$$d_{D_1}(x_\nu, a_1) = d_{D_1}(y_\nu, a_1) \geq d_{D_2 \times \dots \times D_m}(a', z').$$

Wykorzystując warunek (c) z własności $(*)$ (do zbioru G_j) możemy założyć, że odcinek $[F_j(x_\nu, a'), F_j(y_\nu, a')]_{d_{G_j}}$ ma dokładnie jeden środek. Na mocy własności produktowej d, d-kontraktywności F_j, (2.2.3) i Uwagi 2.2.7 otrzymujemy następujący ciąg nierówności

$$\begin{aligned}
&d_{D_1}(x_\nu, a_1) = d_{D_1}(y_\nu, a_1) = \\
&\qquad \max\{d_{D_1 \times \dots \times D_m}((x_\nu, a'), a), d_{D_1 \times \dots \times D_m}((y_\nu, a'), a)\} = \\
&\qquad \max\{d_{G_j}(F_j(x_\nu, a'), F_j(a)), d_{G_j}(F_j(y_\nu, a'), F_j(a))\} < \\
&\qquad \max\{d_{G_j}(F_j(x_\nu, a'), F_j(a_1, z')), d_{G_j}(F_j(y_\nu, a'), F_j(a_1, z'))\} \leq \\
&\qquad \max\{d_{D_1 \times \dots \times D_m}((x_\nu, a'), (a_1, z')), d_{D_1 \times \dots \times D_m}((y_\nu, a'), (a_1, z'))\} = \\
&\qquad d_{D_1}(x_\nu, a_1),
\end{aligned}$$

który daje nam sprzeczność.

Żeby dowieść drugiej części lematu wykażemy, że $\alpha_1 \geq \beta_j$. Przypuśćmy, że ta nierówność nie zachodzi, więc mamy $\beta_j > \alpha_1$, ale dzięki (2.2.4) i własności produktowej d odwzorowanie

$$F_{(1,\dots,\check{j},\dots,n)}(a_1,\cdot) : D_2 \times \cdots \times D_m \longrightarrow G_1 \times \cdots \times \check{G}_j \times \cdots \times G_n \tag{2.2.11}$$

jest d-izometrią.

Implikuje to ze względu na warunek (a) z $(*)$, że to odwzorowanie jest iniekcją, ale

$$\dim(D_2 \times \cdots \times D_m) = \alpha_2 + \cdots + \alpha_m > \\ \beta_1 + \cdots + \check{\beta}_j + \cdots + \beta_n = \dim(G_1 \times \cdots \times \check{G}_j \times \cdots \times G_n)$$

co stoi w sprzeczności z iniektywnością i ciągłością $F_{(1,\dots,\check{j},\dots,n)}$.

Dowodzi to, w szczególności nierówności $\alpha_1 \geq \beta_1$. Ale całe rozumowanie, które prowadziliśmy powyżej możemy zastosować do odwzorowania F^{-1} co da nam nierówność $\alpha_1 \leq \beta_1$. Zatem $\alpha_1 = \beta_1$.

Używając własności (2.2.11) i porównując powtórnie wymiary dziedziny i obrazu uzyskujemy wymaganą równość $\alpha_1 = \beta_j$. Kończy to dowód Lematu 2.2.9. $\square$

Dowód Propozycji 2.2.3. Dla dowolnego punktu $z \in D$ weźmy geodezyjną zespoloną φ ([28]) przechodzącą przez z, taką, że $\varphi(0) = z$ ([29]). Wówczas zbiór $\left\{\left(\varphi(\frac{\nu}{\nu+1}), \varphi(-\frac{\nu}{\nu+1})\right)\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ spełnia warunek (b) z $(*)$ z wyróżnionym punktem z.

Poniżej dowiedziemy, że każdy odcinek względem k w D ma dokładnie jeden środek. Przypuśćmy, że istnieją punkty $x, y \in D$ takie, że odcinek $[x,y]_{k_D}$ posiada więcej niż jeden środek. Weźmy geodezyjną zespoloną φ przechodzącą przez x i y taką, że $\varphi(s) = x$, $\varphi(-s) = y$ dla pewnego $s > 0$ i połóżmy $z_1 := \varphi(0)$. Założyliśmy istnienie punktu $z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ takiego, że $k_D(x, z_2) = p(0,s) = k_D(y, z_2) = \frac{1}{2}k_D(x,y)$. Wybierzmy geodezyjne zespolone $\varphi_1, \varphi_2 : E \longrightarrow D$ takie, że $\varphi_1(0) = z_2$, $\varphi_1(s) = x$, $\varphi_2(0) = z_2$, $\varphi_2(-s) = y$. Zdefiniujmy

$$g_j^t := t\varphi + (1-t)\varphi_j \text{ dla } t \in [0,1], \quad j = 1, 2.$$

Dzięki wypukłości D mamy $g_j^t : E \longrightarrow D$.

Połóżmy $w_t := tz_1 + (1-t)z_2 \in D$ dla $t \in [0,1]$. Ponieważ $g_j^t(0) = w_t$, $g_1^t(s) = x$ i $g_2^t(-s) = y$, więc zachodzą następujące nierówności

([28]) Przypomnijmy, że w obszarach wypukłych mamy poprawnie zdefiniowane pojęcie geodezyjnej zespolonej.

([29]) W uzupełnieniu do Twierdzenia Lemperta dodajmy, że w [Lem1] i w [Lem2] zostało również udowodnione, że w ograniczonych obszarach wypukłych dla dowolnej pary punktów istnieje geodezyjna zespolona przechodząca przez te punkty. Co więcej, łatwo widać (stosując Lemat Schwarza), że gdy dla pewnego $\varphi \in \mathcal{O}(E,D)$, gdzie D jest obszarem wypukłym, mamy

$$k_D(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2)) = p(\lambda_1, \lambda_2), \quad \text{dla pewnych } \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in E,$$

to φ jest geodezyjną zespoloną.

$$k_D(w_t,x) \le p(0,s) = k_D(z_1,x) \text{ i } k_D(w_t,y) \le p(0,-s) = k_D(z_1,y).$$

Gdyby g_1^t lub g_2^t nie były geodezyjnymi zespolonymi otrzymalibyśmy następującą zależność

$$k_D(x,y) \le k_D(w_t,x) + k_D(w_t,y) < k_D(z_1,x) + k_D(z_1,y) = k_D(x,y),$$

która daje oczywistą sprzeczność. Wiemy zatem, że g_j^t jest geodezyjną zespoloną. W szczególności oznacza to, że $(g_j^t)^*(\partial E) \subset \partial D$ prawie wszędzie ([30]). Ścisła wypukłość D implikuje, że $\varphi^* = \varphi_j^*$ na ∂E p.w. dla $j = 1, 2$. Zatem $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ na E (zob. np. [Dur], § 2.1). Zatem $z_2 = \varphi_1(0) = \varphi(0) = z_1$, kończy to dowód Propozycji. $\square$

Dla zakończenia rozważań w tym podrozdziale potrzebujemy jeszcze dowodu Propozycji 2.2.4, zanim to uczynimy wprowadźmy jeszcze dodatkowe definicje pomocnicze.

Definicja 2.2.11. Dowolne odwzorowanie holomorficzne $\varphi : E \longrightarrow D$ takie, że $\varphi(\zeta_0) = x, \varphi(\zeta_1) = y$, i $d_D(x,y) = p(\zeta_0,\zeta_1)$ nazywamy *d-geodezyjną zespoloną dla* (x,y). Jeśli φ jest d-geodezyjną dla dowolnej pary $(x,y) \in \varphi(E) \times \varphi(E)$, wtedy φ nazywamy *lokalną d-geodezyjną*.

Uwaga 2.2.12. Dla odwzorowania holomorficznego $\varphi : E \longrightarrow D$ zachodzi następujący ciąg implikacji:
φ jest d-geodezyjną zespoloną $\to$ φ jest lokalną d-geodezyjną zespoloną $\to$ φ jest d-geodezyjną zespoloną dla pewnej pary punktów.

Zanim przejdziemy do przypadku pary (E_*, k_{E_*}) (czyli Propozycji 2.2.4) wypiszmy bez dowodu parę prostych i znanych faktów dotyczących własności obszarów w $\mathbb{C}$, nakryć holomorficznych, pseudoodległości Kobayashiego i związków między nimi.

Lemat 2.2.13 (zob. [Jar-Pfl], § 3.2,§ 3.3; [Kob], § 4.1). *Niech D będzie k-hiperbolicznym obszarem w $\mathbb{C}$ ([31]) ([32]). Wówczas*
(i) *D jest obszarem typu taut* ([33]) *(i w konsekwencji dla dowolnych $x, y \in D$ istnieje k-geodezyjna φ dla (x,y));*

([30]) Dla funkcji $f \in H^\infty$–ograniczonych funkcji holomorficznych zdefiniowanych na E–przez f^* oznaczamy jej wartość radialną, $f^*(\lambda) := \lim_{r\to 1} f(r\lambda)$, która istnieje dla prawie wszystkich $\lambda \in \partial E$. Co więcej, powyższa granica istnieje prawie wszędzie na ∂E dla bardziej ogólnej klasy funkcji, a mianowicie dla przestrzeni Hardy'ego (H^p). Mówimy, że funkcja holomorficzna $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ należy do H^p, gdzie $p \in (0,\infty)$, gdy $\sup_{0<r<1} \left\{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\} < \infty$ (zob. np. [Gar], Chapter II; [Dur], Chapter II).

([31]) Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *d-hiperbolicznym*, gdy $d_D(w,z) > 0$ dla wszelkich $w, z \in D$, $w \neq z$.

([32]) Dla obszaru $D \subset \mathbb{C}$ zachodzi równość $k_D = \tilde{k}_D$ (zob. [Jar-Pfl], § 3.3).

([33]) Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem *typu taut*, gdy każdy ciąg $\{f_\nu\}_\nu^\infty \subset \mathcal{O}(E,D)$, albo posiada podciąg $\{f_{j_\nu}\}_\nu^\infty$ niemal jednostajnie zbieżny do funkcji $f \in \mathcal{O}(E,D)$, albo posiada podciąg $\{f_{j_\nu}\}_\nu^\infty$ rozbieżny jednostajnie na zbiorach zwartych (tzn. taki, że dla dowolnych zbiorów zwartych $K \subset E$, $L \subset D$ istnieje ν_0 takie, że $f_{j_\nu}(K) \cap L = \varnothing$, gdy $\nu \ge \nu_0$).

(ii) *jeśli* $\varphi : E \longrightarrow D$ *jest* k*-geodezyjną zespoloną dla pewnej pary punktów, wtedy* φ *jest nakryciem holomorficznym* ([34]);
(iii) *jeśli* $\varphi : E \longrightarrow D$ *jest nakryciem holomorficznym, wtedy* φ *jest lokalną* k*-geodezyjną;*
(iv) $k_D(x,y) = \min\{p(u,v),$ *gdzie* $\varphi(v) = y\}$*, gdzie* $\varphi : E \longrightarrow D$ *jest nakryciem holomorficznym i* $\varphi(u) = x$*;*
(v) *jeśli* $\varphi : E \longrightarrow D$ *jest* k*-geodezyjną zespoloną dla pewnej pary punktów, to wtedy dla dowolnych* $x, y \in D$ *i* $u \in \varphi^{-1}(x)$ *istnieje* $v \in \varphi^{-1}(y)$ *takie, że* $k_D(x,y) = p(u,v)$.

Lemat 2.2.14. *Niech* D *będzie* k*-hiperbolicznym obszarem w* $\mathbb{C}$*. Niech* $\varphi : E \longrightarrow D$ *będzie* k*-geodezyjną dla pewnych* (x,y)*. Jeśli* z *jest środkiem odcinka* $[x,y]_{k_D}$*, wtedy istnieją punkty* $u, v, w \in E$ *takie, że* $\varphi(u) = x, \varphi(v) = z, \varphi(w) = y$ *i* $p(u,w) = 2p(u,v) = 2p(v,w)$.

Dowód Lematu 2.2.14. Na mocy Lematu 2.2.13 możemy wziąć $u, v, w \in E$ takie, że $\varphi(u) = x$, $\varphi(v) = z$, $\varphi(w) = y$ i $p(u,v) = k_D(x,z)$, $p(v,w) = k_D(z,y)$. Następujący ciąg nierówności zakończy dowód Lematu 2.2.14

$$p(u,w) \leq p(u,v) + p(v,w) = k_D(x,z) + k_D(z,y) = k_D(x,y) \leq p(u,w).$$

□

Dowód Propozycji 2.2.4. Niech $\varphi : \{\mathrm{Re} z > 0\} =: H \ni z \longrightarrow \exp(-z) \in E_*$. Na mocy Lematu 2.2.13 i faktu, że wszystkie odcinki względem k_H mają środki, możemy wybrać $u, v, w \in H$ takie, że $p(u,w) = 2p(u,v) = 2p(v,w)$ równe jest $k_{E_*}(x_0, y_0)$ i $\varphi(u) = x_0$, $\varphi(w) = y_0$. Zatem łatwo widać, że $\varphi(v)$ jest środkiem odcinka $[x_0, y_0]_{k_{E_*}}$. Ustalmy punkt $u_0 \in H$ taki, że $\varphi(u_0) = x_0$. Lemat 2.2.14 implikuje, że odcinek $[x_0, y_0]_{k_{E_*}}$ ma więcej niż jeden środek wtedy i tylko wtedy, gdy możemy znaleźć dwa punkty $w_1 \neq w_2 \in H$ takie, że $\varphi(w_1) = \varphi(w_2) = y_0$ i $k_H(w_1, u_0) = k_H(w_2, u_0)$ równe jest

$$k_{E_*}(x_0, y_0) = \min\{k_H(u_0, w) : \varphi(w) = y_0\}. \tag{2.2.12}$$

Przypomnijmy wzór na k_H (zob. np. [Jar-Pfl], Chapter II, Exercise 2.2)

$$k_H^*(w,z) = \left|\frac{w - z}{w + \bar{z}}\right| \qquad \text{dla dowolnych } w, z \in H.$$

Łatwo można sprawdzić, że punktem $w \in H$ przyjmującym minimum w (2.2.12) jest punkt, którego odległość euklidesowa od u_0 jest najmniejsza. Możliwe punkty mające te same obrazy po złożeniu z φ różnią się od siebie o $2\pi i$. Łatwo można

([34]) Odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(D,G)$, gdzie $D, G \in \mathfrak{D}$ nazywamy *nakryciem holomorficznym*, gdy f jest suriekcją taką, że dla dowolnego $z \in G$ istnieje otoczenie U punktu z takie, że $f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$, gdzie $f|_{U_j}$ jest odwzorowaniem biholomorficznym na U.

zobaczyć, że istnieją co najwyżej dwa punkty przyjmujące minimum i mające ten sam obraz po przejściu przez φ. Dowodzi to tego, że w E_* dla każdego odcinka względem k_{E_*} istnieje co najmniej jeden, a co najwyżej dwa środki.

Żeby dowieść, że para (E_*, k_{E_*}) ma własność $(*)$ zauważmy, że zbiór

$$\{(\exp(-u_\nu), \exp(-w_\nu))\}_{\nu=1}^{\infty} \subset E_* \times E_*,$$

gdzie punkty u_ν, w_ν, v leżą na jednej prostej rzeczywistej prostopadłej do prostej $\{\mathrm{Re} z = 0\}$ i spełniają warunek $2k_H(u_\nu, v) = 2k_H(v, w_\nu) = k_H(u_\nu, w_\nu) \to \infty$, spełnia warunek (b) z własności $(*)$ dla wyróżnionego punktu $\exp(-v)$.

Weźmy dowolny zbiór $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty} \subset E_* \times E_*$ spełniający warunek (b) z własności $(*)$ dla wyróżnionego punktu x. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x_\mu \neq x_\nu$, $y_\mu \neq y_\nu$, gdy $\mu \neq \nu$. Ustalmy pewien przeciwobraz x (oznaczmy go przez $\tilde{x}$). Na mocy Lematów 2.2.13(v), 2.2.14 i własności $(*)$, dla każdego ν możemy znaleźć przeciwobrazy x_ν, y_ν (oznaczmy je przez $\tilde{x}_\nu$ oraz y_ν) takie, że $\tilde{x}$ oraz $\tilde{x}_\nu$ i $\tilde{y}_\nu$ leżą na prostej lub na półokręgu prostopadłym do $\{\mathrm{Re} z = 0\}$. Wykorzystując warunek (b) z własności $(*)$ widzimy, że wszystkie te przeciwobrazy muszą leżeć na tej samej prostej lub na tym samym półokręgu prostopadłym do $\{\mathrm{Re} z = 0\}$. Gdy te punkty leżą na prostej, to wtedy dla każdego ν istnieje dokładnie jeden środek odcinka $[x_\nu, y_\nu]_{k_{E_*}}$. Zatem przypuśćmy, że leżą one na półokręgu. Łatwo widać, że dla co najwyżej jednej pary (x_ν, y_ν) ich przeciwobrazy mają własność $|\mathrm{Im}\, \tilde{x}_\nu - \mathrm{Im}\, \tilde{y}_\nu| = \pi$, co implikuje, że dla co najwyżej jednej pary (x_ν, y_ν) istnieje więcej niż jeden środek odcinka $[x_\nu, y_\nu]_{k_{E_*}}$. Kończy to dowód własności $(*)$ i dowód Propozycji 2.2.4. □

ROZDZIAŁ III

GEODEZYJNE ZESPOLONE W PSEUDOELIPSOIDACH UOGÓLNIONYCH

Naszym głównym celem będzie znalezienie wzorów na geodezyjne zespolone w wypukłych ([35]) uogólnionych pseudoelipsoidach zespolonych. Znając już te wzory zastosujemy je do badania automorfizmów tychże pseudoelipsoid, jak i do rozwiązania problemu biholomorficznej równoważności wypukłych elipsoid zespolonych. Rozwiązanie ostatniego problemu stanowi odpowiedź na pytanie postawione przez autorów w [Jar-Pfl] (§ 8.5) o istnienie dowodu twierdzenia o biholomorficznej równoważności wypukłych elipsoid zespolonych wykorzystującego jedynie postać geodezyjnych zespolonych. Istniejące do tej pory dowody korzystały z teorii Liego (zob. [Naru]) lub teorii jądra Bergmana (zob. np. [Jar-Pfl], § 8.5). Niemniej jednak wspomnijmy już tu, że te dowody wykorzystujące dużo bardziej skomplikowane rezultaty rozwiązują ten problem dla wszystkich elipsoid zespolonych, nie ograniczając się do elipsoid wypukłych, tak jak my to robimy.

Wprowadzeniu pojęcia uogólnionych pseudoelipsoid zespolonych poświęcony jest § 3.1, w którym przedstawiamy również proste własności tych obszarów. Dowód głównego twierdzenia znajduje się w § 3.2. Podkreślmy tutaj, że idea tego dowodu jest właściwie tożsama z dowodem analogicznego twierdzenia dla elipsoid, z tą jednak różnicą, że w pewnych miejscach metody dowodowe są bardziej subtelne.

3.1. PSEUDOELIPSOIDY UOGÓLNIONE — DEFINICJA I WŁASNOŚCI

Poniżej powtórzmy, przeprowadzoną w Rozdziale I, procedurę uogólniania pojęcia elipsoid zespolonych, która doprowadzi nas do pojęcia uogólnionych pseudoelipsoid zespolonych.

Obszarami wyjściowymi są elipsoidy zespolone czyli obszary postaci:

$$\mathcal{E}(p) := \{(z_1,\dots,z_N)\in\mathbb{C}^N : |z_1|^{2p_1}+\dots+|z_N|^{2p_N}<1\},\ p=(p_1,\dots,p_N),\ N>1.$$

Naturalnym jest rozważanie obszarów, w których jednowymiarowe zmienne z_j ze wzorów na elipsoidy zespolone, zastąpione są przez zmiennne wielowymiarowe, obszary te zwane uogólnionymi eliposoidami były rozważane przez wielu autorów (zob. np. [Kod-Kra-Ma], [Dini-Pri]) jako model obszarów słabo pseudowypukłych.

([35]) W takich obszarach na pewno możemy mówić o tym pojęciu (por. Rozdział I).

Dla naszych celów nazwijmy te obszary uogólnionymi pseudoelipsoidami „rzędu 2”:

$$\mathcal{E} := \{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^N : \|z_1\|^{2p_1} + \cdots + \|z_k\|^{2p_k} < 1\},$$
$$z_j \in \mathbb{C}^{n_j},\ N = n_1 + \cdots + n_k\ (k \geq 2).$$

Dla „rzędu 3” definiujemy

$$\mathcal{E} := \{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^N :$$
$$(|z_{1,1}|^{2p_{1,1}} + \cdots + |z_{1,m_1}|^{2p_{1,m_1}})^{p_1} + \cdots + (|z_{k,1}|^{2p_{k,1}} + \cdots + |z_{k,m_k}|^{2p_{k,m_k}})^{p_k} < 1\},$$
$$z_j = (z_{j,1}, \ldots, z_{j,m_j}) \in \mathbb{C}^{m_j},\ N = m_1 + \cdots + m_k.$$

Wreszcie ogólnie

$$\mathcal{E} := \left\{ z : \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{j_2}^{m_{j_1}} \left(\cdots \left(\sum_{j_n=1}^{m_{j_1,\ldots,j_{n-1}}} |z_{j_1,\ldots,j_n}|^2 \right)^{p_{j_1,\ldots,j_{n-1}}} \cdots \right)^{p_{j_1,j_2}} \right)^{p_{j_1}} < 1 \right\},$$

$m_0, m_{j_1,\ldots,j_k} \in \mathbb{N}_*$, $p_{j_1,\ldots,j_k} > 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, $z = (z_1, \ldots, z_{m_0}) \in \mathbb{C}^N$, $z_j = (z_{j,1}, \ldots, z_{j,m_j})$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, $z_{j_1,\ldots,j_{k-1}} = (z_{j_1,\ldots,j_{k-1},1}, \ldots, z_{j_1,\ldots,j_{k-1},m_{j_1,\ldots,j_{k-1}}})$ $(k = 2, \ldots, n)$, $z_{j_1,\ldots,j_n} \in \mathbb{C}$,

$$N = \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{j_2}^{m_{j_1}} \left(\cdots \left(\sum_{j_{n-1}=1}^{m_{j_1,\ldots,j_{n-2}}} m_{j_1,\ldots,j_{n-1}} \right) \cdots \right) \right).$$

Wyżej zdefiniowane obszary $\mathcal{E}$ nazywamy *uogólnionym pseudoelipsoidami zespolonymi.*

Jak widać z definicji, do zdefiniowania uogólnionych pseudoelipsoid zespolonych potrzebujemy układu liczb dodatnich $(p_{j_1,\ldots,j_k})_{1\leq k\leq n-1}$. Jednakże, jak łatwo widać, uogólnione pseudoelipsoidy nie wyznaczają w sposób jednoznaczny owego układu liczb $(p_{j_1,\ldots,j_k})_{1\leq k\leq n-1}$. Dlatego też wszelkie własności pseudooelipsoid zespolonych będą musiały być podawane w następującej formie: *uogólniona pseudoelipsoida zespolona ma własność* (A)*, gdy istnieje układ* $(p_{j_1,\ldots,j_k})_{1\leq k\leq n-1}$ *liczb dodatnich definiujących daną pseudoelipsoidę mających własność* (B).

I tak widać wprost z definicji, że:

pseudoelipsoidy zespolone są pseudowypukłymi zupełnymi obszarami Reinhardta ([36]),

brzeg uogólnionej pseudoeliposidy zespolonej jest klasy C^1 (odp. C^2), gdy istnieje układ definiujący $(p_{j_1,\ldots,j_k})_{1\leq k\leq n-1}$ taki, że $p_{j_1,\ldots,j_{n-1}} \cdots p_{j_1,\ldots,j_k} > 1$ (odp. > 2) dla wszelkich możliwych układów $(j_1, \ldots, j_{n-1})$ i $k = 1, \ldots, n-1$.

([36]) Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *zupełnym obszarem Reinhardta*, gdy $0 \in D$ i dla wszelkich $(z_1, \ldots, z_n) \in D$ oraz dowolnych $\lambda_j \in \bar{E}$, $j = 1, \ldots, n$, mamy $(\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n) \in D$.

W tym miejscu zróbmy następującą dygresję. W przyszłości wszelkie twierdzenia i własności, w których występować będą uogólnione pseudoelipsoidy zespolone będziemy dowodzić jedynie dla następujących obszarów:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} := \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^N : \\ (\|z_{1,1}\|^{2p_{1,1}} + \dots + \|z_{1,m_1}\|^{2p_{1,m_1}})^{p_1} + \dots + \\ (\|z_{m_0,1}\|^{2p_{m_0,1}} + \dots + \|z_{m_0,m_{m_0}}\|^{2p_{m_0,m_{m_0}}})^{p_{m_0}} < 1\}, \\ z_j = (z_{j,1}, \dots, z_{j,m_j}) \in \mathbb{C}^{m_{j,1}} \times \ldots \times \mathbb{C}^{m_{j,m_j}}.\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Czynimy to ze względu na fakt, że dowody wszelkich twierdzeń w ogólnym wypadku nie będą zasadniczo odbiegały od tychże w przypadku (3.1.1), ale zapis ich byłby dużo bardziej skomplikowany i mniej przejrzysty. Dowód wszelkich własności uogólnionych pseudoelipsoid zespolonych oparty jest w przypadku ogólnym na indukcji, w której drugi krok indukcyjny jest identyczny z dowodem pewnej własności dla powyżej zdefiniowanych pseudoelipsoid zespolonych przy założeniu tej samej własności dla pseudoelipsoid „rzędu 2” ([37]).

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku pseudoelipsoid wypukłych, który to warunek będziemy chcieli opisać za pomocą definiującego je układu liczb dodatnich $(p_{j_1,\dots,j_k})_{1\le k\le n-1}$. Dlatego też rozważania nasze zacieśnimy do pseudoelipsoid spełniających warunek:

$$p_{j_1,\dots,j_{n-1}} \cdots p_{j_1,\dots,j_k} \ge \frac{1}{2} \tag{3.1.2}$$

dla $k = 1, \dots, n-1$ i wszelkich możliwych $(j_1, \dots, j_n)$.

Poniżej podajemy lemat pokazujący, że to zawężenie jest zasadne:

Lemat 3.1.1. *Uogólniona pseudoelipsoida $\mathcal{E}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{E}$ może być zdefiniowane za pomocą układu dodatnich liczb $(p_{j_1,\dots,j_k})_{1\le k\le n-1}$ spełniających warunek* (3.1.2).

Dowód. Jak już wyżej wspomnieliśmy dowód lematu przeprowadzimy tylko dla szczególnego przypadku pseudoelipsoid będących postaci (3.1.1). Dla dowodu wypukłości pseudoelipsoid spełniających warunek (3.1.2) wystarczy wykazać, że funkcje zmiennych z_j zdefiniowane poniżej

$$f_j(z_j) := (\|z_{j,1}\|^{2p_{j,1}} + \dots + \|z_{j,m_j}\|^{2p_{j,m_j}})^{p_j}$$

są wypukłe dla $j = 1, \dots, m_0$.

Ustalmy teraz $j \in \{1, \dots, m_0\}$. Zdefiniujmy

$$\tilde{p}_j := \min\{2p_{j,k},\ k = 1, \dots, m_j\} \ge 1.$$

Poniżej korzystając z nierówności trójkąta dla normy euklidesowej $\|\cdot\|$ oraz normy $\|(x_1, \dots, x_{m_j})\|_{\tilde{p}_j} := \left(|x_1|^{\tilde{p}_j} + \ldots + |x_{m_j}|^{\tilde{p}_j}\right)^{\frac{1}{\tilde{p}_j}}$, jak równieżz nierówności $\frac{2p_{j,k}}{\tilde{p}_j}$,

([37]) Dowody wszelkich twierdzeń z tej części pracy w pełnej postaci można znaleźć w [Zwo2].

$p_j\tilde{p}_j \geq 1$ (a dokładnie z faktu, że stosowne funkcje będą wypukłe) otrzymujemy następujący ciąg nierówności ($t \in [0,1]$):

$$
\begin{aligned}
&f_j(tz_j + (1-t)w_j) = \\
&\qquad \left(\sum_{k=1}^{m_j} \| t z_{j,k} + (1-t) w_{j,k} \|^{\frac{2p_{j,k}}{\tilde{p}_j}\tilde{p}_j} \right)^{p_j} \leq \\
&\left(\left(\sum_{k=1}^{m_j} \left(t \| z_{j,k} \|^{\frac{2p_{j,k}}{\tilde{p}_j}} + (1-t) \| w_{j,k} \|^{\frac{2p_{j,k}}{\tilde{p}_j}} \right)^{\tilde{p}_j} \right)^{\frac{1}{\tilde{p}_j}} \right)^{\tilde{p}_j p_j} \leq \\
&\left(t \left(\sum_{k=1}^{m_j} \| z_{j,k} \|^{2p_{j,k}} \right)^{\frac{1}{\tilde{p}_j}} + (1-t) \left(\sum_{k=1}^{m_j} \| w_{j,k} \|^{2p_{j,k}} \right)^{\frac{1}{\tilde{p}_j}} \right)^{\tilde{p}_j p_j} \leq \\
&\qquad t \left(\sum_{k=1}^{m_j} \| z_{j,k} \|^{2p_{j,k}} \right)^{p_j} + (1-t) \left(\sum_{k=1}^{m_j} \| w_{j,k} \|^{2p_{j,k}} \right)^{p_j} = \\
&\qquad\qquad t f_j(z_j) + (1-t) f_j(w_j).
\end{aligned}
$$

Dla dowodu przeciwnej implikacji zauważmy, że gdyby obszaru $\mathcal{E}$ nie dało się zdefiniować za pomocą dodatnich liczb spełniających warunek (3.1.2), to wówczas po przecięciu $\mathcal{E}$ z odpowiednią dwuwymiarową przestrzenią zespoloną (taką, że co najwyżej dwie ustalone współrzędne punktów z tej przestrzeni $z_{j,k,l}$ byłyby różne od 0) otrzymamy zbiór, który jest liniowo izomorficzny ze zbiorem

$$\left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : |\lambda_1|^{2q_1} + |\lambda_2|^{2q_2} < 1 \right\},$$

gdzie q_1 lub q_2 byłoby mniejsze od $\frac{1}{2}$. Jako, że ten zbiór nie jest wypukły otrzymujemy sprzeczność. Kończy to dowód lematu. $\square$

3.2. WZORY NA GEODEZYJNE ZESPOLONE

Jak to już anonsowaliśmy we Wprowadzeniu geodezyjne zespolone w wypukłych pseudoelipsoidach zespolonych będą opisane przez poniżej zdefiniowaną klasę funkcji $\varphi : E \to \mathbb{C}^N$, którą oznaczamy przez (†) ([38]).

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{j_1,\ldots,j_n}(\lambda) := \\
&\left(\frac{\lambda - \alpha_{j_1,\ldots,j_n}}{1 - \bar{\alpha}_{j_1,\ldots,j_n}\lambda} \right)^{s_{j_1,\ldots,j_n}} \prod_{k=1}^{n} \left(a_{j_1,\ldots,j_k} \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_{j_1,\ldots,j_k}\lambda}{1 - \bar{\alpha}_{j_1,\ldots,j_{k-1}}\lambda} \right) \right)^{1/p_{j_1,\ldots,j_k} \cdots p_{j_1,\ldots,j_n}},
\end{aligned}
$$

gdzie

([38]) Przypomnijmy, że dla wygody zapisu przyjmujemy $p_{j_1,\ldots,j_n} := 1$.

(a) $s_{j_1,\dots,j_n} \in \{0,1\}$,
(b) $a_{j_1,\dots,j_k} \in \mathbb{C}_*$,
(c) $\alpha_{j_1,\dots,j_k} \in \bar{E}$,
(d) $\alpha_0 \in E$,
(e) $(s_{j_1,\dots,j_n} = 0) \implies (\exists_{(j_1,\dots,j_k)} : \alpha_{j_1,\dots,j_k} \neq \alpha_0)$,
(f) $(s_{j_1,\dots,j_n} = 1) \implies (\alpha_{j_1,\dots,j_n} \in E)$,
(g) $(|\alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}}| = 1) \implies (\alpha_{j_1,\dots,j_k} = \alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}})$,
(h) $\alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}} = \displaystyle\sum_{j_k=1}^{m_{j_1,\dots,j_{k-1}}} |a_{j_1,\dots,j_k}|^2 \alpha_{j_1,\dots,j_k}$,
(i) $1 + |\alpha_{j_1,\dots,j_{k-1}}|^2 = \displaystyle\sum_{j_k=1}^{m_{j_1,\dots,j_{k-1}}} |a_{j_1,\dots,j_k}|^2 (1 + |\alpha_{j_1,\dots,j_k}|^2)$.

Twierdzenie 3.2.1. *Jeżeli uogólniona pseudoelipsoida $\mathcal{E}$ jest wypukła* ([39]), *to każde odwzorowanie φ postaci (†) jest geodezyjną zespoloną dla $\mathcal{E}$. Na odwrót, jeśli odwzorowanie holomorficzne $\varphi : E \to \mathcal{E}$ jest geodezyjną zespoloną taką, że $\varphi_{j_1,\dots,j_n} \not\equiv 0$ dla wszelkich możliwych $(j_1,\dots,j_n)$, to φ jest postaci (†).*

Dowód Twierdzenia opierać się będzie na poniżej podanym kryterium określającym, kiedy odwzorowanie holomorficzne jest geodezyjną zespoloną. Dla naszej wygody przyjmijmy również następujące oznaczenie:

$$J_{j_1,\dots,j_{k-1}}(z) := \sum_{j_k=1}^{m_{j_1,\dots,j_{k-1}}} \left(\dots \left(\sum_{j_n=1}^{m_{j_1,\dots,j_{n-1}}} |z_{j_1,\dots,j_n}|^2 \right)^{p_{j_1,\dots,j_{n-1}}} \dots \right)^{p_{j_1,\dots,j_k}}, \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Lemat 3.2.2. *Niech $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}^N$ będzie ograniczonym i niestałym odwzorowaniem holomorficznym takim, że $\varphi_{j_1,\dots,j_n} \not\equiv 0$ dla wszelkich możliwych $(j_1,\dots,j_n)$. Wtedy φ jest geodezyjną zespoloną w wypukłej pseudoelipsoidzie $\mathcal{E}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwzorowania $h_{j_1,\dots,j_n} \in H^1$ i $\rho : \partial E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ takie, że*

dla prawie wszystkich $\lambda \in \partial E$ zachodzi

$$\frac{1}{\lambda} h^*_{j_1,\dots,j_n}(\lambda) = \rho(\lambda) \left(\prod_{k=2}^{n} p_{j_1,\dots,j_{k-1}} \left(J_{j_1,\dots,j_{k-1}}(\varphi^*(\lambda)) \right)^{p_{j_1,\dots,j_{k-1}}-1} \right) \overline{\varphi^*_{j_1,\dots,j_n}(\lambda)} \tag{3.2.1}$$

$$\text{oraz } J_0(\varphi^*(\lambda)) = 1 \text{ prawie wszędzie na } \partial E, \tag{3.2.2}$$

gdzie iloczyn w (3.2.1) *równa się* 1, *gdy $n = 1$.*

W powyższym wzorze H^1 oznacza przestrzeń Hardy'ego, a $\varphi^*_{j_1,\dots,j_n}$ i $h^*_{j_1,\dots,j_n}$ oznaczają wartości radialne funkcji ([40]).

([39]) Na mocy Lematu 3.1.1 możemy założyć, że jest ona zdefiniowana za pomocą liczb $(p_{j_1,\dots,j_k})_{1\le k\le n-1}$ spełniających warunek (3.1.2).
([40]) Definicja przestrzeni Hardy'ego podana była w § 2.2.

Dowód Lematu 3.2.2. Zauważmy, że jednostkowy wektor zewnętrzny $\nu(z) \in \mathbb{C}^N$ do $\partial\mathcal{E}$ w punkcie $z \in \partial\mathcal{E} \cap (\mathbb{C}_*)^N$ jest dany wzorem

$$\nu_{j_1,\dots,j_n}(z) = \tilde{\rho}(z)\left(\prod_{k=2}^{n} p_{j_1,\dots,j_{k-1}}\left(J_{j_1,\dots,j_{k-1}}(z)\right)^{p_{j_1,\dots,j_{k-1}}-1}\right) z_{j_1,\dots,j_n},$$

gdzie iloczyn równy jest 1, gdy $n = 1$ i $\tilde{\rho}(z) > 0$. Stosując teraz wyniki z [Jar-Pfl] (§ 8.2. – § 8.3) kończymy dowód Lematu 3.2.2 (identycznie jak dowód Corollary 8.4.5 w [Jar-Pfl]). □

Dowód Twierdzenia 3.2.1. Wpierw dowiedziemy prostszej implikacji; mianowicie sprawdzimy, że funkcje opisane warunkiem (†) spełniają warunki Lematu 3.2.2, a zatem są rzeczywiście geodezyjnymi zespolonymi.

Połóżmy mianowicie dla wszelkich możliwych (j, k, l) przy $\lambda \in E$:

$$h_{j,k,l}(\lambda) := \frac{(1 - \overline{\alpha_{j,k,l}}\lambda)(\lambda - \alpha_{j,k,l})p_{j,k}p_j|a_{j,k,l}|^2|a_{j,k}|^2|a_j|^2}{\varphi_{j,k,l}(\lambda)},$$

oraz zdefiniujmy

$$\rho(\lambda) := |1 - \alpha_0\lambda|^2 \text{ dla } \lambda \in \partial E.$$

Na mocy Lematu 3.2.2 dla dowodu implikacji wystarczy sprawdzić następujące dwie równości dla $\lambda \in \partial E$:

$$\frac{1}{\lambda}h^*_{j,k,l}(\lambda) = \rho(\lambda)p_j\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j-1} p_{j,k}\|\varphi_{j,k}(\lambda)\|^{2(p_{j,k}-1)}\overline{\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)}, \tag{3.2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{m_0}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j} = 1. \tag{3.2.4}$$

Zauważmy, że dla $\lambda \in \partial E$ ([41])

$$\|\varphi_{j,k}(\lambda)\|^2 = \sum_{l=1}^{m_{j,k}}|\varphi_{j,k,l}(\lambda)|^2 =$$

$$\left|a_j\frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda}\right|^{\frac{2}{p_jp_{j,k}}}\left|a_{j,k}\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_j\lambda}\right|^{\frac{2}{p_{j,k}}}\sum_{l=1}^{m_{j,k}}\left|a_{j,k,l}\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}\right|^2 =$$

$$\left|a_j\frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda}\right|^{\frac{2}{p_jp_{j,k}}}\left|a_{j,k}\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_j\lambda}\right|^{\frac{2}{p_{j,k}}},$$

([41]) Teraz, jak i często później będziemy korzystać z następującej elementarnej własności: jeśli $\beta_0 = \sum_{j=1}^m |b_j|^2\beta_j$ i $1 + |\beta_0|^2 = \sum_{j=1}^m |b_j|^2(1 + |\beta_j|^2)$, gdzie $\beta_j \in \bar{E}$, $j = 1, \dots, m$ i równość $|\beta_0| = 1$ implikuje $\beta_j = \beta_0$ dla wszelkich j, to wtedy $\sum_{j=1}^m \left|b_j\frac{1-\bar{\beta}_j\lambda}{1-\bar{\beta}_0\lambda}\right|^2 = 1$ dla $\lambda \in \partial E$ (por. warunki (g), (h) i (i) z definicji własności (†)).

zatem

$$\sum_{k=1}^{m_j} ||\varphi_{j,k}(\lambda)||^{2p_{j,k}} = \left| a_j \frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda} \right|^{\frac{2}{p_j}}$$

i w konsekwencji:

$$\sum_{j=1}^{m_0} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \|\varphi_{j,k,l}(\lambda)\|^{2p_{j,k}} \right)^{p_j} = 1.$$

Został nam jedynie do sprawdzenia warunek (3.2.3), wystarczy zatem dowieść, że dla $\lambda \in \partial E$:

$$\frac{1}{\lambda}(1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda)(\lambda-\alpha_{j,k,l})p_{j,k}p_j|a_{j,k,l}|^2|a_{j,k}|^2|a_j|^2 =$$

$$|1-\alpha_0\lambda|^2 p_j \left| a_j \frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda} \right|^{\frac{2(p_j-1)}{p_j}} p_{j,k} \left| a_j \frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda} \right|^{\frac{2(p_{j,k}-1)}{p_j p_{j,k}}} \left| a_{j,k} \frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_j\lambda} \right|^{\frac{2(p_{j,k}-1)}{p_{j,k}}} \cdot$$

$$\left| a_j \frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda} \right|^{\frac{2}{p_{j,k}p_j}} \left| a_{j,k} \frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_j\lambda} \right|^{\frac{2}{p_{j,k}}} \left| a_{j,k,l} \frac{1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda} \right|^2,$$

co widać po prostych przekształceniach.

Żeby dowieść drugiej implikacji weźmy odwzorowania $h_{j,k,l}$ takie jak w Lemacie 3.2.2. Na mocy [Gen] ([42]) otrzymujemy, że dla $\lambda \in E$:

$$\varphi_{j,k,l}(\lambda)h_{j,k,l}(\lambda) = r_{j,k,l}(\lambda-\alpha_{j,k,l})(1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda), \tag{3.2.5}$$

$$\sum_{l=1}^{m_{j,k}} \varphi_{j,k,l}(\lambda)h_{j,k,l}(\lambda) = r_{j,k}(\lambda-\alpha_{j,k})(1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda), \tag{3.2.6}$$

$$\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{l=1}^{m_{j,k}} \varphi_{j,k,l}(\lambda)h_{j,k,l}(\lambda) = r_j(\lambda-\alpha_j)(1-\bar{\alpha}_j\lambda), \tag{3.2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{m_0}\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{l=1}^{m_{j,k}} \varphi_{j,k,l}(\lambda)h_{j,k,l}(\lambda) = r_0(\lambda-\alpha_0)(1-\bar{\alpha}_0\lambda), \tag{3.2.8}$$

gdzie

$$r_{j,k,l}; r_{j,k}; r_j; r_0 > 0 \text{ oraz } \alpha_{j,k,l}; \alpha_{j,k}; \alpha_j; \alpha_0 \in \bar{E};$$

jeśli $\varphi_{j,k,l}$ ma zero w E, to $s_{j,k,l} := 1$, w przeciwnym razie $s_{j,k,l} := 0$.

([42]) **Twierdzenie** ([Gen]). Załóżmy, że funkcja $f \in H^1$ spełnia warunek $\frac{1}{\lambda}f^*(\lambda) > 0$ dla prawie wszystkich $\lambda \in \partial E$. Wtedy istnieje $r > 0$ i $\alpha \in \bar{E}$ takie, że $f(\lambda) = r(\lambda-\alpha)(1-\bar{\alpha}\lambda)$ dla $\lambda \in E$.

Widzimy, że jeśli $s_{j,k,l} = 1$, to wtedy $\alpha_{j,k,l} \in E$.

Z własności (3.2.5)–(3.2.8) otrzymujemy w szczególności:

$$r_0\alpha_0 = \sum_{j=1}^{m_0} r_j\alpha_j; \qquad r_0(1+|\alpha_0|^2) = \sum_{j=1}^{m_0} r_j(1+|\alpha_j|^2), \tag{3.2.9}$$

$$r_j\alpha_j = \sum_{k=1}^{m_j} r_{j,k}\alpha_{j,k}; \qquad r_j(1+|\alpha_j|^2) = \sum_{k=1}^{m_j} r_{j,k}(1+|\alpha_{j,k}|^2), \tag{3.2.10}$$

$$r_{j,k}\alpha_{j,k} = \sum_{l=1}^{m_{j,k}} r_{j,k,l}\alpha_{j,k,l}; \; r_{j,k}(1+|\alpha_{j,k}|^2) = \sum_{l=1}^{m_{j,k}} r_{j,k,l}(1+|\alpha_{j,k,l}|^2), \tag{3.2.11}$$

dla wszelkich możliwych j, k, l.

Z warunków (3.2.9)–(3.2.11) wnioskujemy, że dla $\lambda \in \partial E$

$$\sum_{j=1}^{m_0} \frac{r_j}{r_0} \left|\frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda}\right|^2 = 1, \tag{3.2.12}$$

$$\sum_{k=1}^{m_j} \frac{r_{j,k}}{r_j} \left|\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_j\lambda}\right|^2 = 1, \tag{3.2.13}$$

$$\sum_{l=1}^{m_{j,k}} \frac{r_{j,k.l}}{r_{j,k}} \left|\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}\right|^2 = 1. \tag{3.2.14}$$

Z powyższych warunków dostajemy w szczególności:

$$\text{jeśli } |\alpha_0| = 1 \text{ (odp. } |\alpha_j| = 1,\ |\alpha_{j,k}| = 1), \\ \text{to } \alpha_j = \alpha_0 \text{ (odp. } \alpha_{j,k} = \alpha_j,\ \alpha_{j,k,l} = \alpha_{j,k} \text{ dla wszelkich możliwych } j,k,l), \tag{3.2.15}$$

$$\text{zatem jeśli } |\alpha_0| = 1, \text{ wtedy } \alpha_{j,k,l} = \alpha_{j,k} = \alpha_j = \alpha_0 \\ \text{dla wszelkich możliwych } j,k,l. \tag{3.2.16}$$

Na mocy wzoru (3.2.5) i Lematu 3.2.2 otrzymujemy prawie wszędzie na ∂E następującą równość.

$$\rho(\lambda)p_j\left(\sum_{k=1}^{m_j} \|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j-1} p_{j,k}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2(p_{j,k}-1)}|\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)|^2 = \\ \frac{1}{\lambda}h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda) = |h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)| = r_{j,k,l}|1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2 \tag{3.2.17}$$

dla wszelkich możliwych j, k, l.

Sumując lewą stronę równości (3.2.17) względem l (przy ustalonych j i k) otrzymamy prawie wszędzie na ∂E (korzystamy również z równości (3.2.6))

$$\rho(\lambda)p_j\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j-1}p_{j,k}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}=$$
$$\frac{1}{\lambda}\sum_{l=1}^{m_{j,k}}h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)=\left|\sum_{l=1}^{m_{j,k}}h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)\right|=r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2 \quad (3.2.18)$$

dla wszelkich możliwych j,k.

Używając powtórnie tej samej procedury, sumując tym razem względem k (przy j ustalonym), otrzymujemy prawie wszędzie na ∂E następujące nierówności (korzystamy również z (3.2.7)):

$$\rho(\lambda)\left(\min_{k=1,\dots,m_j}\{p_{j,k}\}\right)p_j\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)\leq$$
$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{l=1}^{m_{j,k}}h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)=\left|\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{l=1}^{m_{j,k}}h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)\right|=$$
$$r_j|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2\leq\rho(\lambda)\left(\max_{k=1,\dots,m_j}\{p_{j,k}\}\right)p_j\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right) \quad (3.2.19)$$

dla wszelkich możliwych j.

I w końcu postępując jak poprzednio i sumując wyrażenia w ostatnich nierównościach względem j otrzymamy (uwzględniając również własności (3.2.4) i (3.2.8)):

$$\rho(\lambda)\left(\min_{j,k}\{p_{j,k}p_j\}\right)=\rho(\lambda)\left(\min_{k,j}\{p_{j,k}p_j\}\right)\sum_{j=1}^{m_0}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j}\leq$$
$$\left|\sum_{j=1}^{m_0}\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{l=1}^{m_{j,k}}h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)\right|=r_0|1-\bar{\alpha}_0\lambda|^2\leq$$
$$\rho(\lambda)\left(\max_{k,j}\{p_{j,k}p_j\}\right)\sum_{j=1}^{m_0}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j}=\rho(\lambda)\left(\max_{j,k}\{p_{j,k}p_j\}\right). \quad (3.2.20)$$

Na mocy (3.2.17) otrzymujemy dla prawie wszystkich $\lambda\in\partial E$

$$|\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)|^2=\frac{r_{j,k,l}|1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2}{\rho(\lambda)p_j\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j-1}p_{j,k}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2(p_{j,k}-1)}}. \quad (3.2.21)$$

Z kolei wykorzystując wzór (3.2.18) otrzymujemy z (3.2.21) dla prawie wszystkich $\lambda \in \partial E$:

$$|\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)|^2 = \frac{r_{j,k,l}|1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2}{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2}\left(\frac{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2}{\rho(\lambda)p_j p_{j,k}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j-1}}\right)^{\frac{1}{p_{j,k}}}. \quad (3.2.22)$$

Konsekwentnie, na mocy (3.2.19) otrzymujemy z (3.2.22) dla prawie wszystkich $\lambda \in \partial E$

$$|\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)|^2 \geq \frac{r_{j,k,l}|1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2}{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2}\left(\frac{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2\mathcal{M}_j}{r_j p_{j,k}|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2}\right)^{\frac{1}{p_{j,k}}}\left(\frac{r_j|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2}{p_j\rho(\lambda)\mathcal{M}_j}\right)^{\frac{1}{p_{j,k}p_j}}, \quad (3.2.23)$$

gdzie

$$\mathcal{M}_j := \begin{cases} \max_{k=1,\dots,m_j}\{p_{j,k}\}, & \text{jeśli } p_j < 1 \\ \min_{k=1,\dots,m_j}\{p_{j,k}\}, & \text{jeśli } p_j \geq 1 \end{cases}.$$

I ostatecznie na mocy (3.2.20) otrzymamy z (3.2.23) prawie wszędzie na ∂E

$$|\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)|^2 \geq \frac{r_{j,k,l}|1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2}{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2}\left(\frac{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2\mathcal{M}_j}{r_j p_{j,k}|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2}\right)^{\frac{1}{p_{j,k}}}\left(\frac{r_j|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2\mathcal{M}}{r_0 p_j|1-\bar{\alpha}_0\lambda|^2\mathcal{M}_j}\right)^{\frac{1}{p_{j,k}p_j}}, \quad (3.2.24)$$

gdzie

$$\mathcal{M} := \min_{j,k}\{p_{j,k}p_j\}.$$

Funkcje $\varphi_{j,k,l}$ możemy ograniczyć podobnie jak we wzorach (3.2.23) i (3.2.24) z góry z tym, że będziemy musieli odpowiednio zmienić definicje $\mathcal{M}_j$ i $\mathcal{M}$ (w miejsce minimum wstawiamy maksimum i na odwrót).

Z (3.2.17) i (3.2.24) otrzymujemy, że:

$$|h^*_{j,k,l}(\lambda)| \leq \frac{C|1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2}{\left|\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}\right|\left|\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_j\lambda}\right|^{\frac{1}{p_{j,k}}}\left|\frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda}\right|^{\frac{1}{p_{j,k}p_j}}}.$$

Jeśli wszystkie α są z E, to $h_{j,k,l} \in H^\infty$. Jeśli z kolei, któreś z α jest na moduł równe 1, to wówczas funkcja $h_{j,k,l}$ jest również ograniczona na mocy własności (3.2.15) oraz (3.1.2).

Zauważmy, że gdy przy ustalonym j wartość wszystkich $p_{j,k}$ jest taka sama niezależnie od k, to wówczas w (3.2.23) zachodzi równość, jeśli dodatkowo wszelkie p_j są takie same, to wówczas również w (3.2.24) zachodzi równość.

Rozpatrzmy teraz szczególny przypadek

$$\tilde{p}_1 = p_j, \quad \tilde{p}_2 = p_{j,k} \text{ dla wszelkich } j, k$$

Wtedy na mocy (3.2.24) (pamiętajmy, że w tym przypadku mamy tam równość) zachodzi prawie wszędzie na ∂E

$$|\varphi_{j,k,l}^*(\lambda)|^2 = \frac{r_{j,k,l}|1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2}{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2} \left(\frac{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2}{r_j|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2} \right)^{\frac{1}{p_{j,k}}} \left(\frac{r_j|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2}{r_0|1-\bar{\alpha}_0\lambda|^2} \right)^{\frac{1}{p_{j,k}p_j}}.$$

Ponieważ

$$r_{j,k,l}(1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda)^2 \left(r_{j,k}(1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda)^2 \right)^{\frac{1}{p_{j,k}}} \left(r_j(1-\bar{\alpha}_j\lambda)^2 \right)^{\frac{1}{p_{j,k}p_j}}$$

jest funkcją zewnętrzną ([43]), a więc na mocy twierdzenia o rozkładzie (zob. np. [Dur] § 2.4 ([44])), otrzymujemy dla $\lambda \in E$

$$\varphi_{j,k,l}(\lambda) = B_{j,k,l}(\lambda) \left(a_{j,k,l} \frac{1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda} \right) \left(a_{j,k} \frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_j\lambda} \right)^{\frac{1}{p_{j,k}}} \left(a_j \frac{1-\bar{\alpha}_j\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda} \right)^{\frac{1}{p_{j,k}p_j}} S_{j,k,l}(\lambda), \tag{3.2.25}$$

gdzie

$$|a_{j,k,l}| = \left(\frac{r_{j,k,l}}{r_{j,k}} \right)^{\frac{1}{2}}, \ |a_{j,k}| = \left(\frac{r_{j,k}}{r_j} \right)^{\frac{1}{2}}, \ |a_j| = \left(\frac{r_j}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$B_{j,k,l}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda-\alpha_{j,k,l}}{1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda} & \text{jeśli } s_{j,k,l} = 1 \\ 1 & \text{jeśli } s_{j,k,l} = 0 \end{cases},$$

$$S_{j,k,l}(\lambda) = \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+\lambda}{e^{i\theta}-\lambda} d\sigma_{j,k,l}(\theta) \right),$$

([43]) Wiadomo, że jeśli $f \in H^p$ $(p > 0)$ oraz $\frac{1}{f} \in H^r$ dla pewnego $r > 0$, to f jest funkcją zewnętrzną (zob. [Gar], § 2.4).

([44]) **Twierdzenie.** Niech $h \in H^p(E)$, gdzie $0 < p < \infty$, $h \not\equiv 0$. Wtedy

$$h = c \cdot B \cdot S \cdot Q,$$

gdzie $|c| = 1$, B jest iloczynem Blaschkego funkcji h,

$$S(\lambda) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+\lambda}{e^{i\theta}-\lambda} d\sigma(\theta) \right), \quad \lambda \in E$$

(σ jest nieujemną miarą borelowską, osobliwą względem miary Lebesgue'a) oraz

$$Q(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+\lambda}{e^{i\theta}-\lambda} \ln|h^*(e^{i\theta})| d\theta \right), \quad \lambda \in E.$$

Co więcej, $S^*(\lambda) = 0$ dla σ-prawie wszystkich $\lambda \in \partial E$ oraz powyższy rozkład jest, w oczywistym znaczeniu, jednoznaczny.

gdzie $\sigma_{j,k,l}$ jest osobliwą, nieujemną miarą borelowską.

Dla zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że $\sigma_{j,k,l} = 0$, ponieważ wtedy: na mocy (3.2.16) mamy $\alpha_0 \in E$ (por. własność (d) z definicji (†)). Co więcej (3.2.9)–(3.2.11) oraz (3.2.15) dają nam własności (g), (h) i (i) z definicji (†).

Żeby dowieść, że $\sigma_{j,k,l} = 0$ zauważmy, że na mocy (3.2.5), (3.2.25) i faktu, że $h_{j,k,l} \in H^\infty$ otrzymujemy

$$|S_{j,k,l}(\lambda)| \geq \frac{\varepsilon|\lambda - \alpha_{j,k,l}||1 - \bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda|^2}{\left|\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}\right| \left|\frac{1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{j}\lambda}\right|^{\frac{1}{p_{j,k}}} \left|\frac{1-\bar{\alpha}_{j}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{0}\lambda}\right|^{\frac{1}{p_{j,k}p_j}}}$$

dla $\lambda \in E$ i pewnego $\varepsilon > 0$.

Ale wiemy, że

$$S^*_{j,k,l}(\lambda) = 0 \text{ dla } \sigma_{j,k,l}\text{−prawie wszystkich } \lambda \in \partial E.$$

Z tych dwóch warunków razem z (3.2.15) otrzymujemy, na mocy nieograniczoności funkcji

$$E \ni \lambda \longrightarrow |\lambda - 1|^\beta \exp\left(b\frac{1 - |\lambda|^2}{|\lambda - 1|^2}\right), \beta \in \mathbb{R}, b > 0,$$

że $\sigma_{j,k,l} = 0$.

Kończy to dowód twierdzenia w tym szczególnym przypadku.

Przejdźmy teraz do sytuacji bardziej skomplikowanej, która choć nie jest jeszcze przypadkiem najbardziej ogólnym, to jednak pokazuje, jak sprowadzamy przypadek trudniejszy do rozpatrywania sytuacji o jeden „stopień" łatwiejszej. Zakładamy mianowicie, że:

$$p_{j,k} = \tilde{q} \text{ dla wszelkich możliwych } j \text{ i } k.$$

Widzimy, że zakładamy mniej, niż w poprzednim przypadku. Mianowicie liczby p_j mogą być różne. Na mocy wzoru (3.2.23) (pamiętamy, że w tym przypadku zachodzi w tym wzorze równość) dostajemy, że

$$\varphi_{j,k,l}(\lambda) = \\ B_{j,k,l}(\lambda)\left(\frac{r_{j,k,l}(1 - \bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda)^2}{r_{j,k}(1 - \bar{\alpha}_{j,k}\lambda)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r_{j,k}(1 - \bar{\alpha}_{j,k}\lambda)^2}{r_j(1 - \bar{\alpha}_j\lambda)^2}\right)^{\frac{1}{2p_{j,k}}} \psi_{j,k,l}(\lambda), \quad (3.2.26)$$

dla $\lambda \in E$, gdzie współczynniki r i α są wybrane tak, jak w (3.2.5) – (3.2.8) i $B_{j,k,l}$ jest iloczynem Blaschkego funkcji $\varphi_{j,k,l}$.

Na mocy (3.2.23) jasnym jest, że $|\psi^*_{j,k,l}(\lambda)|$ nie zależy od wyboru k i l na ∂E prawie wszędzie (przy ustalonym j). Z kolei na mocy (3.2.20)

$$\psi_{j,k,l} \in H^\infty. \quad (3.2.27)$$

Połóżmy:

$$\tilde{p} := \max_{j=1,\dots,m_0} \{p_j\}.$$

Zdefiniujmy również dla $\lambda \in E$

$$\tilde{\varphi}_{j,k,l}(\lambda) :=$$
$$B_{j,k,l}(\lambda) \left(\frac{r_{j,k,l}(1-\bar{\alpha}_{j,k,l}\lambda)^2}{r_{j,k}(1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r_{j,k}(1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda)^2}{r_j(1-\bar{\alpha}_j\lambda)^2} \right)^{\frac{1}{2p_{j,k}}} \psi_{j,k,l}(\lambda)^{\frac{p_j}{\tilde{p}}}, \quad (3.2.28)$$

oraz

$$\tilde{h}_{j,k,l} := \frac{\tilde{p}}{p_j} h_{j,k,l} \frac{\varphi_{j,k,l}}{\tilde{\varphi}_{j,k,l}} = \frac{\tilde{p}}{p_j} h_{j,k,l} \psi_j^{1-\frac{p_j}{\tilde{p}}} \quad (3.2.29)$$

gdzie $h_{j,k,l}$ wybrane jest z Lematu 3.2.2 tak jak wcześniej.

Idea wprowadzenia nowych funkcji $\tilde{\varphi}_{j,k,l}$ jest taka, żeby funkcja, której składowymi są właśnie one była geodezyjną zespoloną w pseudoelipsoidzie, w której zamiast współczynników p_j będziemy mieli zawsze to samo $\tilde{p}$. Konsekwentnie będzie to pseudoelipsoida postaci rozpatrywanej w poprzednim przypadku, a zatem $\tilde{\varphi}_{j,k,l}$ będzie mieć pewną konkretną postać, z której uzyskamy „dobrą” postać dla $\varphi_{j,k,l}$.

Zauważmy, że z powodu (3.2.27) $\tilde{h}_{j,k,l} \in H^1(E)$ (a nawet więcej, funkcja ta należy do H^∞, zob. (3.2.24)).

Dla dowodu faktu, że funkcja $\tilde{\varphi} := (\varphi_{j,k,l})_{j,k,l}$ jest geodezyjną zespoloną wykorzystujemy Lemat 3.2.2. Biorąc funkcje $\tilde{h}_{j,k,l}$ zdefiniowane powyżej wystarczy sprawdzić, że dla prawie wszystkich $\lambda \in \partial E$

$$\frac{1}{\lambda}\tilde{h}^*_{j,k,l}(\lambda)\tilde{\varphi}^*_{j,k,l}(\lambda) =$$
$$\rho(\lambda)\tilde{p}\left(\sum_{k=1}^{m_j} \|\tilde{\varphi}^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{\tilde{p}-1} p_{j,k}\|\tilde{\varphi}^*_{j,k}(\lambda)\|^{2(p_{j,k}-1)}|\tilde{\varphi}^*_{j,k,l}(\lambda)|^2, \quad (3.2.30)$$

$$\sum_{j=1}^{m_0}\left(\sum_{k=1}^{m_j} \|\tilde{\varphi}^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{\tilde{p}} = 1. \quad (3.2.31)$$

Lewa strona pierwszej z powyższych równości równa jest

$$\frac{\tilde{p}}{p_j}\frac{1}{\lambda}h^*_{j,k,l}(\lambda)\varphi^*_{j,k,l}(\lambda),$$

co na mocy Lematu 3.2.2 (zastosowanego do wyjściowej pseudoelipsoidy i geodezyjnej φ) równe jest

$$\tilde{p}\rho(\lambda)\left(\sum_{k=1}^{m_j} \|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}}\right)^{p_j-1} p_{j,k}\|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2(p_{j,k}-1)}|\varphi^*_{j,k,l}(\lambda)|^2.$$

Zauważmy, że (korzystamy ze wzorów (3.2.26) i (3.2.13) i (3.2.14)) dla $\lambda \in \partial E$

$$\begin{aligned} \|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^2 &= |\psi_{j,k,l}|^2 \left(\frac{r_{j,k}|1-\bar{\alpha}_{j,k}\lambda|^2}{r_j|1-\bar{\alpha}_j\lambda|^2} \right)^{\frac{1}{p_{j,k}}} \\ \sum_{k=1}^{m_j} \|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}} &= |\psi_{j,k,l}|^{2p_{j,k}} \\ \sum_{j=1}^{m_0} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \|\varphi^*_{j,k}(\lambda)\|^{2p_{j,k}} \right)^{p_j} &= \sum_{j=1}^{m_0} \left(|\psi_{j,k,l}(\lambda)|^{2p_{j,k}} \right)^{p_j}, \end{aligned}$$

gdzie (dla ustalonego j) funkcja $\psi_{j,k,l}$ wybrana jest dowolnie (przypomnijmy, że nie zależy ona od k,l na ∂E). Co więcej, wzory na analogiczne wyrażenia dla funkcji $\tilde{\varphi}_{j,k}$ będą identyczne jak powyżej z tym, że zamiast p_j będziemy mieli zawsze $\tilde{p}$, a zamiast $\psi_{j,k,l}$ funkcję $\psi_{j,k,l}^{\frac{p_j}{\tilde{p}}}$. Zatem widać, że na mocy Lematu 3.2.2 zastosowanego do φ zachodzi (3.2.31). Dla wykazania (3.2.30) wystarczy tylko sprawdzić, że potęgi przy $|\psi_{j,k,l}|$ są równe w przypadku rozpatrywania funkcji $\varphi_{j,k,l}$ jak i $\tilde{\varphi}_{j,k,l}$, co sprowadza się do sprawdzenia oczywistej równości

$$\frac{p_j}{\tilde{p}} 2p_{j,k}(\tilde{p}-1) + \frac{p_j}{\tilde{p}} 2(p_{j,k}-1) + 2\frac{p_j}{\tilde{p}} = 2p_{j,k}(p_j-1) + 2(p_{j,k}-1) + 2.$$

W przypadku ogólnym postępujemy analogicznie jak powyżej. To znaczy przenosimy (transportujemy) funkcje $\varphi_{j,k,l}$ do pseudoelipsoidy takiej, że wszystkie współczynniki $p_{j,k}$ są sobie równe (mianowicie definiujemy $\tilde{p}_2 := \max_{j,k}\{p_{j,k}\}$). Zatem mamy nowe pseudoelipsoidy, które mają własności tak, jak te rozpatrywane powyżej, sprawdzamy, że te przetransportowane funkcje tworzą geodezyjną zespoloną. Mając daną postać geodezyjnych w tym przypadku i powracając do wyjściowego przypadku otrzymujemy żądaną postać. Kończy to dowód twierdzenia. $\square$

Uwaga 3.2.3. Jeśli φ jest geodezyjną zespoloną i $\varphi_{j,k,l} \equiv 0$ dla pewnego (j,k,l), to odwzorowanie $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{C}^{N-1}$ zdefiniowane w ten sposób, że wszystkie składowe (j,k,l) odwzorowania $\tilde{\varphi}$ są składowymi φ i ta wyróżniona składowa jest „usunięta", jest geodezyjną zespoloną w pewnej pseudoelipsoidzie w $\mathbb{C}^{N-1}$, która jest oczywiście wypukła, gdy $\mathcal{E}$ jest wypukłe.

Uwaga 3.2.4. W przypadku $n = 2$, $m_j = 1$ dla $j = 1, \dots, m_0$, Twierdzenie 3.2.1 zostało udowodnione w [Jar-Pfl-Zei] (zob. również [Jar-Pfl], Proposition 8.4.2). Nawet więcej, w tym przypadku autorzy otrzymali jednoznaczność geodezyjnych zespolonych (z dokładnością do automorfizmów E); w przypadku ściśle wypukłych obszarów ograniczonych jednoznaczność jest własnością znaną (zob. [Dine], § 6.2), a elipsoidy zespolone są obszarami wypukłymi, a nie ściśle wypukłymi, gdy $p_j \geq \frac{1}{2}$ dla $j = 1, \dots, m_0$ i $\#\{j : p_j = \frac{1}{2}\} > 1$.

Uwaga 3.2.5. Wzory z Twierdzenia 3.2.1 pokazują, że geodezyjne zespolone rozszerzają się w sposób ciągły na brzeg. W wielu przypadkach wprost ze wzorów można się dowiedzieć dużo więcej o regularności tych rozszerzeń. Co więcej, widać również, że holomorficzność w otoczeniu $\bar{E}$ wszystkich rozszerzeń geodezyjnch zespolonych jest raczej rzadkim zjawiskiem. Dzieje się tak na przykład, gdy wszystkie iloczyny ze wzoru (3.1.2) są równe 1 lub $\frac{1}{2}$ (zob. również dowód Propozycji 3.3.1).

Uwaga 3.2.6. Z Twierdzenia 3.2.1 wynika, że gdy $|\alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}| = 1$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, n-1\}$, to $\alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k},j_{k+1},\dots,j_l} = \alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}$ dla $l > k$.

3.3. AUTOMORFIZMY HOLOMORFICZNE WYPUKŁYCH UOGÓLNIONYCH PSEUDOELIPSOID ZESPOLONYCH

W tej części pracy zajmiemy się problemem opisu automorfizmów holomorficznych obszarów wspomnianych w tytule.

Zanim sformułujemy główny wynik tego rozdziału przeformułujmy trochę nasze pseudoelipsoidy (co w żaden sposób nie umniejszy ogólności naszych rozważań) tak, by część „najbardziej regularna” była w pewien sposób wyróżniona i żeby znalazła się ona „na końcu”. Mianowicie przyjmijmy, że

$$\mathcal{E} := \left\{ \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\dots \left(\sum_{j_n=1}^{m_{j_1,\dots,j_{n-1}}} |z_{j_1,\dots,j_n}|^2 \right)^{p_{j_1,\dots,j_{n-1}}} \dots \right)^{p_{j_1}} + |z_{m_0+1}|^2 + \dots + |z_{m_0+r}|^2 < 1 \right\},$$

gdzie r jest największą możliwą liczbą postaci takiej jak powyżej. Bez straty ogólności możemy założyć, że jeśli $r = 0$, to wtedy $m_0 > 1$.

Przyjmijmy również, że $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}^N$, gdzie $N = N_1 + r$.

Propozycja 3.3.1. *Niech D będzie wypukłym, ograniczonym zupełnym obszarem Reinhardta. Niech $\Phi : D \longrightarrow \mathcal{E}$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym. Załóżmy, że współczynniki p z definicji $\mathcal{E}$ spełniają dodatkowo następujące warunki*

$$p_{j_1,\dots,j_n} \dots p_{j_1,\dots,j_k} > \frac{1}{2} \text{ dla dowolnych } (j_1, \dots, j_n) \text{ i } k = 1, \dots, n. \tag{3.3.1}$$

Jeśli założymy, że $\Phi(0) = b$,

$$\text{gdzie } b_{m_0+1} = \dots = b_{m_0+r} = 0, \tag{3.3.2}$$

to wtedy $b = 0$.

Dla dowodu powyższej propozycji potrzebujemy lematu będącego prostą konsekwencją Twierdzenia 3.2.1.

Lemat 3.3.2. *Niech φ i $\mathcal{E}$ będą takie, jak w Twierdzeniu 3.2.1. Ustalmy pewien wskaźnik $(\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_k)$, gdzie $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Wtedy*

$$\textit{jeśli } \alpha_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_k, j_{k+1}} = 1 \textit{ dla } j_{k+1} = 1, \dots, m_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_k}, \textit{ to wówczas } \alpha_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_k} = 1.$$

Dowód Propozycji 3.3.1. Ograniczmy naszą uwagę do przypadku $\dim \mathcal{E} > 1$. Wiadomo, że Φ rozszerza się do biholomorfizmu między otoczeniami $\bar{D}$ i $\bar{\mathcal{E}}$ (zob. [Bell], również [Jar-Pfl], Theorem 6.1.10 ([45])).

Przypuśćmy, że $b \neq 0$. Wtedy mamy naturalnie $N_1 > 0$. Innymi słowy istnieje wskaźnik $(\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_n)$ taki, że

$$b_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_n} \neq 0. \tag{3.3.3}$$

Zmieniając jeśli potrzeba p z definicji $\mathcal{E}$, ale w ten sposób, żeby nowe p definiowały tę samą pseudoelipsoidę $\mathcal{E}$ i spełniały dalej warunek (3.3.1), możemy założyć, że istnieją $k \in \{1, \dots, n-1\}$ i $(\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_n)$ takie, że

$$p_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_n} \dots p_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_k} \neq 1 \text{ i jeśli } k \geq 2, \text{ to wtedy} \tag{3.3.4}$$
$$p_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_n} \dots p_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_{k-1}} = \dots = p_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_n} \dots p_{\overset{o}{j}_1} = 1 \text{ i } m_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_{k-1}} > 1.$$

Dla punktu $z \in \partial D$ zdefiniujmy odwzorowanie

$$\varphi_z : E \ni \lambda \longrightarrow \lambda z \in D,$$

które jest geodezyjną w D (zob. np. [Jar-Pfl], Proposition 2.2.1).

Na mocy (3.3.4) istnieje punkt $w \in \partial \mathcal{E}$ taki, że

$$w_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_k} = 0 \quad \text{oraz} \quad w_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_{k-1}, j_k} \neq 0 \tag{3.3.5}$$

o ile tylko $j_k \neq \overset{o}{j}_k$. Co więcej, istnieje zawsze co najmniej jedno j_k z tą własnością (na mocy założeń nałożonych na $\mathcal{E}$ i faktu, że $m_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_{k-1}} > 1$, gdy $k \geq 2$).

Ponieważ rozszerzenie odwzorowania Φ jest homeomorfizmem między $\bar{D}$ i $\bar{\mathcal{E}}$, istnieje zatem φ_z takie, że $\psi := \Phi \circ \varphi_z$ jest geodezyjną zespoloną w $\mathcal{E}$ łączącą b z w (ψ traktujemy teraz jako odwzorowanie na $\bar{E}$), a nawet więcej

$$\psi(0) = b, \quad \psi(1) = w. \tag{3.3.6}$$

Ponieważ (z powodu (3.3.3)) $\psi_{\overset{o}{j}_1, \dots, \overset{o}{j}_n} \not\equiv 0$, dostajemy ze względu na postać geodezyjnych w $\mathcal{E}$ (lub jeśli, któraś ze składowych jest równa identycznie 0, w

([45]) **Twierdzenie** ([Bell]). Niech G_1 i G_2 będą ograniczonymi zupełnymi obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^n$. Wtedy dowolne odwzorowanie biholomorficzne obszarów G_1 i G_2 rozszerza się holomorficznie do otwartego otoczenia $\bar{G}_1$.

pewnej „niżej” wymiarowej pseudoelipsoidzie, zob. Uwaga 3.2.3), (3.3.5) i (3.3.6), że

$$\alpha_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_n} = 1. \tag{3.3.7}$$

I z tych samych powodów co powyżej mamy nawet więcej.

$$\text{Jeśli } \psi_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_k,j_{k+1},\dots,j_n} \not\equiv 0, \text{ to wtedy } \alpha_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_k,j_{k+1},\dots,j_n} = 1. \tag{3.3.8}$$

Twierdzimy, że

$$|\alpha_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1}}| < 1. \tag{3.3.9}$$

Ponieważ $|\alpha_0| < 1$, więc sprawa jest załatwiona w przypadku $k = 1$. Przypuśćmy zatem, że (3.3.9) nie zachodzi dla $k \geq 2$. Oznacza to, ze względu na postać geodezyjnych w $\mathcal{E}$ i (3.3.7), że $\alpha_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1}} = 1$ i w konsekwencji dla wszelkich możliwych $(j_k, \dots, j_n)$ dostajemy $\alpha_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1},j_k,\dots,j_n} = 1$ lub $\psi_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1},j_k,\dots,j_n} \equiv 0$. To implikuje, że (zob. (3.3.4))

$$\psi_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1},j_k,\dots,j_n}(\lambda) = \\ C(j_k,\dots,j_n)\left(\frac{1-\lambda}{1-\bar{\alpha}_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-2}}\lambda}\right)\prod_{l=1}^{k-2}\left(\frac{1-\bar{\alpha}_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{l-1}}\lambda}\right), \tag{3.3.10}$$

z iloczynem równym 1, gdy $k = 2$.

Uwaga 3.2.6 razem z (3.3.10) implikują, że (pamiętajmy, iż $\alpha_0 \in E$)

$$w_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1},j_k,\dots,j_n} = \psi_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1},j_k,\dots,j_n}(1) = 0$$

dla wszelkich możliwych $(j_k, \dots, j_n)$, co przeczy jednak (3.3.5) łącznie z uwagą tuż pod nią.

Na mocy (3.3.7), (3.3.8) i Lematu 3.3.2 zastosowanego wielokrotnie (w razie potrzeby do pewnej „niżej” wymiarowej pseudoelipsoidy) dostajemy równość

$$\alpha_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_k} = 1.$$

Dlatego też mamy (zob. (3.3.4))

$$\psi_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_n}(\lambda) = \\ C\left(\frac{1-\lambda}{1-\bar{\alpha}_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{k-1}}\lambda}\right)^{\frac{1}{p_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_n}\cdots p_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_k}}}\prod_{l=1}^{k-1}\left(\frac{1-\bar{\alpha}_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_l}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{\overset{o}{j}_1,\dots,\overset{o}{j}_{l-1}}\lambda}\right), \tag{3.3.11}$$

z iloczynem równym 1, gdy $k = 1$.

Ponieważ φ_z rozszerza się holomorficznie w otoczeniu 1, więc również tę samą własność posiada $\psi_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_n}}$, ale założyliśmy, że $p_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_n}} \dots p_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}$ nie jest 1 i jest większe od $\frac{1}{2}$. Powoduje to, że funkcja $\psi_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_n}}$ nie jest holomorficzna w otoczeniu 1 (zob. (3.3.11)) – sprzeczność. Kończy to dowód Propozycji 3.3.1. $\square$

Dowód Lematu 3.3.2. Z Twierdzenia 3.2.1 otrzymujemy, że

$$\alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}} = \sum_{j_{k+1}=1}^{m_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}} |a_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k},j_{k+1}}|^2 \alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k},j_{k+1}} = \sum_{j_{k+1}=1}^{m_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}} |a_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k},j_{k+1}}|^2.$$

I co więcej

$$1+\alpha^2_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}} = 1+|\alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}|^2 = \sum_{j_{k+1}=1}^{m_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}} |a_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k},j_{k+1}}|^2 \left(1+|\alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k},j_{k+1}}|^2\right) =$$

$$2\sum_{j_{k+1}=1}^{m_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}} |a_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k},j_{k+1}}|^2 = 2\alpha_{\overset{o}{j_1},\dots,\overset{o}{j_k}}$$

Ostatnia równość kończy dowód. $\square$

Dla opisu automorfizmów holomorficznych w $\mathcal{E}$ potrzebujemy następującego lematu.

Lemat 3.3.3. *Niech $\mathcal{E}$ będzie takie jak w Propozycji 3.3.2. Niech $a' \in \mathbb{B}_r$ i $\Psi \in \operatorname{Aut}\mathbb{B}_r$ będą takie, że $\Psi(a') = 0$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}^N$ w sposób następujący. Dla punktu $(z', w') \in \mathcal{E}$, gdzie $z' = (z_1, \dots, z_{m_0}) \in \mathbb{C}^{N_1}$ i $w' \in \mathbb{B}_r$ definiujemy*

$$\Phi_{j_1,\dots,j_n}(z', w') := z_{j_1,\dots,j_n}\left(\frac{1-\|a'\|^2}{(1-\langle w', a'\rangle)^2}\right)^{\frac{1}{2p_{j_1,\dots,j_n}\cdots p_{j_1}}},$$
$$\Phi_{m_0+k}(z', w') := \Psi_k(w') \text{ for } k = 1, \dots, r.$$

Wtedy

$$\Phi \in \operatorname{Aut}\mathcal{E}.$$

Dowód (jak w [Jar-Pfl]*, Lemma 8.5.2).* Jeśli $r = 0$ lub $N_1 = 0$, wtedy teza lematu jest oczywista. Rozważmy pozostałe przypadki.

Łatwo można sprawdzić, że Φ jest iniektywnym odwzorowaniem holomorficznym. Wiemy, że

$$\|\Psi(w')\| = c^*_{\mathbb{B}_r}(0, \Psi(w') = c^*_{\mathbb{B}_r}(a', w') = \left(1 - \frac{(1-\|a'\|^2)(1-\|w'\|^2)}{|1-\langle w', a'\rangle|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

dla $w' \in \mathbb{B}_r$ (zob. wzór na $c^*_{\mathbb{B}_r}$ w Rozdziale I).

Zatem dla $(z', w') \in \bar{\mathcal{E}}$ otrzymujemy

$$\sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\dots \left(\sum_{j_n=1}^{m_{j_1,\dots,j_{n-1}}} |\Phi_{j_1,\dots,j_n}(z', w')|^2 \right)^{p_{j_1,\dots,j_{n-1}}} \dots \right)^{p_{j_1}} +$$

$$\sum_{t=1}^{r} |\Phi_{m_0+t}(z', w')|^2 = 1 - \frac{1 - \|a'\|^2}{|1 - \langle w', a' \rangle|^2} \cdot$$

$$\left(1 - \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\dots \left(\sum_{j_n=1}^{m_{j_1,\dots,j_{n-1}}} |z_{j_1,\dots,j_n}|^2 \right)^{p_{j_1,\dots,j_{n-1}}} \dots \right)^{p_{j_1}} - \sum_{t=1}^{r} |w'_t|^2 \right),$$

co kończy dowód. □

Propozycja 3.3.1 i Lemat 3.3.3 pozwalają zredukować problem opisu automorfizmów holomorficznych wypukłych pseudoelipsoid zespolonych do przypadku automorfizmów zachowujących środek (przy założeniu własności (3.3.1)). Z kolei na mocy Twierdzenia Cartana ([46]) wiemy, że dowolny automorfizm holomorficzny $\mathcal{E}$, który zachowuje środek jest odwzorowaniem liniowym. Zatem nasze wyniki doprowadzają nas do rozwiązania problemu opisu automorfizmów holomorficznych pseudoelipsoid uogólnionych poprzez sprowadzenie go do rozwiązania analogicznego problemu dla automorfizmów liniowych.

3.4. BIHOLOMORFICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ WYPUKŁYCH ELIPSOID ZESPOLONYCH

W tej części pracy powracamy niejako do źródeł. To znaczy przestaniemy rozważać pseudoelipsoidy uogólnione i ograniczymy się jedynie do ich najprostszego przypadku, czyli do elipsoid. Oznaczmy:

$$\mathcal{E}(p) := \{|z_1|^{2p_1} + \dots + |z_n|^{2p_n} < 1\} \subset \mathbb{C}^n,$$

gdzie $p = (p_1, \dots, p_n)$, $n > 1$ oraz $p_j > 0$ dla $j = 1, \dots, n$.

Poniżej dowiedziemy następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.4.1. *Niech $\mathcal{E}(p)$ i $\mathcal{E}(q)$ będą wypukłymi elipsoidami zespolonymi. Wtedy $\mathcal{E}(p)$ jest biholomorficznie równoważne z $\mathcal{E}(q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$ (z dokładnością do permutacji).*

Powyższe twierdzenie pozostaje prawdziwe również w przypadku ogólnym (to znaczy bez założenia wypukłości – zob. np. [Naru]). Jednakże dowody podawane

([46]) **Twierdzenie (zob. np.** [Kra], **§ 11.1)**. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem kołowym (tzn. takim, że jeśli $(z_1, \dots, z_n) \in D$, to wówczas również $(\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n) \in D$ dla wszelkich $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$) takim, że $0 \in D$. Niech $\Phi \in \mathrm{Aut}(D)$ spełnia warunek $\Phi(0) = 0$. Wówczas Φ jest odwzorowaniem liniowym.

przez autorów wymagają znajomości wielu wyników z zakresu teorii Liego, ewentualnie z teorii jądra Bergmana. Nasz dowód za to stanowi odpowiedź na pytanie postawione przez autorów w [Jar-Pfl] (§ 8.5) o istnienie dowodu Twierdzenia 3.4.1 opartego na opisie geodezyjnych zespolonych i jest stosunkowo elementarny. Podkreślmy tutaj, że jedynym powodem, dla którego nasze rozważania zacieśniamy do przypadku wypukłego jest fakt, że funkcje opisane we wzorze (†) są niezmiennicze względem odwzorowań biholomorficznych elipsoid wypukłych (jako geodezyjne zespolone). Czy tę własność posiadają również elipsoidy niewypukłe niestety nie wiemy ([47])? Dlatego też zauważmy, że nasz dowód pozostałby prawdziwy, gdybyśmy wiedzieli, że również w przypadku niewypukłym odwzorowania postaci (†) (zauważmy, że w tym przypadku wzory (†) opisują dalej funkcje o obrazie leżącym w $\mathcal{E}(p)$) są niezmiennikami odwzorowań biholomorficznych elipsoid — na przykład, gdyby okazało się, że pewne d-geodezyjne są postaci (†) ([48]).

Kluczowym faktem potrzebnym do dowodu naszego twierdzenia będzie możliwość rozszerzania biholomorfizmów elipsoid do homeomorfizmów ich domknięć. Choć znane jest twierdzenie dużo ogólniejsze (zob. [Jar-Pfl], Theorem 6.1.10 ; [Bell] ([49])) my jednak ograniczymy się do sformułowania i udowodnienia twierdzenia słabszego.

Twierdzenie 3.4.2. *Niech $\Phi : \mathcal{E}(p) \longrightarrow \mathcal{E}(q)$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym, gdzie $p_j, q_j \geq \frac{1}{2}$ dla $j = 1, \dots, n$. Wtedy Φ rozszerza się do homeomorfizmu domknięć tych elipsoid.*

Jak już wspomnieliśmy, dla dowodu Twierdzenia 3.4.1 kluczowe znaczenie będzie miało Twierdzenie 3.2.1, które poniżej przeformułujemy dla szczególnego przypadku wypukłych elipsoid zespolonych i podamy je z dodatkowym wynikiem jednoznaczności geodezyjnych zespolonych (zob. [Jar-Pfl-Zei]) ([50]).

Twierdzenie 3.4.3. *Niech $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : E \longrightarrow \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym odwzorowaniem holomorficznym. Niech $p_j \geq \frac{1}{2}$ dla $j = 1, \dots, n$. Wtedy φ jest geodezyjną zespoloną w $\mathcal{E}(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\varphi_j(\lambda) = a_j \left(\frac{\lambda - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j \lambda}\right)^{r_j} \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_j \lambda}{1 - \bar{\alpha}_0 \lambda}\right)^{\frac{1}{p_j}} \quad \textit{lub} \tag{3.4.1}$$

$$\varphi_j(\lambda) = 0, \tag{3.4.2}$$

gdzie w przypadku (3.4.1)

([47]) Pewne pozytywne wyniki w tym kierunku uzyskane zostały ostatnio w [Pfl-Zwo].

([48]) W przypadku niewypukłym w elipsoidach nie ma równości między odległością Kobayashiego i Carathéodory'ego, więc nie możemy mówić o geodezyjnych zespolonych.

([49]) Twierdzenie tego typu wykorzystaliśmy już w § 3.3, jednakże w tym Podrozdziale pragniemy otrzymać dowód Twierdzenia 3.4.1 za pomocą dużo prostszych metod, dlatego też przedstawiamy elementarne dowody wszelkich wyników potrzebnych do dowodu naszego głównego twierdzenia, nie troszcząc się o to by były one maksymalnie ogólne.

([50]) W wypowiedzi tego twierdzenia rezygnujemy też z założenia niezerowania się wszystkich składowych, robimy tak wyłącznie ze względu na to, że tak sformułowane twierdzenie będzie wygodniejsze w „użyciu".

$r_j \in \{0, 1\}$,
$a_j \in \mathbb{C}_*$,
$\alpha_0 \in E$,
$\alpha_j \in E$ *dla* j *takiego, że* $r_j = 1$,
$\alpha_j \in \bar{E}$ *dla* j *takiego, że* $r_j = 0$,
i (w przypadku (3.4.1) *definiujemy* $\alpha_j := 0, a_j := 0, r_j := 0$*),*

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{2p_j} \alpha_j,$$

$$1 + |\alpha_0|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{2p_j} (1 + |\alpha_j|^2).$$

Dodatkowo przypadek taki, że dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$ *odwzorowanie* φ_j *jest postaci* (3.4.2) *lub postaci* (3.4.1) *z* $r_j = 0$ *i* $\alpha_j = \alpha_0$ *dla* $j = 1, \ldots, n$ *jest wykluczony. Gałęzie potęg są wzięte tak, by* $1^{\frac{1}{p_j}} = 1$.

W dowodzie Twierdzenia 3.4.1 wykorzystamy następujący prosty (lecz żmudny rachunkowo do udowodnienia i dlatego podany bez dowodu) lemat.

Lemat 3.4.4. *Załóżmy, że dla pewnych ustalonych* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *i* $1 \neq s > 0$ *oraz* $\alpha \in \bar{E}$, $\beta \in E$, $t \geq 0$ *zachodzi równość*

$$\frac{a + b\lambda^s}{c + d\lambda^s} = \left(\frac{\lambda - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\lambda}\right)^t \left(\frac{1 - \bar{\alpha}\lambda}{1 - \bar{\beta}\lambda}\right)$$

dla λ *z pewnego niepustego otwartego zbioru w* E. *Jeśli funkcje występujące po obu stronach powyższej równości nie są stałe, to wtedy*

$$t = s \text{ i } \alpha = \beta = 0.$$

Dowód Twierdzenia 3.4.1. Niech $\Phi : \mathcal{E}(p) \longrightarrow \mathcal{E}(q)$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym, które na mocy Twierdzenia 3.4.2 rozszerza się do homeomorfizmu domknięć elipsoid. Dlatego też możemy wybrać zbiory otwarte $\varnothing \neq U_1 \subset \mathcal{E}(p)$, $\varnothing \neq U_2 \subset \mathcal{E}(q)$ takie, że U_1 (odpowiednio U_2) jest częścią wspólną pewnej kuli euklidesowej w $\mathbb{C}^n$, nie leżącej całkowicie w $\mathcal{E}(p)$ (odpowiednio w $\mathcal{E}(q)$), z $\mathcal{E}(p)$ (odp. z $\mathcal{E}(q)$). Dodatkowo możemy założyć, że oba obszary U_1 i U_2 nie zawierają punktów o współrzędnych równych 0 oraz, że $\Phi(U_1) \subset U_2$. Co więcej, istnieją obszary $\varnothing \neq \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset \mathbb{B}_n$ takie, że odwzorowania

$$\begin{aligned} z^p &: U_1 \ni z \longrightarrow (z_1^{p_1}, \ldots, z_n^{p_n}) \in \tilde{U}_1, \qquad (3.4.3) \\ z^q &: U_2 \ni z \longrightarrow (z_1^{q_1}, \ldots, z_n^{q_n}) \in \tilde{U}_2 \end{aligned}$$

są biholomorficzne.

Oznaczmy odwzorowania odwrotne do z^p i z^q przez $z^{\frac{1}{p}}$ i $z^{\frac{1}{q}}$.

Zdefiniujmy

$$F := z^q \circ \Phi \circ z^{\frac{1}{p}} \text{ na } \tilde{U}_1. \tag{3.4.4}$$

Zauważmy, że odwzorowanie F jest biholomorfizmem na obraz, który rozszerza się do homoeomorfizmu między domknięciami obszarów odwzorowującego część brzegu leżącą w $\partial\mathbb{B}_n$ w $\partial\mathbb{B}_n$.

Na mocy Twierdzenia Rudina (zob. [Rud] ([51])) otrzymujemy, że (wspomnijmy, że wynik Rudina uzyskany jest za pomocą elementarnych własności funkcji holomorficznych, co powoduje, że również nasz dowód pozostaje elementarny ([52]))

$$F \text{ jest restrykcją automorfizmu } \mathbb{B}_n \text{ do } \tilde{U}_1, \tag{3.4.5}$$

co na mocy (3.4.4) oznacza, że

$$z^{\frac{1}{q}} \circ F \circ z^p = \Phi \text{ na } U_1, \text{ gdzie } F \in \operatorname{Aut} \mathbb{B}_n. \tag{3.4.6}$$

Wykorzystując wzór (3.4.6) zakończymy poniżej dowód naszego twierdzenia.

Rozważmy następujące geodezyjne zespolone (zob. Twierdzenie 3.4.3) w $\mathcal{E}(p)$:

$$\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(\lambda) := (A_1, \dots, A_{j_0-1}, A_{j_0}\lambda, A_{j_0+1}, \dots, A_n), \tag{3.4.7}$$

gdzie $1 \le j_0 \le n$ oraz punkty $(A_1, \dots, A_n) \in \partial\mathcal{E}(p)$ są wzięte z pewnego otwartego, niepustego podzbioru $\partial\mathcal{E}(p)$ wybranego tak, żeby

$$\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(V) \subset U_1 \text{ dla pewnego zbioru otwartego } \varnothing \ne V \subset E. \tag{3.4.8}$$

Zauważmy, że $A_j \ne 0$ dla $j = 1, \dots, n$ oraz że punkty $(A_1, \dots, \check{A}_{j_0}, \dots, A_n)$ możemy wybrać z pewnego niepustego zbioru otwartego w $\mathcal{E}((p_1, \dots, \check{p}_{j_0}, \dots, p_n))$.

Rozważmy dwa przypadki w zależności od postaci F (por. wzory na automorfizmy w jednostkowej kuli euklidesowej w Rozdziale I).

$$F = C \circ F_b, \text{ gdzie } 0 \ne b \in \mathbb{B}_n \text{ i} \tag{3.4.9}$$

$$F_b(z) = \frac{1}{\|b\|^2} \frac{\|b\|^2(z\sqrt{1-\|b\|^2} - b) + \langle z, b\rangle b(1 - \sqrt{1-\|b\|^2})}{1 - \langle z, b\rangle},$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{C}^n$ lub

$$F = C, \tag{3.4.10}$$

([51]) Twierdzenie Rudina pozostaje prawdziwe nawet przy założeniu dużo mniejszej regularności funkcji w pobliżu brzegu kuli.

([52]) Podkreślmy, że Twierdzenie Rudina, z którego tutaj korzystamy, można również udowodnić wykorzystując wzory na $c^*_{\mathbb{B}_n}$ i prowadząc rozumowanie podobne do tego z § 2.1.

gdzie w obydwu przypadkach $C = [c_{kl}]_{1\le k,l\le n}$ jest odwzorowaniem unitarnym.

Poniżej dowiedziemy, że w obydwu przypadkach mamy następująca zależność:

$$\text{jeśli } p_{j_0} \neq 1, \text{ wtedy istnieje } 1 \le k_0 \le n \text{ takie, że } q_{k_0} = p_{j_0}; \tag{3.4.11}$$

dla $j_0 \neq j_1$ takich, że $p_{j_0} = p_{j_1} \neq 1$

istnieją liczby $1 \le k_0, k_1 \le n$ takie, że $k_0 \neq k_1$ i $q_{k_0} = q_{k_1} = p_{j_0}$.

Zauważmy, że jeśli założymy (3.4.11) to stosując to samo rozumowanie do Φ^{-1} otrzymamy, że $p = q$ z dokładnością do permutacji, co zakończy dowód twierdzenia.

Dlatego wystarczy, że dowiedziemy (3.4.11) w obu możliwych przypadkach (3.4.9) i (3.4.10).

Na mocy (3.4.6) mamy

$$F \circ (\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(\lambda)^p) = z^q \circ \Phi(\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(\lambda)) \text{ dla } \lambda \in V. \tag{3.4.12}$$

Ustalmy j_0 takie, że $p_{j_0} \neq 1$.

Rozważmy najpierw przypadek (3.4.9). Wtedy mamy dla $\lambda \in V$

$$\text{gdy } j \neq j_0, \text{ to wówczas } \left(F_b(\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(\lambda)^p)\right)_j = \frac{1}{\|b\|^2}\cdot$$
$$\frac{\|b^2\|\left(A_j^{p_j}\sqrt{1-\|b\|^2} - b_j\right) + \left(\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l + A_{j_0}^{p_{j_0}}\bar{b}_{j_0}\lambda^{p_{j_0}}\right) b_j \left(1-\sqrt{1-\|b\|^2}\right)}{1-\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l - A_{j_0}^{p_{j_0}}\bar{b}_{j_0}\lambda^{p_{j_0}}} \tag{3.4.13}$$

oraz

$$\left(F_b(\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(\lambda)^p)\right)_{j_0} = \frac{1}{\|b\|^2}\frac{\|b\|^2\left(A_{j_0}^{p_{j_0}}\lambda^{p_{j_0}}\sqrt{1-\|b\|^2} - b_{j_0}\right) +}{1-\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l - A_{j_0}^{p_{j_0}}\bar{b}_{j_0}\lambda^{p_{j_0}}}$$
$$\frac{\left(\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l + A_{j_0}^{p_{j_0}}\bar{b}_{j_0}\lambda^{p_{j_0}}\right) b_{j_0}\left(1-\sqrt{1-\|b\|^2}\right)}{1-\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l - A_{j_0}^{p_{j_0}}\bar{b}_{j_0}\lambda^{p_{j_0}}}. \tag{3.4.14}$$

W konsekwencji dla $k = 1, \dots, n$ mamy

$$\left(F(\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(\lambda)^p)\right)_k = \frac{1}{\|b\|^2}\frac{D_1\lambda^{p_{j_0}} + D_2}{1-\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l - A_{j_0}^{p_{j_0}}\bar{b}_{j_0}\lambda^{p_{j_0}}}, \tag{3.4.15}$$

gdzie

$$D_1 = \big(\sum_j c_{kj}b_j\big)\big(A_{j_0}^{p_{j_0}}\bar{b}_{j_0}\big(1-\sqrt{1-\|b\|^2}\big)\big) + c_{kj_0}\|b\|^2 A_{j_0}^{p_{j_0}}\sqrt{1-\|b\|^2},$$

$$D_2 = \|b\|^2 \sum_{j\neq j_0} c_{kj}\big(A_j^{p_j}\sqrt{1-\|b\|^2} - b_j\big) - c_{kj_0}\|b\|^2 b_{j_0} +$$
$$\Big(\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l\Big)\sum_j b_j c_{kj}\big(1-\sqrt{1-\|b\|^2}\big)$$

Własności funkcji $\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}$ oraz Twierdzenie 3.4.3 implikują, że odwzorowanie $\Phi\circ\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}$ jest geodezyjną zespoloną następującej postaci

$$\big(\Phi\circ\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}\big)_k^{q_k}(\lambda) = a_k^{q_k}\left(\frac{\lambda-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k\lambda}\right)^{r_k q_k}\left(\frac{1-\bar{\alpha}_k\lambda}{1-\bar{\alpha}_0\lambda}\right), \tag{3.4.16}$$

gdzie $r_k, \alpha_k, \alpha_0, a_k$ mają własności jak w Twierdzeniu 3.4.3.

Porównując wyrażenia i potęgi w (3.4.15) i (3.4.16) dostajemy na mocy Lematu 3.4.4, że wyrażenie $\big(\Phi\circ\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}\big)_k^{q_k}$ może być niestałe tylko dla k takich, że

$$q_k = p_{j_0},\ \text{gdzie } r_k = 1, \alpha_k = \alpha_0 = 0. \tag{3.4.17}$$

Otrzymujemy zatem równość $b_{j_0} = 0$ (któraś ze składowej geodezyjnej zespolonej musi być niestała) i poza tym

$$D_1 \neq 0 \text{ i } D_2 = 0 \text{ dla } k \text{ takich, że } \big(\Phi\circ\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}\big)_k^{q_k} \text{ nie jest funkcją stałą,} \tag{3.4.18}$$
$$D_1 = 0 \text{ dla } k \text{ takich, że } q_k \neq p_{j_0}.$$

Na mocy (3.4.18) wnioskujemy, że

$$c_{kj_0} \neq 0 \text{ dla } k \text{ takich, że } \big(\Phi\circ\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}\big)_k^{q_k} \text{ jest niestałe}$$
$$\text{i } c_{kj_0} = 0 \text{ dla } k \text{ takich, że } q_k \neq p_{j_0}. \tag{3.4.19}$$

Stąd wiemy, że dla wszelkich j takich, że $p_j \neq 1$ mamy

$$b_j = 0 \text{ i } c_{kj} = 0, \text{ gdy } q_k \neq p_j. \tag{3.4.20}$$

Ponieważ $F\circ\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}$ jest niestałym odwzorowaniem dla wszelkich możliwych $(A_1,\dots,A_n)$ istnieje, więc k_0 takie, że $\big(\Phi\circ\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}\big)_{k_0}^{q_{k_0}}$ jest niestałe dla $(A_1,\dots,\check{A}_{j_0},\dots,A_n)$ z pewnego podzbioru otwartego w $\mathcal{E}((p_1,\dots,\check{p}_{j_0},\dots,p_n))$. Zatem (3.4.18) implikuje, że

$$\sum_{j\neq j_0} c_{k_0 j}\Big(\|b\|^2\big(A_j^{p_j}\sqrt{1-\|b\|^2}-b_j\big) + \Big(\sum_{l\neq j_0} A_l^{p_l}\bar{b}_l\Big) b_j\big(1-\sqrt{1-\|b\|^2}\big)\Big) = 0 \tag{3.4.21}$$

dla $(A_1,\dots,\check{A}_{j_0},\dots,A_n)$ z pewnego zbioru otwartego. Ale (3.4.21) jest na mocy (3.4.20) równoważne następującej równości

$$\sum_{\substack{j\neq j_0\\ q_{k_0}=p_j\neq 1}} c_{k_0 j}\|b\|^2 A_j^{p_j}\sqrt{1-\|b\|^2} +$$
$$\sum_{\substack{j\neq j_0\\ p_j=1}} c_{k_0 j}\Big(\|b\|^2\big(A_j\sqrt{1-\|b\|^2}-b_j\big) + \Big(\sum_{\substack{l\neq j_0\\ p_l=1}} A_l\bar{b}_l\Big) b_j\big(1-\sqrt{1-\|b\|^2}\big)\Big) = 0$$

dla liczb A_j takich jak powyżej, co z kolei implikuje, że

$$\sum_{\substack{j\neq j_0\\ q_{k_0}=p_j\neq 1}} c_{k_0 j}\|b\|^2 A_j^{p_j}\sqrt{1-\|b\|^2} = \text{constant}$$

gdzie punkty $A_j^{p_j}\neq 0$ dla j takich, że $p_j = q_{k_0}$ oraz $j\neq j_0$ są wzięte z pewnego niepustego zbioru otwartego.

Dlatego też

$$c_{k_0 j_0}\neq 0 \text{ i } c_{k_0 j} = 0 \text{ dla } j\neq j_0 \text{ takich, że } q_{k_0} = p_j = p_{j_0}. \tag{3.4.22}$$

Dla $j_0\neq j_1$ spełniających warunek $p_{j_0} = p_{j_1}\neq 1$ widać, na mocy (3.4.22) (pamiętajmy, że C jest odwzorowaniem unitarnym), że istnieją $k_0\neq k_1$ takie, że $q_{k_0} = q_{k_1} = p_{j_0}$. Kończy to dowód (3.4.11) w przypadku (3.4.9).

W przypadku (3.4.10) mamy

$$(F(\varphi_{(j_0,A_1,\dots,A_n)}(\lambda)^p))_k = \sum_{j\neq j_0} c_{kj}A_j^{p_j} + c_{kj_0}A_{j_0}^{p_{j_0}}\lambda^{p_{j_0}} \tag{3.4.23}$$

Analogicznie jak wcześniej widać, że wyrażenie (3.4.23) musi być równe wyrażeniu (3.4.16), co implikuje, że (zob. Lemat 3.4.4) (3.4.23) nie jest stałe tylko dla k takich, że

$$q_k = p_{j_0},\ \text{gdzie } r_k = 1, \alpha_k = \alpha_0 = 0. \tag{3.4.24}$$

Weźmy k_0 analogicznie jak we wcześniejszym przypadku takie, że (3.4.23) nie jest stałe dla $(A_1,\dots,\check{A}_{j_0},\dots,A_n)$ wybranych z pewnego niepustego zbioru otwartego leżącego w $\mathcal{E}((p_1,\dots,\check{p}_{j_0},\dots,p_n))$. Łatwo wtedy wnioskujemy, że

$$\sum_{j\neq j_0} c_{k_0 j}A_j^{p_j} = 0,$$

co implikuje, że $c_{k_0 j} = 0$ dla $j\neq j_0$, a więc $c_{k_0 j_0}\neq 0$, co na mocy unitarności C kończy dowód (3.4.11). $\square$

Do dowodu Twierdzenia 3.4.2 potrzebować będziemy następującego lematu.

Lemat 3.4.5. *Niech $\varphi_k,\varphi_0 : \bar{E}\longrightarrow\bar{E}$ dla $k = 1,2,\dots$ będą odwzorowaniami następującej postaci*

$$\varphi_k(\lambda) = a_k\left(\frac{\lambda-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k\lambda}\right)^{r_k}\left(\frac{1-\bar{\alpha}_k\lambda}{1-\bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}},\ \textit{dla } k = 0,1,\dots, \tag{3.4.25}$$

gdzie

$m > 0$,

$r_k\in\{0,1\}$,

$a_k \in \mathbb{C}_*$,
$\beta_k \in E$,
$\alpha_k \in E$ jeśli $r_k = 1$,
$\alpha_k \in \bar{E}$ jeśli $r_k = 0$.
oraz przyjmijmy, że $1^{\frac{1}{m}} = 1$. Załóżmy, że

$$\varphi_k(0) = \varphi_0(0) \text{ i } \varphi_k \longrightarrow \varphi_0 \text{ lokalnie jednostajnie na } E. \tag{3.4.26}$$

Dodatkowo załóżmy, że jeśli φ_0 jest stałe (więc $r_0 = 0$, $\alpha_0 = \beta_0$), to wtedy $\beta_k \to \beta_0$. Wówczas

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi_0 \text{ jednostajnie na } \bar{E} \text{ i } \beta_k \longrightarrow \beta_0.$$

Zauważmy, że w założeniach lematu nie nałożyliśmy żadnych dodatkowych ograniczeń na potęgi występujące w jego wypowiedzi. Widzimy więc, że lemat ten będzie mógł być w bezpośredni sposób zastosowany w dowodzie Twierdzenia 3.4.1 również w przypadku niewypukłym.

Dowód Twierdzenia 3.4.2. Dla dowolnego punktu $z \in \partial\mathcal{E}(p)$ zdefiniujmy odwzorowanie

$$\varphi_z(\lambda) := \lambda z,$$

które jest oczywiście geodezyjną zespoloną. Dla $z \in \partial\mathcal{E}(p)$ odwzorowanie

$$\psi_z := \Phi \circ \varphi_z \quad \text{jest geodezyjną zespoloną w } \mathcal{E}(q).$$

Co więcej, na mocy Twierdzenia 3.4.3, możemy rozszerzyć ψ_z w sposób ciągły do $\bar{E}$. Oznaczmy to rozszerzenie również przez ψ_z. Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie

$$\tilde{\Phi} : \overline{\mathcal{E}(p)} \ni z \longrightarrow \begin{cases} \Phi(z), & \text{dla } z \in \mathcal{E}(p) \\ \psi_z(1), & \text{dla } z \in \partial\mathcal{E}(p) \end{cases}.$$

Poniżej dowiedziemy, że $\tilde{\Phi}$ jest rozszerzeniem, którego poszukujemy.

Zauważmy, że dla $z \in \partial\mathcal{E}(p)$

$$\psi_z(0) = \Phi(0) = \text{constant}. \tag{3.4.27}$$

Co więcej, $\varphi_z \underset{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \in \partial\mathcal{E}(p)}}{\longrightarrow} \varphi_{z_0}$ jednostajnie na E. W konsekwencji dla $z_0 \in \partial\mathcal{E}(p)$

$$\psi_z \underset{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \in \partial\mathcal{E}(p)}}{\longrightarrow} \psi_{z_0} \quad \text{niemal jednostajnie na } E. \tag{3.4.28}$$

Poniżej dowiedziemy więcej, mianowicie, że dla $z_0 \in \partial\mathcal{E}(p)$

$$\psi_z \underset{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \in \partial\mathcal{E}(p)}}{\longrightarrow} \psi_{z_0} \text{ jednostajnie na } \bar{E}. \tag{3.4.29}$$

Żeby dowieść (3.4.29) wystarczy pokazać jednostajną zbieżność na $\bar{E}$ składowych geodezyjnych występujących w powyższym wzorze. Na mocy Twierdzenia

3.4.3 składowe tych geodezyjnych są postaci takiej jak odwzorowania w Lemacie 3.4.5 (lub identycznie równe 0). Dlatego też w przypadku, gdy $(\psi_{z_0})_j$ nie jest stałe, wtedy na mocy Lematu 3.4.5 otrzymujemy żądaną zbieżność. Weźmy zatem $1 \leq j_0 \leq n$ takie, że $(\psi_{z_0})_{j_0} \equiv A$ dla pewnego $A \in E$. Istnieje oczywiście $1 \leq j_1 \leq n$ takie, że $(\psi_{z_0})_{j_1}$ nie jest stałe. Ponieważ, na mocy Twierdzenia 3.4.3, dla z bliskich z_0 mamy

$$(\psi_z)_{j_1}(\lambda) = a_{j_1,z} \left(\frac{\lambda - \alpha_{j_1,z}}{1 - \bar{\alpha}_{j_1,z}\lambda} \right)^{r_{j_1,z}} \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_{j_1,z}\lambda}{1 - \bar{\alpha}_{0,z}\lambda} \right)^{\frac{1}{q_{j_1}}},$$

gdzie $r_{j_1,z} \in \{0,1\}$ i pozostałe współczynniki są takie jak w Twierdzeniu 3.4.3, otrzymamy, na mocy (3.4.28) i Lematu 3.4.5, że $\alpha_{0,z} \underset{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \in \partial\mathcal{E}(p)}}{\longrightarrow} \alpha_{0,z_0}$, co implikuje w szczególności, że

$$|\alpha_{0,z}| < \delta < 1, \text{ dla } z \text{ bliskich } z_0. \tag{3.4.30}$$

Rozważmy przypadek $A = 0$.

Biorąc pod uwagę tylko punkty $z \neq z_0$ takie, że $(\psi_z)_{j_0} \not\equiv 0$ tak jak wyżej mamy

$$(\psi_z)_{j_0}(\lambda) = a_{j_0,z} \left(\frac{\lambda - \alpha_{j_0,z}}{1 - \bar{\alpha}_{j_0,z}\lambda} \right)^{r_{j_0,z}} \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_{j_0,z}\lambda}{1 - \bar{\alpha}_{0,z}\lambda} \right)^{\frac{1}{q_{j_0}}}. \tag{3.4.31}$$

Twierdzimy, że

$$a_{j_0,z} \underset{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \in \partial\mathcal{E}(p)}}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4.32}$$

Żeby to zobaczyć zauważmy, że $r_{j_0,z} = 1$, w przeciwnym przypadku mielibyśmy $a_{j_0,z} = 0$ (zob. (3.4.27)). Poza tym na mocy (3.4.27) dostajemy równość $\alpha_{j_0,z} = 0$. Łatwo widać, że biorąc dowolny punkt $x \in E_*$, otrzymamy ze zbieżności $(\psi_z(x))_{j_0} \longrightarrow 0$ własność (3.4.32). Ostatecznie na mocy (3.4.30), (3.4.32) i równości $\alpha_{j_0,z} = 0$ otrzymujemy wymaganą zbieżność.

Jeśli $A \neq 0$, wtedy połóżmy $(\psi_{z_0}(\lambda))_{j_0} = a_{j_0,z_0} \left(\frac{1-\bar{\alpha}_{j_0,z_0}\lambda}{1-\bar{\alpha}_{0,z_0}\lambda} \right)^{\frac{1}{q_{j_0}}}$. Ponieważ wiemy, że $\alpha_{0,z} \longrightarrow \alpha_{0,z_0}$, na mocy Lematu 3.4.5 kończymy dowód tego przypadku.

Kończy to równocześnie dowód (3.4.29).

Zauważmy, że rozważając otoczenia punktu $z_0 \in \partial\mathcal{E}(p)$ w $\overline{\mathcal{E}(p)}$ postaci

$$V_{z_0} = \{\varphi_z(t) \text{ dla } 1 \geq t > s, \ z \in \partial\mathcal{E}(p), \ z \text{ jest z pewnego otoczenia } z_0\}, \tag{3.4.33}$$

dla pewnego $s > 0$, znajdujemy dla każdego otoczenia U punktu $\tilde{\Phi}(z_0)$ w $\overline{\mathcal{E}(q)}$ pewien zbiór V postaci takiej, jak w (3.4.33) taki, że $\tilde{\Phi}(V) \subset U$ (korzystamy tu z własności (3.4.29)).

W konsekwencji otrzymujemy ciągłość odwzorowania $\tilde{\Phi}$. Zwartość $\overline{\mathcal{E}(p)}$ i $\overline{\mathcal{E}(q)}$ implikuje suriektywność $\tilde{\Phi}$.

Stosując to samo co powyżej rozumowanie do Φ^{-1} otrzymujemy ciągłość rozszerzenia $\widetilde{\Phi^{-1}}$. Iniektywność $\tilde{\Phi}$ (i równocześnie $\widetilde{\Phi^{-1}}$) jest konsekwencją ciągłości. $\square$

Do zakończenia rozważań pozostał nam zatem tylko dowód Lematu 3.4.5.

Dowód Lematu 3.4.5. Na początku dowiedziemy, że

$$\alpha_k \longrightarrow \alpha_0,\ \beta_k \longrightarrow \beta_0, \tag{3.4.34}$$

i dodatkowo

(i) jeśli $r_0 = 1$, to wtedy $r_k = 1$ dla dostatecznie dużych k oraz $a_k \longrightarrow a_0$,

(ii) jeśli $r_0 = 0$ i $|\alpha_0| < 1$, to wtedy $r_k = 0$ i $a_k = a_0$ dla k dostatecznie dużych,

(iii) jeśli $r_0 = 0$, $|\alpha_0| = 1$ i $r_k = 0$, to wtedy $a_k = a_0$,

(iv) jeśli $r_0 = 0$, $|\alpha_0| = 1$ i $r_k = 1$, to wtedy $-a_k\alpha_k = a_0$.

Rozważmy przypadek (i). Twierdzenie Hurwitza implikuje, że funkcje φ_k posiadają miejsca zerowe dla dostatecznie dużych k. Zatem

$$\varphi_k(\lambda) = a_k \frac{\lambda - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}\left(\frac{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}{1 - \bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}$$

oraz $\alpha_k \longrightarrow \alpha_0$.

Zauważmy, że

$$\text{istnieje } M < \infty \text{ takie, że } |a_k| \leq M. \tag{3.4.35}$$

W przeciwnym razie rozważając punkt $x \in E$ taki, że $\alpha_0 \neq x$ otrzymalibyśmy nieograniczoność wyrażenia $\varphi_k(x) = a_k \frac{x-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k x}\left(\frac{1-\bar{\alpha}_k x}{1-\bar{\beta}_k x}\right)^{\frac{1}{m}}$, co stałoby w sprzeczności z nierównością $|\varphi_k(x)| \leq 1$.

Na mocy (3.4.26) wiemy, że

$$\varphi_k(0) = -a_k\alpha_k = -a_0\alpha_0.$$

W przypadku $\alpha_0 \neq 0$ implikuje to (razem ze zbieżnością $\alpha_k \longrightarrow \alpha_0$), że $a_k \longrightarrow a_0$ i w konsekwencji $\beta_k \longrightarrow \beta_0$. Załóżmy zatem, że $\alpha_0 = 0$. Przypuśćmy, że a_k nie zmierza do a_0 lub β_k nie zmierza do β_0. Oznacza to, że możemy wybrać pewien podciąg taki, że $a_k \longrightarrow x, \beta_k \longrightarrow y$ (dla naszej wygody używamy tego samego oznaczenia dla ciągu i wybranego przez nas podciągu) i $x \neq a_0$ lub $y \neq \beta_0$ oraz $|y| \leq 1$ (możemy wybrać taki podciąg ponieważ $|\beta_k| < 1$ oraz z powodu (3.4.35)). Ale to implikuje, że dla odpowiedniego podciągu $\varphi_k(\lambda) \longrightarrow \frac{x\lambda}{(1-\bar{y}\lambda)^{\frac{1}{m}}}$, a zatem na mocy (3.4.26), $\frac{x\lambda}{(1-\bar{y}\lambda)^{\frac{1}{m}}} = \frac{a_0\lambda}{(1-\bar{\beta}_0\lambda)^{\frac{1}{m}}}$ dla $\lambda \in E$, co daje równość $x = a_0$ i $y = \beta_0$. Daje to jednak sprzeczność i kończy ten przypadek.

Rozważmy teraz łącznie przypadki (ii) - (iv). Poniżej rozważamy dwa podciągi ciągu $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$, dla których powtórnie używamy tych samych oznaczeń co dla ciągu wyjściowego.

Rozważmy mianowicie następujący podciąg: $\varphi_k(\lambda) = a_k \left(\frac{1-\bar{\alpha}_k\lambda}{1-\bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}$, wtedy na mocy (3.4.26) $a_k = a_0$ i dodatkowo dostajemy zbieżność $\alpha_k \longrightarrow \alpha_0$ oraz $\beta_k \longrightarrow \beta_0$; gdyby to nie zachodziło to wówczas wybralibyśmy podciąg φ_k taki, że $\alpha_k \longrightarrow x$ i $\beta_k \longrightarrow y$, gdzie $y \neq \beta_0$ lub $x \neq \alpha_0$, co po wykorzystaniu zbieżności podciągu φ_k prowadziłoby do sprzeczności podobnie jak powyżej (zauważmy, że jeśli odwzorowanie φ_0 jest stałe, to wtedy mamy $x = \alpha_0$, w przeciwnym razie $\alpha_0 \neq \beta_0$).

Zatem został nam do rozważenia następujący przypadek

$$\varphi_k(\lambda) = a_k \frac{\lambda - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k\lambda} \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}{1 - \bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{3.4.36}$$

który z powodu zależności $\varphi_k(0) = -a_k\alpha_k = a_0 = \varphi_0(0)$, może być zapisany w następującej postaci:

$$\varphi_k(\lambda) = a_0 \frac{1 - \frac{1}{\alpha_k}\lambda}{1 - \bar{\alpha}_k\lambda} \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}{1 - \bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{3.4.37}$$

Na początku zauważmy, że $|\alpha_k| \longrightarrow 1$. Gdyby tak nie było, to wówczas możnaby wybrać pewien podciąg ciągu $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\alpha_k \longrightarrow x$, gdzie $|x| < 1$, ale na mocy (3.4.37) dostajemy, że $\varphi_k(x) \longrightarrow 0$ (pamiętamy, że $|\beta_k|, |\alpha_k| < 1$) co przeczy własności (3.4.26) (ponieważ $\varphi_0(x) \neq 0$).

Chcemy dowieść, że $\alpha_k \longrightarrow \alpha_0$ (będzie to również implikowało, że $|\alpha_0| = 1$). Załóżmy, że to nie zachodzi, zatem możemy przyjąć iż dla pewnego podciągu $\alpha_k \longrightarrow x \neq \alpha_0, |x| = 1$ i dodatkowo $\beta_k \longrightarrow y$. W konsekwencji, na mocy (3.4.37)

$$\varphi_k(\lambda) \longrightarrow a_0 \frac{1 - \frac{1}{x}\lambda}{1 - \bar{x}\lambda} \left(\frac{1 - \bar{x}\lambda}{1 - \bar{y}\lambda}\right)^{\frac{1}{m}} = a_0 \left(\frac{1 - \bar{x}\lambda}{1 - \bar{y}\lambda}\right)^{\frac{1}{m}},$$

ale powyższa granica musi być równa

$$\varphi_0(\lambda) = a_0 \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_0\lambda}{1 - \bar{\beta}_0\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

A to dowodzi, że $x = \alpha_0$ i $y = \beta_0$. Te rozważania kończą dowód przypadków (ii) - (iv).

Do zakończenia dowodu Lematu 3.4.5 będziemy potrzebowali następującego, prostego spostrzeżenia.

Rozważmy następujące odwzorowanie

$$\Psi : D := \bar{E} \times \bar{B}(\beta, r) \times \bar{E} \ni (\beta_j, \beta_0, \lambda) \longrightarrow \frac{1 - \bar{\beta}_j\lambda}{1 - \bar{\beta}_0\lambda} \in \mathbb{C},$$

gdzie $\bar{B}(\beta, r)$ jest pewnym domkniętym kołem w $\mathbb{C}$ o środku $\beta \in E$ i promieniu $r > 0$ takim, że $\bar{B}(\beta, r) \subset E$.

Ψ jest odwzorowaniem ciągłym, więc $\Psi(D)$ jest zbiorem zwartym. Zauważmy, że ponieważ $\mathrm{Re}(1 - \bar{\beta}_j\lambda) \geq 0$ i $\mathrm{Re}(1 - \bar{\beta}_0\lambda) > 0$ zachodzi własność $\Psi(D) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$.

Na mocy powyższego spostrzeżenia oraz dodatkowo z powodu (3.4.34) dostajemy następującą zbieżność

$$\left(\frac{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}{1 - \bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}} \longrightarrow \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_0\lambda}{1 - \bar{\beta}_0\lambda}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ jednostajnie na } \bar{E}. \tag{3.4.38}$$

W konsekwencji dostajemy jednostajną zbieżność ciągu φ_k do φ_0 na $\bar{E}$ jeśli $r_0 = 1$ lub $r_0 = 0$ i $|\alpha_0| < 1$, oraz taką samą zbieżność podciągu φ_k takiego, że $r_k = 0$, do φ_0 jeśli $r_0 = 0$ i $|\alpha_0| = 1$. Potrzebujemy jedynie dowieść, że funkcje φ_k z $r_k = 1$ są zbieżne do φ_0 jednostajnie na $\bar{E}$, jeśli $r_0 = 0$ i $|\alpha_0| = 1$

Chcemy zatem dowieść, że (zob. wzór (3.4.37))

$$a_0 \frac{1 - \frac{1}{\alpha_k}\lambda}{1 - \bar{\alpha}_k\lambda} \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}{1 - \bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}} \longrightarrow a_0 \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_0\lambda}{1 - \bar{\beta}_0\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{3.4.39}$$

jednostajnie na $\bar{E}$.

Oznaczmy

$$f_k(\lambda) := \frac{1 - \frac{1}{\alpha_k}\lambda}{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}, \qquad g_k(\lambda) := \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_k\lambda}{1 - \bar{\beta}_k\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}, \text{ dla } k = 1, 2, \ldots \tag{3.4.40}$$

$$f_0(\lambda) := 1, \qquad g_0(\lambda) := \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_0\lambda}{1 - \bar{\beta}_0\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Na mocy (3.4.38) wiemy, że

$$g_k \longrightarrow g_0 \text{ jednostajnie na } \bar{E}. \tag{3.4.41}$$

Zauważmy, że dla $\frac{1}{2} < |\alpha_k|,\ |\lambda| \leq 1$ mamy

$$|f_k(\lambda) - f_0(\lambda)| = \frac{|\lambda|}{|\alpha_k|} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \bar{\alpha}_k\lambda|}, \tag{3.4.42}$$

i w konsekwencji

$$|f_k(\lambda) - f_0(\lambda)| \leq 2\frac{(1 - |\alpha_k|)(1 + |\alpha_k|)}{1 - |\alpha_k||\lambda|} < 4. \tag{3.4.43}$$

Chcemy dowieść (3.4.39). Innymi słowy chcemy pokazać, że $|f_k g_k - f_0 g_0|$ jest zbieżne do 0 jednostajnie na $\bar{E}$. Zauważmy, że

$$|f_k g_k - f_0 g_0| \leq |f_k - f_0||g_k| + |f_0||g_k - g_0|. \tag{3.4.44}$$

Na mocy (3.4.41) otrzymujemy jednostajną zbieżność drugiego składnika po prawej stronie nierówności (3.4.44) do 0.

Żeby zakończyć dowód (3.4.44) wystarczy pokazać, że pierwsza składowa w (3.4.44) jest dowolnie mała dla β_k, α_k leżących dostatecznie blisko β_0, α_0.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje otoczenie V punktu α_0 w $\bar{E}$ takie, że $|g_k(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{4}$ dla $\lambda \in V$ (z powodu (3.4.41), ciągłości g_0 i równości $g_0(\alpha_0) = 0$), ale $\|f_k - f_0\|_{\bar{E}} \leq 4$ (zob. (3.4.43)) więc na zbiorze V pierwsza składowa (3.4.44) zachowuje się „dobrze". Dla α_k, β_k odpowiednio bliskiego α_0, β_0 dostajemy na mocy (3.4.41), że $\|g_k\|_{\bar{E}} \leq M < \infty$. Z drugiej strony istnieje $\delta > 0$ takie, że $|1 - \bar{\alpha}_k \lambda| \geq \delta$ dla $\lambda \in \bar{E} \setminus V$ i dla α_k bliskiego α_0. Dlatego też jeśli weźmiemy α_k odpowiednio bliskie α_0, otrzymamy na mocy (3.4.42), że

$$\|f_k - f_0\|_{\bar{E} \setminus V} < \frac{\varepsilon}{M},$$

co kończy dowód (3.4.39) i w konsekwencji dowód Lematu 3.4.5. $\square$

Literatura cytowana

[Aba] M. Abate, *The complex geodesics of the classical domains*, preprint (1986).

[Bell] S. Bell, *The Bergman kernel function and proper holomorphic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 270 (1983), 685-691.

[BFKKMP] B.E. Blank, D. Fan, D. Klein, S.G. Krantz, D. Ma, M.-Y. Pang, *The Kobayashi metric of a complex ellipsoid in* $\mathbb{C}^2$, Experimental Math. 1 (1992), 47-55.

[Car] C. Carathéodory, *Über eine spezielle Metrik, die in der Theorie der analytischen Funktionen auftritt*, Atti Pontifica Acad. Sc., Nuovi Lincei 80 (1927), 135-141.

[Cyg] S.I. Cyganow, *Biholomorphic mappings of the product of domains*, Matematiczeskie Zamietki .41 6 (1987), 824-828 (in Russian).

[Dine] S. Dineen, *The Schwarz Lemma*, Clarendon Press, 1989.

[Dine-Tim] S. Dineen, R.M. Timoney, *Complex geodesics on convex domains*, in 'Progress in Functional Analysis', K.D.Berstedt, J.Bonet, J.Horváth, M.Maestre (eds.), Elsevier Science Publishers B.V. (1992).

[Dini-Pri] G. Dini, A.S. Primicerio, *Localization principle of automorphisms on generalized pseudoellipsoids (preprint).*

[Dur] P.L. Duren, *Theory of* H^p*-spaces*, Academic Press, 1970.

[Fra-Ves] T. Franzoni, E. Vesentini, *Holomorphic Maps and Invariant Distances*, North Holland Math. Studies 40, 1980.

[Gar] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[Gen] G. Gentili, *Regular complex geodesics in the domain* $D_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| + \dots + |z_n| < 1\}$, Springer Lecture Notes in Math. 1275 (1987), 235-252.

[Jar-Pfl] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, Walter de Gruyter, 1993.

[Jar-Pfl-Zei] M. Jarnicki, P. Pflug, R. Zeinstra, *Geodesics for convex complex ellipsoids*, Annali d.Scuola Normale Superiore di Pisa XX Fasc. 4 (1993), 535-543.

[Kli] M. Klimek, *Extremal plurisubharmonic functions and invariant pseudodistances*, Bull. Soc. Math. France 113 (1985), 275-282.

[Kob] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Pure and Appl. Math. 2, M. Dekker, 1970.

[Kod-Kra-Ma] A. Kodama, S.G. Krantz, D. Ma, *A characterization of generalized complex ellipsoids in* $\mathbb{C}^n$ *and related results*, Ind. Univ. Math. Jour. 41 no.1 (1992), 173-195.

[Kra] S.G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Pure & Applied Mathematics, Jofn Wiley & Sons, 1982.

[Kucz-Ray] T. Kuczumow, W.O. Ray, *Isometers in the Cartesian Product of n Unit Open Hilbert Balls with a Hyperbolic Metric*, Ann. Mat. Pura Appl. IV Ser. 152 (1988), 359-374.

[Lem1] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 427-479.

[Lem2] L. Lempert, *Intrinsic distances and holomorphic retracts*, Complex analysis and applications'81 Sofia (1984), 341-364.

[Nara] R. Narasimhan, *Several Complex Variables*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press,, 1971.

[Naru] T. Naruki, *The holomorphic equivalence problem for a class of Reinhardt domains*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 4 (1968), 527-543.

[Pfl-Zwo] P. Pflug, W. Zwonek, *The Kobayashi metric for non-convex ellipsoids*, preprint.

[Pol] E.A. Poletskii, *The Euler-Lagrange equations for extremal holomorphic mappings of the unit disk*, Michigan Math. J. 30 (1983), 317-333.

[Rud] W. Rudin, *Holomorphic maps that extend to automorphisms of a ball*, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 429-432.

[Zwo1] W. Zwonek, *A note on Carathéodory isometries*, Archiv der Mathematik 60 (1993), 167-176.

[Zwo2] W. Zwonek, *Effective formulas for complex geodesics in generalized pseudoellipsoids with their applications*, Annales Pol. Math. (to appear).

Najważniejsze oznaczenia

Oznaczenia ogólne

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $0 \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$ – ciało liczb rzeczywistych
$\mathbb{C}$ – ciało liczb zespolonych
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ – część rzeczywista i urojona liczby $z \in \mathbb{C}$
A^n – iloczyn kartezjański n zbiorów A, np. $\mathbb{C}^n$
$A_* := A \setminus \{0\}$, np. $\mathbb{C}_*$
$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \dots, w_n)$
$\|z\| := (\langle z, z \rangle)^{\frac{1}{2}} = (|z_1|^2 + \dots |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
$\#A$ – moc zbioru A
$[x]$ – część całkowita liczby $x \in \mathbb{R}$
$\max A$, $\min A$ – maksimum i minumum zbioru A
$\bar{\lambda}$ – sprzężenie liczby $\lambda \in \mathbb{C}$

Oznaczenia w Rozdziale I.

p – odległość Poincarégo	1
$E := \{\lambda \in \mathbb{C}\}$ – koło jednostkowe w $\mathbb{C}$	1
$\mathcal{O}(X, Y)$ – zbiór odwzorowań holomorficznych $f : X \longrightarrow Y$	1
$\mathcal{O}(X) := \mathcal{O}(X, X)$	1
$\operatorname{Aut}(X)$ – zbiór automorfizmów holomorficznych $f : X \longrightarrow X$	1
$\mathfrak{D}$ – klasa wszystkich obszarów $D \subset \mathbb{C}^n$, przy dowolnym n	1
$d := (d_D)_{D \in \mathfrak{D}}$ – rodzina holomorficznie niezmiennicza	1
$\operatorname{Isom}_d(D, G)$ – rodzina d-izometrii $f : D \longrightarrow G$	2
c_D – pseudoodległość Carathéodory'ego dla D	2
$\tilde{k}_D$ – funkcja Lemperta dla D	2
k_D – pseudoodległość Kobayashiego dla D	2
g_D	2
$\hat{g}_D$ – zespolona funkcja Greena	2
$\mathbb{B}_k$ – jednostkowa kula euklidesowa w $\mathbb{C}^k$	3
$\alpha \preceq \beta$	3
$\Lambda(\alpha, \beta)$	3
$\mathcal{A}$	3
warunek $(*)$	3
$\mathcal{E}$ – uogólniona pseudoelipsoida zespolona	3
$(\dagger)$	6

Oznaczenia w Rozdziale II.

Oznaczenia w Rozdziale III.