Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki

ODLEGŁOŚCI CARATHÉODORY'EGO–REIFFENA WYŻSZYCH RZĘDÓW

Paweł Zapałowski

Czerwiec 2003

Spis treści

Wstęp

Cały ubiegły XX wiek to okres niebywałego rozkwitu analizy zespolonej. Po dynamicznym rozwoju w ostatnich latach minionego wieku teorii funkcji analitycznych — głównie wielu zmiennych — wydawało się, że analiza, „królowa” pośród dziedzin matematyki, wejdzie w trzecie tysiąclecie jako kompletna, zamknięta teoria. Rzeczywistość jest jednak inna. Istnieje wciąż wiele dziedzin w obrębie analizy zespolonej, które czekają na pogłębione studia. Jedną z nich jest teoria funkcji holomorficznie niezmienniczych, gdzie wciąż wiele pytań pozostaje otwartych. Podstawowym narzędziem w owej teorii są funkcje zwane pseudoodległościami oraz pseudometrykami. Stąd też rodzą się naturalne pytania; czy i kiedy owe pseudoodległości są odległościami? A jeśli tak, to czy są one odległościami zupełnymi?

Przez ostatnie dziesięciolecia powstało wiele prac zmagających się z powyższą tematyką i w teorii odległości i metryk holomorficznie niezmienniczych funkcjonuje spora liczba rozmaicie definiowanych pseudoodległości. Dla wielu spośród nich odpowiedź na pytania dotyczące hiperboliczności (tzn. faktu „bycia odległością”) oraz zupełności jest znana całkowicie lub choćby częściowo. Lwią część dotychczasowych wyników znaleźć można we wspaniałej monografii profesorów M. Jarnickiego i P. Pfluga (zob. [Jar-Pfl 93]), poświęconej odległościom i metrykom holomorficznie niezmienniczym, która, mimo dziesięciu lat, jakie upłynęły od jej wydania nic nie straciła ze swej aktualności i wciąż imponuje zakresem, precyzją oraz ilością omówionego materiału. Bez wątpienia, owa monografia powinna stać się „biblią” dla każdego, kto zechciałby poznać teorię odległości i metryk holomorficznie niezmienniczych.

Z całą pewnością, książka M. Jarnickiego i P. Pfluga zainspirowała autora do pogłębionego studiowania własności pewnej klasy odległości wewnętrznych, definiowanych jako formy całkowe pseudometryk. I właśnie zbadanie podstawowych własności tych odległości, ze szczególnie dużym naciskiem położonym na problem ich zupełności, jest celem niniejszej rozprawy.

W roku 1985 M. Klimek zaproponował definicję uogólnionej plurizespolonej funkcji Greena. Funkcja ta, będąca biholomorficznym niezmiennikiem, odgrywa ważną rolę w teorii pluripotencjału. Istnieje jednak wiele powodów, dla których posługiwanie się plurizespoloną funkcją Greena staje się niekiedy kłopotliwe (brak symetrii, trudność w wyliczaniu efektywnych formuł dla wielu podstawowych obszarów, itp.). Dlatego też w roku 1998 S. Kobayashi, pisząc monografię *Hyperbolic Complex Spaces* (zob. [Kob 98]), przedstawił alternatywę dla funkcji Greena. Miałaby nią być forma całkowa pseudometryki Azukawy, która, będąc odległością — i to wewnętrzną — jest o wiele regularniejsza od plurizespolonej funkcji Greena zdefiniowanej przez M. Klimka.

Sugestia S. Kobayashiego jest wystarczającą motywacją do badania elementarnych własności formy całkowej pseudometryki Azukawy. Ponieważ jednak jej definicja może być źródłem pewnych kłopotów natury technicznej (definicja pseudometryki Azukawy opiera się na pewnej podklasie funkcji plurisubharmonicznych, w przeciwieństwie do np. definicji pseudometryk Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów, które definiowane są na podrodzinach funkcji holomorficznych), rozsądnie wydaje się zacząć od poznania właściwości wewnętrznych odległości Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów, które, w pewnych warunkach, aproksymują formę całkową pseudometryki Azukawy.

Teraz możemy uściślić zakres niniejszej pracy. Głównym jej celem jest badanie zupełności pewnych klas obszarów ze względu na wewnętrzne odległości Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów. Przedstawione wyniki mogą stanowić punkt wyjścia do dalszych badań problemu zupełności obszarów ze względu na odległość definiowaną jako forma całkowa pseudometryki Azukawy.

Całość pracy zorganizowana została następująco.

Rozdział I zawiera podstawowe definicje i elementarne własności definiowanych obiektów. I tak, Podrozdział 1.1 wprowadza pojęcie holomorficznie kontraktywnych rodzin pseudoodległości i pseudometryk. Podrozdziały 1.2 oraz 1.3 poświęcone są odpowiednio definicjom funkcji Möbiusa i pseudometryk Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów oraz funkcji Greena i pseudometryce Azukawy. Zawarto w nich również podstawowe własności definiowanych obiektów. W Podrozdziale 1.4 przedstawione są dwie metody konstrukcji pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych, a wśród nich, mająca kluczowe znaczenie dla dalszych rozważań, metoda z użyciem tzw. operatora formy całkowej, która pozwala z dowolnej pseudometryki skonstruować wewnętrzną pseudoodległość. Podrozdział 1.5 zawiera ogólne rozważania dotyczące problemu hiperboliczności rozważanych pseudoodległości. Generalna dyskusja zagadnienia zupełności obszarów w $\mathbb{C}^n$ ze względu na zdefiniowane odległości przedstawiona jest w Podrozdziale 1.6. Podrozdział 1.7 sygnalizuje szczególny przypadek zupełności, stanowiący treść Rozdziału II, a dotyczący zupełności pewnej klasy obszarów płaskich (tzw. obszarów typu Zalcmana) ze względu na wewnętrzne odległości Carathéodory'ego –Reiffena wyższych rzędów. Treścią Podrozdziału 1.8 jest charakteryzacja zupełności pseudowypukłych obszarów Reinhardta ze względu na wyżej wspomniane odległości Carathéodory'ego–Reiffena.

Rozdział II zawiera wyniki dotyczące zupełności płaskich obszarów typu Zalcmana względem wewnętrznych odległości Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów. W Podrozdziale 2.1 zamieszczony jest rezultat mówiący o tym, że pojęcie zupełności względem tych odległości nie jest tożsame w przypadku różnych rzędów. Mówiąc dokładniej, przedstawiona jest konstrukcja płaskiego obszaru typu Zalcmana, zupełnego ze względu na wewnętrzne odległości Carathéodory'ego–Reiffena rzędu większego od dowolnie ustalonej liczby naturalnej k, który jednocześnie nie jest zupełny względem wspomnianych odległości rzędu nie większego od k (Twierdzenie 2.1.2). W Podrozdziale 2.2 znajduje się parę uwag dotyczących związku między zupełnością obszaru, a wzrostem odpowiednich odległości wewnętrznych.

Zupełność pseudowypukłych obszarów Reinhardta jest tematem Rozdziału III. Podrozdział 3.1 zawiera definicje oraz lematy pomocnicze dotyczące geometrycznych własności pseudowypukłych obszarów Reinhardta. W Podrozdziale 3.2 przedstawiony jest drugi główny wynik rozprawy. Jest to twierdzenie głoszące równoważność zupełności ze względu na wewnętrzne odległości Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów oraz zupełności względem odległości Carathéodory'ego w klasie hiperbolicznych pseudowypukłych obszarów Reinhardta (Twierdzenie 3.2.2).

Wreszcie, w Dodatku, zamieszczone zostały definicje i własności dobrze znane w teorii funkcji holomorficznych wielu zmiennych, które, jako nie związane bezpośrednio z zagadnieniami pseudoodległości holomorficznie niezmienniczych, nie zostały włączone do tekstu głównego pracy.

Na końcu, dla wygody Czytelnika, przedstawiono jeszcze raz, w formie listy, wykaz wszystkich symboli i oznaczeń używanych w niniejszej pracy. Całość zamyka (z powodów oczywistych — niekompletna) bibliografia.

Podziękowania

Chciałbym przede wszystkim podziękować mojemu opiekunowi naukowemu, profesorowi W. Zwonkowi, za liczne wskazówki, cenne rady i wydatną pomoc przy pisaniu niniejszej pracy. Jego pomoc wydaje się być nie do przecenienia.

Chciałbym też podziękować profesorom M. Jarnickiemu i P. Pflugowi za inspirację, jaką znalazłem podczas lektury ich znakomitej monografii, a także szczególnie profesorowi M. Jarnickiemu za „wciągnięcie" mnie w krąg analizy zespolonej i skierowanie moich zainteresowań na tą właśnie dziedzinę matematyki. Jego wykład Analizy Matematycznej pozostanie dla mnie na zawsze niedoścignionym wzorem idealnego wykładu.

Chciałbym wreszcie złożyć podziękowania profesorowi J. Siciakowi, długoletniemu kierownikowi Katedry Analizy Matematycznej za wyrozumiałą życzliwość, z jaką słuchał podczas Seminarium fragmentów niniejszej rozprawy, a także za cenne uwagi, w szczególności dotyczące uproszczenia dowodu Lematu 3.2.3.

I. Wprowadzenie

1.1. Holomorficznie kontraktywne rodziny funkcji i pseudometryk. Niech E oznacza dysk jednostkowy w $\mathbb{C}$ (lista stosowanych symboli znajduje się na końcu niniejszej pracy). Zdefiniujmy

$$m(\lambda_1, \lambda_2) := \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \overline{\lambda}_1\lambda_2}\right|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in E,$$
$$\gamma(\lambda; X) := \frac{|X|}{1 - |\lambda|^2}, \quad \lambda \in E, \ X \in \mathbb{C}.$$

Funkcję m nazywamy *odległością Möbiusa*. Wprowadźmy też następującą *odległość Poincarégo*

$$p := \tanh^{-1} m.$$

Punktem wyjścia do rozważania rodzin funkcji holomorficznie kontraktywnych jest następujące

Twierdzenie 1.1.1 (Lemat Schwarza–Picka). *Niech $f \in \mathcal{O}(E, E)$. Wtedy*

(a) $$p(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) \leq p(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in E,$$

(b) $$\gamma(f(\lambda); f'(\lambda)) \leq \gamma(\lambda; 1), \quad \lambda \in E.$$

Ponadto, jeśli w (a) *zachodzi równość dla pewnych $\lambda_1 \neq \lambda_2$ lub w* (b) *zachodzi równość dla pewnego λ, to nierówności w* (a) *i* (b) *stają się równościami.*

Okazuje się, że istnieją analogony funkcji p i γ, dla których wersja Lematu Schwarza–Picka jest prawdziwa w innych obszarach.

Zanim podamy przykłady takich funkcji, wprowadzimy pewną pomocniczą definicję. Niech $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, gdzie X jest niepustym zbiorem, nazywamy *pseudoodległością*, jeśli

- $d(x, x) = 0, \ x \in X$;
- $d(x, y) = d(y, x), \ x, y \in X$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ x, y, z \in X$.

Pseudoodległość d nazywamy odległością, jeśli spełnia dodatkowo warunek

- $d(x, y) > 0, \ x, y \in X, \ x \neq y$.

W latach dwudziestych ubiegłego wieku Carathéodory zdefiniował dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ następującą funkcję (zob. [Car 27]):

$$c_D(z, w) := \sup\{p(f(z), f(w)) : f \in \mathcal{O}(D, E)\}, \quad z, w \in D.$$

Funkcję c_D nazywamy *pseudoodległością Carathéodory'ego obszaru* D. Wprost z definicji i Lematu Schwarza–Picka wynika, że $c_E = p$ oraz $c_G(F(z), F(w)) \leq c_D(z, w)$ dla dowolnego odwzorowania $F \in \mathcal{O}(D, G)$, gdzie D, G są obszarami w $\mathbb{C}^n$. Od teraz, aż do końca pracy, przez D, G będziemy oznaczać obszary w $\mathbb{C}^n$.

Konstrukcja Carathéodory'ego prowadzi nas do zdefiniowania rodziny funkcji holomorficznie kontraktywnych.

Rodzinę funkcji $d := (d_D)_{D \text{ obszar w } \mathbb{C}^n}$, gdzie $d_D : D \times D \to \mathbb{R}_+$, nazywamy *holomorficznie kontraktywną*, jeśli

$$d_E = p, \tag{1.1.1}$$

$$d_G(F(z), F(w)) \le d_D(z, w), \quad F \in \mathcal{O}(D, G),\ z, w \in D. \tag{1.1.2}$$

Własność (1.1.1) odgrywa jedynie rolę uniformizacji, natomiast kluczową jest własność (1.1.2) mówiąca, że odwzorowania holomorficzne są *kontrakcjami* ze względu na funkcje d_D i d_G. Zauważmy, że w przypadku, kiedy odwzorowanie F jest biholomorficzne, nierówność w (1.1.2) staje się równością.

Oczywiście, pseudoodległość Carathéodory'ego tworzy rodzinę funkcji holomorficznie kontraktywnych. W dodatku, z uwagi na Lemat Schwarza–Picka, jest ona „najmniejszą" spośród wszystkich rodzin funkcji holomorficznie kontraktywnych. Oznacza to, że dla dowolnej rodziny d takich funkcji zachodzi nierówność:

$$c_D \le d_D, \quad D \text{ jest obszarem w } \mathbb{C}^n. \tag{1.1.3}$$

Zajmijmy się teraz odpowiednikiem funkcji γ. Zanim to jednak zrobimy, przyjmijmy kolejną pomocniczą definicję.

Funkcję $\delta_D : D \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ nazywamy *pseudometryką*, jeśli $\delta_D(z; \lambda X) = |\lambda| \delta_D(z; X)$ dla wszystkich $(z, X) \in D \times \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

W latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia Reiffen zdefiniował dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ następującą funkcję (zob. [Rei 65]):

$$\gamma_D(z; X) := \sup\{\gamma(f(z); f'(z)X) : f \in \mathcal{O}(D, E)\}, \quad z \in D,\ X \in \mathbb{C}^n.$$

Funkcję γ_D nazywamy *pseudometryką Carathéodory'ego–Reiffena obszaru* D. Z definicji oraz Lematu Schwarza–Picka wynika, że $\gamma_E = \gamma$ oraz $\gamma_G(F(z); F'(z)X) \le \gamma_D(z; X)$ dla dowolnego odwzorowania $F \in \mathcal{O}(D, G)$, gdzie D, G są obszarami w $\mathbb{C}^n$.

Podobnie jak w przypadku konstrukcji Carathéodory'ego powyższa definicja prowadzi do zdefiniowania rodziny pseudometryk holomorficznie kontraktywnych.

Rodzinę $\delta := (\delta_D)_{D \text{ obszar w } \mathbb{C}^n}$, gdzie $\delta_D : D \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ jest pseudometryką, nazywamy *holomorficznie kontraktywną rodziną pseudometryk*, jeśli

$$\delta_E = \gamma, \tag{1.1.4}$$

$$\delta_G(F(z); F'(z)X) \le \delta_D(z; X), \quad F \in \mathcal{O}(D, G),\ z \in D,\ X \in \mathbb{C}^n. \tag{1.1.5}$$

Podobnie jak w przypadku pseudoodległości, własność (1.1.4) odgrywa rolę uniformizacji, natomiast własność (1.1.5) mówi, że odwzorowania holomorficzne są *kontrakcjami* ze względu na pseudometryki δ_D i δ_G. Zauważmy, że w przypadku, kiedy odwzorowanie F jest biholomorficzne, nierówność w (1.1.5) staje się równością.

Oczywiście, pseudometryka Carathéodory'ego–Reiffena tworzy rodzinę funkcji holomorficznie kontraktywnych. W dodatku, z uwagi na Lemat Schwarza–Picka, jest ona „najmniejszą" spośród wszystkich rodzin pseudometryk holomorficznie kontraktywnych, tzn. dla dowolnej rodziny δ takich pseudometryk zachodzi nierówność:

$$\gamma_D \leq \delta_D, \quad D \text{ obszar w } \mathbb{C}^n. \tag{1.1.6}$$

Spośród licznych własności pseudoodległości Carathéodory'ego oraz pseudometryki Carathéodory'ego–Reiffena w poniższym twierdzeniu zebraliśmy te, które wykorzystamy w dalszych częściach pracy.

Twierdzenie 1.1.2. ([Jar-Pfl 93]) *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie dowolnym obszarem.*

(a) *Dla dowolnych punktów $z, w \in D$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(D, E)$ taka, że $p(f(z), f(w)) = c_D(z, w)$.*

(b) *c_D jest funkcją ciągłą.*

(c) *$c_{E_*} = c_E|_{E_* \times E_*}$, gdzie $E_* := E \setminus \{0\}$.*

(d) *Dla dowolnych $z \in D$, $X \in \mathbb{C}^n$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(D, E)$ taka, że $f(z) = 0$ oraz $|f'(z)X| = \gamma_D(z; X)$.*

(e) *γ jest funkcją ciągłą.*

(f) $\lim\limits_{\substack{z', z'' \to z \\ z' \neq z'' \\ \frac{z'-z''}{\|z'-z''\|} \to X}} \frac{c_D(z', z'')}{\|z' - z''\|} = \gamma_D(z; X)$ dla dowolnych $z \in D$, $X \in \mathbb{C}^n$, $\|X\| = 1$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ zdefiniowaną dla $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ jako $\|z\| := (\sum_{j=1}^n |z_j|^2)^{1/2}$.

Funkcję $f \in \mathcal{O}(D, E)$ spełniającą własność (a) (odp. (d)) nazywamy *ekstremalną dla c_D* (odp. γ_D).

Można definiować wiele rozmaitych rodzin pseudoodległości oraz pseudometryk holomorficznie kontraktywnych. Poniżej przedstawiamy wyłącznie dwa przykłady konstrukcji takich pseudometryk, które będą miały dla nas szczególnie duże znaczenie.

1.2. Funkcje Möbiusa i pseudometryki Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów. Dla $k \in \mathbb{N}$ (przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$), oraz obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ niech

$$m_D^{(k)}(z, w) := \sup\{|f(w)|^{1/k} : f \in \mathcal{O}(D, E),\ \operatorname{ord}_z \leq k\}, \quad z, w \in D,$$

gdzie $\operatorname{ord}_z f$ oznacza krotność zera funkcji f w punkcie z. Funkcję $m_D^{(k)}$ nazywamy *k-tą funkcją Möbiusa obszaru D* lub *funkcją Möbiusa rzędu k obszaru D*. Jest to naturalne uogólnienie funkcji Möbiusa, gdyż $m_E^{(1)} = m$.

Poniżej przedstawimy kilka podstawowych własności funkcji $m_D^{(k)}$.

Twierdzenie 1.2.1. ([Jar-Pfl 93], [Niv 95]) *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie dowolnym obszarem, $k, l \in \mathbb{N}$.*

(a) *Dla dowolnych punktów $z, w \in D$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(D, E)$ taka, że $\operatorname{ord}_z f \geq k$ oraz $|f(z)|^{1/k} = m_D^{(k)}(z, w)$.*

(b) *Funkcja* $m_D^{(k)}(z,\cdot)$ *jest ciągła.*

(c) *Funkcja* $m_D^{(k)}$ *jest półciągła z góry.*

(d) *Jeśli obszar* D *jest biholomorficzny z pewnym obszarem ograniczonym, to* $m_D^{(k)}$ *jest funkcją ciągłą.*

(e) $km_D^{(k)}+lm_D^{(l)}\le (k+l)m_D^{(k+l)}$. *W szczególności,* $m_D^{(k)}\le m_D^{(kl)}$.

Funkcję $f\in\mathcal{O}(D,E)$ spełniającą własność (a) nazywamy *ekstremalną dla* $m_D^{(k)}$. Zauważmy, że dla $k\ge 2$ funkcja $m_D^{(k)}$ nie musi być ani symetryczna ani ciągła. Przykład obrazujący te własności można znaleźć wśród elementarnych obszarów n-kołowych (zob. Twierdzenie 1.2.3). Pomimo własności z Twierdzenia 1.2.1 (e) nie wiadomo, czy funkcje $m_D^{(k)}$ tworzą ciąg monotoniczny.

Nietrudno jednak wykazać, korzystając z Twierdzenia 1.2.1 (e), że istnieje następująca granica

$$c_D^{\infty}:=\lim_{k\to\infty} m_D^{(k)}.$$

Funkcję c_D^{∞} nazywamy *osobliwą funkcją Carathéodory'ego obszaru* D.

Przejdźmy teraz do definicji pseudometryki, mającej kluczowe znaczenie dla naszych rozważań. Wcześniej wprowadzimy jednak pewne wygodne oznaczenia. I tak

- jeśli $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, to $|\beta|:=\sum_{j=1}^n\beta_j$;
- jeśli $k\in\mathbb{N}$, to $I_k^n:=\{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=k\}$, $\iota_k^n:=\#I_k^n$;
- jeśli $X=(X_1,...,X_n)\in\mathbb{C}^n$, $\beta\in\mathbb{Z}^n$, to $X^\beta:=\prod_{j=1}^n X_j^{\beta_j}$;
- jeśli $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, $f\in\mathcal{O}(D,E)$, to $\mathcal{D}^\beta f:=\frac{\partial^{|\beta|}f}{\partial z_1^{\beta_1}...\partial z_n^{\beta_n}}$.

Dla $k\in\mathbb{N}$ oraz $f\in\mathcal{O}(D,E)$ definiujemy

$$f_{(k)}(z)X:=\sum_{\beta\in I_k^n}\frac{1}{\beta!}\mathcal{D}^\beta f(z)X^\beta,\quad z\in D,\ X\in\mathbb{C}^n.$$

Niech

$$\gamma_D^{(k)}(z;X)=\sup\{|f_{(k)}(z)X|^{1/k}:f\in\mathcal{O}(D,E),\ \operatorname{ord}_z f\ge k\},\quad z\in D,\ X\in\mathbb{C}^n.$$

Funkcję $\gamma_D^{(k)}$ nazywamy *pseudometryką Carathéodory'ego–Reiffena rzędu* k *obszaru* D (zob. [Jar-Pfl 91]). Zauważmy, że $\gamma_D^{(1)}=\gamma_D$ oraz, z uwagi na (1.1.6), $\gamma_D\le\gamma_D^{(k)}$ dla $k\ge 1$.

Spośród wielu elementarnych własności pseudometryki Carathéodory'rgo–Reiffena rzędu k w poniższym twierdzeniu zebraliśmy te, które wykorzystamy w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 1.2.2. ([Jar-Pfl 93], [Niv 95]) *Niech* $D\subset\mathbb{C}^n$ *będzie dowolnym obszarem,* $k,l\in\mathbb{N}$.

(a) *Dla dowolnych* $z\in D$ *oraz* $X\in\mathbb{C}^n$ *istnieje funkcja* $f\in\mathcal{O}(D,E)$ *taka, że* $\operatorname{ord}_z f\ge k$ *oraz* $|f_{(k)}(z)X|^{1/k}=\gamma_D^{(k)}(z;X)$.

(b) $\gamma_D^{(k)}(z;\cdot)$ *jest funkcją ciągłą.*

(c) $\gamma_D^{(k)}$ *jest funkcją półciągłą z góry.*

(d) *Jeśli obszar* D *jest biholomorficzny z pewnym obszarem ograniczonym, to* $\gamma_D^{(k)}$ *jest funkcją ciągłą. Co więcej* ([Nik 00]), *jeśli* $\gamma_D(z;X) > 0$ *dla dowolnych* $z \in D,\ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, *to* $\gamma_D^{(k)}$ *jest funkcją ciągłą.*

(e) $(\gamma_D^{(k)})^k(\gamma_D^{(l)})^l \leq (\gamma_D^{(k+l)})^{k+l}$. *W szczególności,* $\gamma_D^{(k)} \leq \gamma_D^{(kl)}$.

(f) $\gamma_D^{(k)}(z;X) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{|\lambda|}m_D^{(k)}(z, z+\lambda X)$.

(g) $\lim\limits_{\substack{z',z''\to z\\ z'\neq z''\\ \frac{z'-z''}{\|z'-z''\|}\to X}} \frac{m_D^{(k)}(z',z'')}{\|z'-z''\|} = \gamma_D^{(k)}(z;X)$ *dla dowolnych* $z\in D,\ X\in\mathbb{C}^n,\ \|X\| = 1$.

Funkcję $f \in \mathcal{O}(D,E)$ spełniającą własność (a) nazywamy *ekstremalną dla* $\gamma_D^{(k)}$. Zwracamy uwagę, że w przypadku $k \geq 2$ funkcja $\gamma_D^{(k)}$ generalnie nie musi być ciągła (zob. Twierdzenie 1.2.3). Pomimo własności z Twierdzenia 1.2.2 (e) wiadomo, że funkcje $\gamma_D^{(k)}$ nie tworzą ciągu monotonicznego ze względu na k (zob. Twierdzenie 1.2.3).

Podobnie jak w przypadku funkcji Möbiusa wyższych rzędów można wykazać, korzystając z Twierdzenia 1.2.2 (e), że istnieje granica

$$\gamma_D^{\infty} := \lim_{k\to\infty}\gamma_D^{(k)}.$$

Funkcję γ_D^{∞} nazywamy *osobliwą pseudometryką Carathéodory'ego obszaru* D.

Poniższe twierdzenie jest przykładem ilustrującym fakt, iż funkcje $m_D^{(k)}$, $\gamma_D^{(k)}$ nie są ciągłe w ogólnym przypadku. Pokażemy, że funkcje te nie są ciągłe w klasie elementarnych obszarów n-kołowych. Jest to klasa obszarów, która dostarcza także przykładów na inne własności funkcji $m_D^{(k)}$ i $\gamma_D^{(k)}$.

Niech

$$D_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^n : |z^\alpha| < 1\},$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ są względnie pierwsze ($n \geq 2$). Obszar D_α nazywamy *elementarnym obszarem n-kołowym* lub *elementarnym obszarem Reinhardta.* Przyjmijmy $\phi(z) := z^\alpha$, $r(z) := \mathrm{ord}_z(\phi - \phi(z))$. Ponadto, zdefiniujmy $D_\alpha^0 := \{(z_1, ..., z_n) \in D_\alpha : z_1...z_n \neq 0\}$. Dla $t > 0$ niech

$$E_+(t) := \begin{cases} t & \text{jeśli } t \in \mathbb{N} \\ 1 + [t] & \text{jeśli } t \notin \mathbb{N} \end{cases},$$

gdzie $[t]$ oznacza część całkowitą liczby $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.2.3. ([Jar-Pfl 93]) *Dla* $z \in D_\alpha$ *niech* $r := r(z)$. *Wówczas dla dowolnego* $k \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$m_{D_\alpha}^{(k)}(z,w) = [m(\phi(z), \phi(w))]^{\frac{1}{k}E_+(\frac{k}{r})}, \quad z, w \in D,$$

$$\gamma_{D_\alpha}^{(k)}(z;X) = \begin{cases} [\gamma_E(\phi(z); \phi_{(r)}(z)X)]^{\frac{1}{r}} & \textit{jeśli } r|k \\ 0 & \textit{jeśli } r \not| k \end{cases}, \quad z \in D_\alpha,\ X \in \mathbb{C}^n.$$

Uwaga 1.2.4. (a) Jeśli $z \in D^0_\alpha$, to $r(z) = 1$.

(b) ([Jar-Pfl 93]) Jeśli $k \geq 2$, to $m^{(k)}_{D_\alpha}$ nie jest funkcją symetryczną. Istotnie, jeśli $z \in D^0_\alpha$, to

$$m^{(k)}_{D_\alpha}(0, z) = |\phi(z)|^{\frac{1}{k}E_+(\frac{k}{|\alpha|})} > |\phi(z)| = m^{(k)}_{D_\alpha}(z, 0).$$

(c) ([Jar-Pfl 93]) Jeśli $k \geq 2$, to $m^{(k)}_{D_\alpha}$ nie jest funkcją ciągłą. Istotnie, jeśli $D^0_\alpha \ni z_j \to 0$, to

$$m^{(k)}_{D_\alpha}(z_j, z) = m(\phi(z_j), \phi(z)) \to |\phi(z)| < m^{(k)}_{D_\alpha}(0, z).$$

(d) ([Jar-Pfl 93]) Jeśli $k \geq 2$, to istnieje wektor $X \in \mathbb{C}^n$ taki, że $\gamma^{(k)}_{D_\alpha}(\cdot; X)$ nie jest funkcją ciągłą. Istotnie, jeśli $D^0_\alpha \ni z_j \to 0$, to

$$\gamma^{(k)}_{D_\alpha}(z_j; X) = \gamma_E(\phi(z_j); \phi'(z_j)X) \to |\phi'(0)X|.$$

Z drugiej strony, $\gamma^{(|\alpha|)}_{D_\alpha}(0; X) = |X^\alpha|^{1/|\alpha|}$. Porównując zbiory zer funkcji $X \mapsto \phi'(0)X$ oraz $X \mapsto X^\alpha$ widzimy, że istnieje wektor $X_0 \in \mathbb{C}^n$ taki, że $|\phi'(0)X_0| \neq X^{1/|\alpha|}$.

(e) Ciąg $(\gamma^{(k)}_{D_\alpha})_k$ nie jest monotoniczny (tj. nie jest rosnący). Istotnie, zauważmy, że dla dowolnego wektora $X \in \mathbb{C}^n_*$, gdzie $\mathbb{C}^n_* := (\mathbb{C}_*)^n$, $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, mamy

$$\gamma^{(|\alpha|)}_{D_\alpha}(0; X) = |X^\alpha|^{\frac{1}{|\alpha|}} > 0 = \gamma^{(|\alpha|+1)}_{D_\alpha}(0; X),$$

o ile $|\alpha| > 1$.

1.3. Funkcja Greena i pseudometryka Azukawy. Kolejną, istotną dla dalszych rozważań, pseudometryką holomorficznie kontraktywną jest pseudometryka, której definicję zaproponował w 1986 roku K. Azukawa. Zaczniemy jednak od wprowadzenia plurizespolonej wersji funkcji Greena, kluczowego pojęcia teorii pluripotencjału.

W roku 1985 M. Klimek wprowadził następującą definicję (zob [Kli 85]). Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ oraz $z \in D$ niech

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_D(z) := \{u : D \to [0, 1) : \log u \in \mathcal{PSH}(D),\\ \exists_{M,r>0:}\ u(w) \leq M\|w - z\|, w \in B(z, r) \subset D\}.\end{aligned}$$

Definiujemy

$$g_D(z, w) := \sup\{u(w) : u \in \mathcal{K}_D(z)\}, \quad z, w \in D.$$

Funkcję g_D nazywamy *plurizespoloną funkcją Greena obszaru D.*

Dalej, przyjmijmy (zob. [Azu 86])

$$A_D(z; X) := \limsup_{\lambda \to 0} \frac{1}{|\lambda|} g_D(z, z + \lambda X), \quad z \in D,\ X \in \mathbb{C}^n.$$

Funkcję A_D nazywamy *pseudometryką Azukawy obszaru D.* W poniższym twierdzeniu zgromadzone są podstawowe własności funkcji Greena i pseudometryki Azukawy.

Twierdzenie 1.3.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie dowolnym obszarem.*

(a) (zob. [Kli 85]) *Jeśli $P \subset D$ jest domkniętym zbiorem pluripolarnym, to*

$$g_{D\setminus P} = g_D|_{(D\setminus P)\times(D\setminus P)},$$
$$A_{D\setminus P} = A_D|_{(D\setminus P)\times\mathbb{C}^n}.$$

(b) *Jeśli D jest obszarem ograniczonym, to dla dowolnego $w \in D$ funkcja $g_D(\cdot, w)$ jest ciągła.*

(c) *Dla dowolnego $w \in D$ funkcja $g_D(\cdot, w)$ jest półciągła z góry.*

(d) (zob. [Dem 87], [Kli 91]) *Jeśli D jest obszarem hiperwypukłym, to funkcja g_D jest ciągła na $D \times \overline{D}$, gdzie $g_D|_{D\times\partial D} := 1$.*

(e) (zob. [Kli 89]) *Jeśli D jest obszarem pseudowypukłym, to funkcja g_D jest półciągła z góry.*

(f) (zob. [Azu 84], [Kli 89]) *Dla dowolnego $z \in D$ funkcja $A_D(z;\cdot)$ jest półciągła z góry.*

(g) (zob. [Kli89]) *Jeśli funkcja g_D jest półciągła z góry, to funkcja A_D jest półciągła z góry.*

Warto zauważyć, że dla dowolnego obszaru D, na mocy definicji, zachodzą następujące nierówności

$$m^{(k)} \le c_D^{\infty} \le g_D, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.3.1}$$

$$\gamma^{(k)} \le \gamma_D^{\infty} \le A_D, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.3.2}$$

Okazuje się, że prawe nierówności we wzorach (1.3.1) oraz (1.3.2) stają się równościami, jeśli na przykład D jest obszarem ściśle hiperwypukłym. Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem rezultatu L. Lemperta z roku 1983 (zob. [Lem 83]), które dotyczyło klasy obszarów ściśle wypukłych.

Twierdzenie 1.3.3. ([Niv 95], [Nik 00]) *Jeśli $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem ograniczonym i ściśle hiperwypukłym, to $c_D^{\infty} = g_D$ oraz $\gamma_D^{\infty} = A_D$.*

Warto nadmienić, iż w w powyższym twierdzeniu S. Nivoche wykazała równość $\gamma_D^{\infty} = A_D$ poza pewnym zbiorem miary zero. Natomiast równość obu funkcji na całym obszarze D udowodnił w roku 2000 N. Nikolov.

Niedawno N. Nikolov i W. Zwonek wykazali, że wspomniane równości zachodzą także w szerokiej klasie obszarów płaskich. Niestety, z drugiej strony, równości owe nie są prawdziwe już w klasie płaskich obszarów hiperwypukłych. Mówi o tym poniższe

Twierdzenie 1.3.4. ([Nik-Zwo 02]) (a) *Niech D będzie płaskim obszarem, dla którego zbiór jednopunktowych składowych spójnych jego dopełnienia jest zbiorem polarnym. Wtedy*

$$c_D^{\infty} = g_D, \quad \gamma_D^{\infty} = A_D.$$

(b) *Istnieje hiperwypukły obszar płaski $D \subset \mathbb{C}$ taki, że $c_D^{\infty} \ne g_D$ oraz $\gamma_D^{\infty} \ne A_D$.*

1.4. Operatory $d \to d^i$ oraz $\delta \to \int\delta$. Operatory te pozwalają na „produkowanie" nowych pseudoodległości. Zarówno z pseudoodległości już istniejących (operator $d \to d^i$), jak i z pseudometryk (operator $\delta \to \int\delta$).

Zajmiemy się najpierw operatorem $d \to d^i$. Niech $d = (d_D)$ będzie rodziną pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych. Dla krzywej ciągłej $\alpha : [0,1] \to D$ przyjmijmy

$$L_{d_D}(\alpha) := \sup\{\sum_{j=1}^{N} d_D(\alpha(t_{j-1}), \alpha(t_j)) : N \in \mathbb{N},\ 0 = t_0 < ... < t_N = 1\}.$$

Liczbę $L_{d_D}(\alpha) \in [0,\infty]$ nazywamy *d_D-długością krzywej α*. Jeśli $L_{d_D}(\alpha) < \infty$, to mówimy, że α jest krzywą *d_D-prostowalną* (dla pseudoodległości $d_D(z,w) = \|z-w\|$ krzywą d_D-prostowalną będziemy nazywać po prostu $\|\cdot\|$-prostowalną). Zdefiniujmy

$$d_D^i(z,w) := \inf\{L_{d_D}(\alpha) : \alpha \text{ jest krzywą } \|\cdot\|\text{-prostowalną w } D \text{ łączącą } z \text{ i } w\} \qquad z,w \in D.$$

Oczywiście $d_D \le d_D^i$.

Twierdzenie 1.4.1. ([Jar-Pfl 93]) *Niech $d = (d_D)$ będzie rodziną pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych.*

(a) *Jeśli α jest krzywą $\|\cdot\|$-prostowalną, to jest także krzywą d_D-prostowalną.*

(b) *Rodzina $d^i = (d_D^i)$, gdzie $d_D^i : D \times D \to \mathbb{R}_+$, jest rodziną pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych spełniającą warunek*

$$(1.4.1) \qquad \forall_{z\in D}\ \exists_{M,r>0:}\ d_D(z',z'') \le M\|z'-z''\|, \quad z',z'' \in B(z,r) \subset D,$$

gdzie $B(z,r) := \{w \in \mathbb{C}^n : \|w-z\| < r\}$.

(c) $L_{d_D^i} = L_{d_D}$*; w szczególności, $(d_D^i)^i = d_D^i$.*

Pseudoodległość d_D^i nazywamy *wewnętrzną pseudoodległością dla d_D*. Pseudoodległość d_D nazywamy *wewnętrzną*, jeśli $d_D = d_D^i$.

Przejdźmy do operatora $\delta \to \int\delta$. Niech δ będzie rodziną pseudometryk holomorficznie kontraktywnych. Dla krzywej $\alpha : [0,1] \to D$ kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ (piszemy $\alpha \in \mathcal{C}_p^1([0,1],D)$) przyjmijmy

$$L_{\delta_D}(\alpha) := \int_0^1 \delta_D(\alpha(t);\alpha'(t))dt.$$

Liczbę $L_{\delta_D}(\alpha)$ nazywamy *δ_D-długością krzywej α*. Definiujemy

$$\int\delta_D(z,w) := \inf\{L_{\delta_D}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{C}_p^1([0,1],D),\ \alpha(0) = z, \alpha(1) = w\}, \quad z,w \in D.$$

Funkcję $\int\delta_D$ nazywamy *formą całkową δ_D*.

Twierdzenie 1.4.2. ([Jar-Pfl 93]) *Niech $\delta = (\delta_D)$ będzie rodziną pseudometryk holomorficznie kontraktywnych. Wtedy*

(a) *rodzinę $\int\delta = (\int\delta_D)$, gdzie $\int\delta_D : D \times D \to \mathbb{R}_+$, jest rodziną pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych spełniającą warunek* (1.4.1)*;*

(b) *$L_{\int\delta_D}(\alpha) \leq L_{\delta_D}(\alpha)$ dla dowolnej krzywej $\alpha \in \mathcal{C}^1_p([0,1], D)$; w szczególności, $(\int\delta_D)^i = \int\delta_D$.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że istotnie operator $\delta \to \int\delta$ pozwala na tworzenie z rodzin pseudometryk holomorficznie kontraktywnych rodziny pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych, i to w dodatku pseudoodległości wewnętrznych. Nietrudno także zauważyć, że operator $\delta \to \int\delta$ jest operatorem monotonicznym. Mówi o tym poniższe

Twierdzenie 1.4.3. *Niech δ^1_D, δ^2_D będą dwoma pseudometrykami holomorficznie kontraktywnymi takimi, że $\delta^1_D \leq \delta^2_D$. Wtedy $\int\delta^1_D \leq \int\delta^2_D$.*

W dalszej części pracy zajmować się będziemy głównie pseudoodległością zdefiniowaną jako forma całkowa pseudometryk Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów, tzn.

$$\int\gamma^{(k)}_D(z,w) := \inf\{L_{\gamma^{(k)}_D}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{C}^1_p([0,1], D),\ \alpha(0) = z, \alpha(1) = w\}, \quad z, w \in D,$$

Z uwagi na Twierdzenie 1.4.2, $\int\gamma^{(k)}_D$ będziemy też nazywać *wewnętrzną pseudoodległością Carathéodory'ego–Reiffena rzędu k.*

Nietrudno pokazać, wykorzystując Twierdzenie 1.1.2 (f), że $L_{c_D}(\alpha) = L_{\gamma^{(1)}_D}(\alpha)$ dla dowolnej krzywej $\alpha \in \mathcal{C}^1_p([0,1], D)$. W konsekwencji, $c^i_D = \int\gamma^{(1)}_D$.

S. Kobayashi zwrócił uwagę (zob. [Kob 98]), że warto rozważać pseudoodległość holomorficznie kontraktywną zdefiniowaną jako formę całkową pseudometryki Azukawy, tzn. $\int A_D$. Jest ona obiektem konkurencyjnym do plurizespolonej funkcji Greena g_D, a przy tym $\int A_D$ jest funkcją bardziej regularną — jest pseudoodległością, i do tego wewnętrzną. Z tych względów pożądane wydaje się dokładniejsze zbadanie własności tej funkcji.

W tym miejscu zauważmy tylko, że dzięki nierównościom (1.1.3), (1.1.6) i (1.3.2) oraz Twierdzeniom 1.4.1 i 1.4.3 dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ zachodzą nierówności

$$c_D \leq c^i_D = \int\gamma^{(1)}_D \leq \int\gamma^{(k)}_D \leq \int\gamma^{\infty}_D \leq \int A_D, \quad k \geq 1. \tag{1.4.2}$$

1.5. Hiperboliczność ze względu na odległości niezmiennicze. Niech $d = (d_D)$ będzie rodziną pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych. Mówimy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *d_D-hiperboliczny*, jeśli $d_D(z,w) > 0$ dla dowolnych $z, w \in D$, $z \neq w$. Innymi słowy, obszar D jest d_D-hiperboliczny, jeśli d_D jest odległością.

Zauważmy, że każdy obszar ograniczony D jest d_D-hiperboliczny. Tym samym, dzięki biholomorficznej niezmienniczości pseudoodległości d_D, każdy obszar biholomorficzny z obszarem ograniczonym jest d_D-hiperboliczny.

Dalej, powiemy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *hiperboliczny w sensie Brody'ego* (piszemy w skrócie *B-hiperboliczny*), jeśli każde odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{C} \to D$ jest stałe.

Zauważmy, iż, z uwagi na nierówność (1.4.2),

$$\begin{gathered}D \text{ jest } c_D\text{-hiperboliczny } \Rightarrow D \text{ jest } c_D^i\text{-hiperboliczny}\\ \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{(k)}\text{-hiperboliczny} \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{\infty}\text{-hiperboliczny}\\ \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int A_D\text{-hiperboliczny} \Rightarrow D \text{ jest } B\text{-hiperboliczny.}\end{gathered}$$

W przypadku obszarów płaskich, tzn. jeśli $D \subset \mathbb{C}$, mamy pełną charakteryzację obszarów hiperbolicznych z uwagi na wspomniane wyżej pseudoodległości. Okazuje się, że w klasie obszarów płaskich pojęcia c_D oraz $\int\gamma_D^{(k)}$-hiperboliczności są tożsame, a jedynymi obszarami hiperbolicznymi z uwagi na owe pseudoodległości są obszary nie będące obszarami Liouville'a.

Zanim przedstawimy wspomnianą charakteryzację wprowadźmy pewne pomocnicze pojęcia.

Niech $\delta = (\delta_D)$ będzie rodziną pseudometryk holomorficznie kontraktywnych. Mówimy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *δ_D-hiperboliczny*, jeśli $\delta_D(z;\cdot)$ jest normą dla dowolnego punktu $z \in D$.

Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *obszarem Liouville'a*, jeśli wszystkie funkcje holomorficzne i ograniczone na D są stałe (zapisujemy to symbolem $H^\infty(D) \simeq \mathbb{C}$, gdzie $H^\infty(D)$ oznacza klasę funkcji holomorficznych i ograniczonych na D). Jeśli D nie jest obszarem Liouville'a, to piszemy krótko $H^\infty(D) \not\simeq \mathbb{C}$.

Twierdzenie 1.5.1. ([Jar-Pfl 93], [Sib 75]) *Jeśli $D \subset \mathbb{C}$ jest dowolnym obszarem, to następujące warunki są równoważne:*

(i) *D jest c_D-hiperboliczny;*

(ii) *D jest $\gamma_D^{(k)}$-hiperboliczny, $k \in \mathbb{N}$;*

(iii) *D jest $\int\gamma_D^{(k)}$-hiperboliczny, $k \in \mathbb{N}$;*

(iv) *$H^\infty(D) \not\simeq \mathbb{C}$.*

1.6. Zupełność ze względu na odległości niezmiennicze. Niech $d = (d_D)$ będzie rodziną pseudoodległości holomorficznie kontraktywnych. W przypadku, kiedy funkcja d_D jest odległością, w naturalny sposób można wprowadzić pojęcie zupełności.

Przypomnijmy, że d_D-hiperboliczny obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *d_D-zupełnym*, jeśli dowolny d_D-ciąg Cauchy'ego $(z^j)_{j=1}^\infty \subset D$ jest zbieżny do pewnego punktu $z^0 \in D$ w topologii naturalnej na D.

Wprowadzimy jeszcze jedno pojęcie blisko związane z pojęciem zupełności. Powiemy mianowicie, że d_D-hiperboliczny obszar D jest *d_D-skończenie zwarty*, jeśli dla dowolnych $z \in D$, $r > 0$, kula $B_{d_D}(z,r) := \{w \in D : d_D(z,w) < r\}$ jest relatywnie zwarta (w naturalnej topologii w D). Łatwo zauważyć, że dla dowolnego obszaru d_D-hiperbolicznego zachodzą związki

$$D \text{ jest } d_D\text{-skończenie zwarty } \Rightarrow D \text{ jest } d_D\text{-zupełny},$$
$$D \text{ jest } c_D\text{-zupełny } \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{(k)}\text{-zupełny}$$
$$\Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{\infty}\text{-zupełny} \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int A_D\text{-zupełny}, \quad k \in \mathbb{N},$$

oraz

$$D \text{ jest } c_D\text{-skończenie zwarty } \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{(k)}\text{-skończenie zwarty}$$
$$\Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{\infty}\text{-skończenie zwarty} \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int A_D\text{-skończenie zwarty}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dzięki Twierdzeniu 1.2.2 (e) otrzymujemy natychmiast dodatkowe zależności. Dla dowolnych liczb $k, l \in \mathbb{N}$,

$$D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{(k)}\text{-zupełny } \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{(kl)}\text{-zupełny},$$
$$D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{(k)}\text{-skończenie zwarty } \Rightarrow D \text{ jest } \textstyle\int\gamma_D^{(kl)}\text{-skończenie zwarty}.$$

Poniższe twierdzenie pozwoli nam w następnym Podrozdziale wymiennie stosować pojęcia zupełności i skończonej zwartości.

Twierdzenie 1.6.1. ([Rin 61], [Coh-Vos 35], [Jar-Pfl 93]) *Niech d_D będzie ciągłą wewnętrzną odległością w obszarze $D \subset \mathbb{C}^n$. Wtedy topologia indukowana przez odległość d_D jest równoważna z topologą naturalną w D. Ponadto, następujące warunki są równoważne:*
(i) *obszar D jest d_D-skończenie zwarty;*
(ii) *obszar D jest d_D-zupełny.*

1.7. Zupełność obszarów typu Zalcmana. W Rozdziale II zajmujemy się zupełnością w szczególnym przypadku, kiedy D jest płaskim obszarem typu Zalcmana. Ponieważ jest to obszar ograniczony, więc jest on c_D-hiperboliczny, a więc także $\int\gamma_D^{(k)}$-hiperboliczny.

Ponieważ, na mocy Twierdzenia 1.4.2, $\int\gamma_D^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, jest ciągłą odległością wewnętrzną, dlatego, dzięki Twierdzeniu 1.6.1, obszar D jest $\int\gamma_D^{(k)}$-zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy D jest $\int\gamma_D^{(k)}$-skończenie zwarty.

Zanim zaprezentujemy główny wynik, przedstawimy następującą definicję. Dla dowolnych ciągów $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (r_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ takich, że $a_j \to 0$, $2r_j < a_j$, dla $j \in \mathbb{N}$ oraz $\overline{B}(a_j, r_j) \cap \overline{B}(a_k, r_k) = \varnothing$ jeśli tylko $j \neq k$, definiujemy

$$D := E_* \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B}(a_j, r_j). \tag{1.7.1}$$

Taki obszar nazywamy obszarem *typu Zalcmana*.

Głównym wynikiem jest następjące

Twierdzenie 1.7.1. (zob. Twierdzenie 2.1.1.) *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje obszar typu Zalcmana D_k, który jest $\int\gamma_{D_k}^{(k+1)}$-zupełny, ale nie jest $\int\gamma_{D_k}^{(k)}$-zupełny.*

Jak zobaczymy w dowodzie Twierdzenia 1.7.1, $\gamma_D^{(k)}$ spełnia pewne specjalne warunki wzrostu. Następujące twierdzenie pokazuje, jak ostrożnie trzeba konstruować odpowiedni obszar. Przyjmijmy $\operatorname{dist}(z, \partial D) := \inf\{\|z - w\| : w \in \partial D\}$.

Twierdzenie 1.7.2. (zob. Twierdzenie 2.2.1.) *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym, $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, i niech $0 \leq \alpha < 1$ będzie taką liczbą, aby $\gamma_D^{(k)}(z; 1) \leq c(\operatorname{dist}(z, \partial D))^{-\alpha}$, $z \in D$, dla pewnej stałej dodatniej c. Wtedy*

$$\gamma_D^{(l)}(z; 1) \leq c'(\operatorname{dist}(z, \partial D))^{-\alpha'}, \quad z \in D,$$

dla pewnych stałych dodatnich c' oraz $\alpha' < 1$.

Ponieważ taki wzrost daje nam niezupełność obszarów typu Zalcmana, otrzymujemy więc

Wniosek 1.7.3. *Jeśli dla dowolnego obszaru typu Zalcmana D istnieją stałe dodatnie c oraz $\alpha < 1$ takie, że*

$$\limsup_{0 > z \to 0} \gamma_D^{(k)}(z; 1) < c|z|^{-\alpha},$$

to D jest $\int\gamma_D^{(l)}$-niezupełny dla dowolnego $l \geq k$.

1.8. Zupełność obszarów Reinhardta. Zaczniemy od następującej definicji. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *Reinhardta* lub *n-kołowym*, jeśli $(\lambda_1 z_1, ..., \lambda_n z_n) \in D$ dla wszystkich punktów $z = (z_1, ..., z_n) \in D$ oraz liczb $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ takich, że $|\lambda_1| = ... = |\lambda_n| = 1$.

Rozważmy macierz $A := (A_k^j)_{j,k=1}^n \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ taką, że rząd macierzy $\operatorname{rank} A = n$ i każdy jej wiersz składa się z liczb względnie pierwszych.

Dla takiej macierzy określamy

$$\Phi_A(z) := z^A = (z^{A^1}, ..., z^{A^n}), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

gdzie A^j oznacza j-ty wiersz macierzy A. Wówczas $\Phi_A \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_*^n, \mathbb{C}_*^n)$ dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.

Poniższe twierdzenie podaje warunek równoważny na biholomorficzność odwzorowania algebraicznego Φ_A.

Twierdzenie 1.8.1. ([Zwo 00b]) *Niech $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Wówczas odwzorowanie $\Phi_A : \mathbb{C}_*^n \to \mathbb{C}_*^n$ jest biholomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $|\det A| = 1$.*

Motywowani powyższym twierdzeniem powiemy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *algebraicznie biholomorficzny z obszarem ograniczonym*, jeśli istnieje macierz $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $|\det A| = 1$, taka, że $\Phi_A(D)$ jest obszarem ograniczonym oraz $(\Phi_A)|_D$ jest biholomorfizmem na obraz.

W Rozdziale III zajmiemy się zupełnością pseudowypukłych obszarów Reinhardta. W tej klasie obszarów pojęcie hiperboliczności jest charakteryzowane w sposób następujący — hiperboliczne są tylko obszary biholomorficzne z obszarami ograniczonymi, o czym mówi następujące

Twierdzenie 1.8.2. ([Zwo 99]) *Niech D będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
(i) *obszar D jest c_D-hiperboliczny;*
(ii) *obszar D jest $\int\gamma_D^{(k)}$-hiperboliczny, $k \in \mathbb{N}$;*
(iii) *obszar D jest B-hiperboliczny;*
(iv) *obszar D jest algebraicznie biholomorficzny z ograniczonym obszarem Reinhardta.*

Z uwagi na powyższe twierdzenie, w klasie pseudowypukłych obszarów Reinhardta wszystkie rozważane wyżej pojęcia hiperboliczności są wzajemnie równoważne. Dlatego w tej klasie obszarów ma sens pojęcie *hiperboliczności* bez żadnych przedrostków, tzn. hiperboliczności w rozumieniu Twierdzenia 1.8.2.

Niech
$$V_j := \{z \in \mathbb{C}^n : z_j = 0\}, \quad j = 1, ..., n.$$
Dotychczasowa charakteryzacja zupełnych pseudowypukłych obszarów Reinhardta przedstawiona jest w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.8.3. ([Pfl 84], [Fu 94], [Zwo 00a], [Zwo 01]) *Niech D będzie hiperbolicznym pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Następujące warunki są równoważne:*
(i) *obszar D jest c_D-skończenie zwarty;*
(ii) *obszar D jest c_D-zupełny;*
(iii) *obszar D jest ograniczony oraz spełniony jest następujący warunek*

$$\text{dla dowolnego } j \in \{1, ..., n\}, \text{ jeśli } \overline{D} \cap V_j \neq \varnothing, \text{ to } D \cap V_j \neq \varnothing; \tag{1.8.1}$$

(iv) *obszar D jest c_D^i-zupełny.*

Pierwszy krok w badaniu równoważności powyższych warunków wykonał P. Pflug, który wykazał (zob. [Pfl 84]), że każdy ograniczony pseudowypukły obszar Reinhardta, który jest c_D-zupełny, jest c_D-skończenie zwarty. Z uwagi na wcześniejsze rozważania wynik ten oznacza równoważność warunków (i) oraz (ii). Dziesięć lat później, w roku 1994 S. Fu podał geometryczny warunek (1.8.1) i udowodnił, że każdy hiperboliczny pseydowypukły obszar Reinhardta spełniający warunek (1.8.1) jest c_D-skończenie zwarty. Dowód równoważności warunków (i), (ii) oraz (iii) zakończył W. Zwonek wykazując w [Zwo 00a] implikację (ii)$\Rightarrow$(iii). Rok później ten sam autor udowodnił równoważność warunku (iv) z pozostałymi trzema warunkami (zob. [Zwo 01]).

Naszym celem jest udowodnienie następującego wyniku.

Twierdznie 1.8.4. (zob. Twierdzenie 3.2.2) *Niech $k \in \mathbb{N}$. Hiperboliczny pseudowypukły obszar Reinhardta D jest $\int\gamma_D^{(k)}$zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest c_D-zupełny.*

Tym samym, do Twierdzenia 1.8.3 można dołożyć piąty równoważny warunek
(v) *obszar D jest $\int\gamma_D^{(k)}$-hiperboliczny, $k \in \mathbb{N}$.*

II. Zupełność obszarów płaskich typu Zalcmana

W Rozdziale II zajmujemy się problemem zupełności obszarów płaskich ze względu na odległości holomorficznie kontraktywne zdefiniowane jako formy całkowe pseudometryk Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów. Celem Podrozdziału 2.1 jest wykazanie istnienia ograniczonego obszaru D w $\mathbb{C}$, który „rozróżnia" zupełność form całkowych pseudometryk Carathéodory'ego–Reiffena wyższych rzędów w tym sensie, że D jest obszarem $\int\gamma_D^{(k+1)}$-zupełnym ale nie $\int\gamma_D^{(k)}$-zupełny. Naszym przykładem jest obszar typu Zalcmana (zobacz definicję (1.7.1)). Pokazujemy także, że dla obszaru typu Zalcmana, który rozróżnia zupełność w powyższym znaczeniu, odpowiednie pseudometryki $\gamma_D^{(k)}$ muszą spełniać specjalny warunek wzrostu (Podrozdział 2.2).

2.1. Zupełność względem odległości $\int\gamma_D^{(k)}$ i $\int\gamma_D^{(k+1)}$. Przedstawimy przykład obszaru typu Zalcmana w $\mathbb{C}$, który jest zupełny ze względu na formę całkową pseudometryki Carathéodory'ego–Reiffena rzędu $k+1$, ale nie jest zupełny ze względu na analogiczną odległość rzędu k.

Główny wynik tego Podrozdziału to następjące

Twierdzenie 2.1.1. ([Zap 02]) *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje obszar typu Zalcmana D_k, który jest $\int\gamma_{D_k}^{(k+1)}$-zupełny, ale nie jest $\int\gamma_{D_k}^{(k)}$-zupełny.*

W istocie powyższy rezultat można nieznacznie wzmocnić. Okazuje się bowiem, że korzystając z tych samych metod można wykazać, iż obszar D_k z Twierdzenia 2.1.1 jest niezupełny dla wszystkich wewnętrznych odległości Carathéodory'ego–Reiffena rzędu $m \leq k$, natomiast jest zupełny dla odległości tego rodzaju rzędów wyższych od k. Mówi o tym poniższe twierdzenie. Dodajmy, że dotychczas nie wiadomo, czy istnieją obszary (np. typu Zalcmana), które są $\int\gamma^{(k)}$-zupełne, ale nie $\int\gamma^{(k+1)}$-zupełne.

Twierdzenie 2.1.2. *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje obszar typu Zalcmana D_k, który jest $\int\gamma_{D_k}^{(l)}$-zupełny, gdzie $l > k$, oraz nie jest $\int\gamma_{D_k}^{(m)}$-zupełny, gdzie $m \leq k$.*

Z powodów, które wyjaśnią się w Podrozdziale 2.2, aby udowodnić Twierdzenie 2.1.2, naturalnym jest rozważanie obszarów, dla których odległość $\int\gamma_D^{(k)}$ ma wzrost ograniczony następująco:

$$\gamma_D^{(k)}(z;1) \leq \frac{c}{\operatorname{dist}(z,\partial D)(-\log\operatorname{dist}(z,\partial D))^\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

dla punktu $z \in D$ takiego, że $\operatorname{dist}(z,\partial D) < 1$.

Zauważmy, że w przypadku płaskim pseudometryka Carathéodory'ego–Reiffena rzędu k przyjmuje nieskomplikowaną postać

$$\gamma_D^{(k)}(z;X) = \sup\left\{\left|\frac{1}{k!}f^{(k)}(z)X\right|^{1/k} : f \in \mathcal{O}(D,E),\ \operatorname{ord}_z f \geq k\right\}, \quad z \in D,\ X \in \mathbb{C}.$$

W dowodzie Twierdzenia 2.1.2 wykorzystamy następujące lematy, których dowody przedstawimy na końcu tego Podrozdziału.

Lemat 2.1.3. *Jeśli D jest obszarem typu Zalcmana, wówczas dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje stała dodatnia $c_1 = c_1(k)$ taka, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(D, E)$ zachodzi wzór*

$$|f^{(k)}(z)| \leq c_1 + c_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{(a_j - z)^{k+1}}, \quad z \in [-1/2, 0).$$

Lemat 2.1.4. *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje obszar typu Zalcmana D_k taki, że*

(a) $$\limsup_{0>z\to 0} \smallint\gamma_{D_k}^{(m)}(-\frac{1}{2}, z) < \infty, \quad m \leq k,$$

(b) $$\lim_{z\to 0} \smallint\gamma_{D_k}^{(l)}(w, z) = \infty, \quad w \in D_k,\ l > k.$$

Dowód Twierdzenia 2.1.2. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i rozważmy obszar D_k taki, jak w Lemacie 2.1.4. Wówczas $\smallint\gamma_{D_k}^{(m)}$-niezupełność obszaru D_k jest bezpośrednią konsekwencją (a).

Teraz udowodnimy, że obszar D_k jest $\smallint\gamma_{D_k}^{(l)}$-zupełny dla $l > k$. W tym celu pokażemy, że

$$\lim_{z\to z_0} \smallint\gamma_{D_k}^{(l)}(w, z) = \infty, \quad z_0 \in \partial D_k,\ w \in D_k,\ l > k.$$

Ustalmy $l > k$ oraz $w \in D_k$. Istnieją trzy możliwości.

1° Jeśli $z_0 = 0$, to, wykorzystując (b), otrzymujemy tezę.

2° Jeśli $|z_0| = 1$, to, dzięki (1.4.2) oraz kontraktywności odległości $\smallint\gamma_D^{(k+1)}$, otrzymujemy

$$\lim_{z\to z_0} \smallint\gamma_{D_k}^{(l)}(w, z) \geq \lim_{z\to z_0} \smallint\gamma_E^{(l)}(w, z) = \lim_{z\to z_0} c_E(w, z) = \infty.$$

3° Jeśli $z_0 \in \partial B(a_j, r_j)$, to, wykorzystując (1.4.2), kontraktywność odległości Carathéodory'ego oraz własność (c) z Twierdzenia 1.1.2, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \smallint\gamma_{D_k}^{(l)}(w, z) &\geq \lim_{z\to z_0} c_{D_k}(w, z) \geq \lim_{z\to z_0} c_{\mathbb{C}\setminus\overline{B}(a_j,r_j)}(w, z)\\ &= \lim_{z\to z_0} c_{E_*}\Big(\frac{r_j}{w - a_j}, \frac{r_j}{z - a_j}\Big) = \lim_{z\to z_0} c_E\Big(\frac{r_j}{w - a_j}, \frac{r_j}{z - a_j}\Big) = \infty,\end{aligned}$$

ponieważ $|r_j/(z - a_j)| \to 1$ gdy $z \to z_0$. $\square$

Pozostały do udowodnienia Lemat 2.1.3 i Lemat 2.1.4.

Dowód Lematu 2.1.3. Niech D będzie obszarem jak w (1.7.1) i niech

$$D_{(s)} := E \setminus \big(\overline{B}(a_{(s)}, r_{(s)}) \cup \bigcup_{j=1}^{s} \overline{B}(a_j, r_j)\big), \quad s \in \mathbb{N},$$

gdzie liczby $a_{(s)}, r_{(s)} > 0$ są wybrane tak, aby $0 \in B(a_{(s)}, r_{(s)})$, $\overline{B}(a_j, r_j) \subset B(a_{(s)}, r_{(s)})$ dla $j > s$ oraz $\overline{B}(a_{(s)}, r_{(s)}) \cap \overline{B}(a_s, r_s) = \varnothing$. Oczywiście $D_{(s)}$ jest obszarem $(s+2)$-spójnym oraz $D_{(s)} \subset D$. Zauważmy, że dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$

$$D_{(s)}^{(\varepsilon)} := (1-\varepsilon)E \setminus \big(\overline{B}(a_{(s)}, r_{(s)} + \varepsilon) \cup \bigcup_{j=1}^{s} \overline{B}(a_j, r_j + \varepsilon)\big) \subset\subset D_{(s)}$$

jest także obszarem $(s+2)$-spójnym. Wówczas, stosując wzór całkowy Cauchy'ego do obszaru $D_{(s)}^{(\varepsilon)}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1-\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta - \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - a_{(s)}| = r_{(s)} + \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \\ - \sum_{j=1}^{s} \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - a_j| = r_j + \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in D_{(s)}^{(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

gdzie $f \in \mathcal{O}(D, E)$. Zatem, dla $z \in [-1/2, a_{(s)} - r_{(s)} - \varepsilon - \sqrt[2(k+1)]{r_{(s)} + \varepsilon})$,

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| \leq & \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\varepsilon}{|(1-\varepsilon)e^{it} - z|^{k+1}} dt \\ & + \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_{(s)} + \varepsilon}{|(r_{(s)} + \varepsilon)e^{it} + a_{(s)} - z|^{k+1}} dt \\ & + \sum_{j=1}^{s} \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_j + \varepsilon}{|(r_j + \varepsilon)e^{it} + a_j - z|^{k+1}} dt \\ \leq & k! \frac{1-\varepsilon}{(1/2 - \varepsilon)^{k+1}} + k! \frac{r_{(s)} + \varepsilon}{(\sqrt[2(k+1)]{r_{(s)} + \varepsilon})^{k+1}} \\ & + k! \sum_{j=1}^{s} \frac{r_j + \varepsilon}{(1/2(a_j - z - \varepsilon))^{k+1}}, \end{aligned}$$

ponieważ $a_j - z - \varepsilon > a_j > 2r_j$. Z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy

$$|f^{(k)}(z)| \leq k! 2^{k+1} + k! \sqrt{r_{(s)}} + k! 2^{k+1} \sum_{j=1}^{s} \frac{r_j}{(a_j - z)^{k+1}},$$

dla $z \in [-1/2, a_{(s)} - r_{(s)} - \sqrt[2(k+1)]{r_{(s)}})$.

Stąd, dzięki dowolności s, otrzymujemy

$$|f^{(k)}(z)| \leq k! 2^{k+1} + k! 2^{k+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{(a_j - z)^{k+1}}, \quad z \in [-1/2, 0),$$

ponieważ $a_{(s)}$ oraz $r_{(s)}$ zmierzają do 0 gdy $s \to \infty$. $\square$

Dowód Lematu 2.1.4. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy

$$D_k := E_* \setminus \bigcup_{j=4}^{\infty} \overline{B}(a_j, r_{k,j}), \tag{2.1.1}$$

gdzie $a_j := 2^{-j}$, $r_{k,j} := 2^{-j}j^{-k-1}$. Nietrudno sprawdzić, że (2.1.1) jest obszarem typu Zalcmana, ponieważ $a_{j+1} + r_{k,j+1} < a_j - r_{k,j}$ oraz $2r_{k,j} < a_j$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, $j \geq 4$.

Ad (a). Ustalmy $m \leq k$. Wystarczy pokazać, że

$$\gamma_{D_k}^{(m)}(z; 1) \leq \frac{c_2}{-z(-\log(-z))^{(k+1)/m}}, \quad z \in [-1/2, 0), \tag{2.1.2}$$

dla pewnej stałej $c_2 = c_2(k) > 0$. Istotnie, dzięki (2.1.2) łatwo otrzymujemy

$$\limsup_{0>z\to 0} \smallint \gamma_{D_k}^{(m)}(-1/2, z) \leq \int_{-1/2}^{0} \gamma_{D_k}^{(m)}(z; 1)dz < \infty,$$

i dowód (a) jest zakończony.

Z kolei (2.1.2) otrzymamy, jeśli pokażemy, że

$$|f^{(m)}(z)| \leq \frac{c_3}{(-z)^m(-\log(-z))^{k+1}}, \quad z \in [-1/2, 0),\ f \in \mathcal{O}(D_k, E), \tag{2.1.3}$$

gdzie $c_3 = c_3(k)$ jest pewną stałą dodatnią.

Teraz udowodnimy (2.1.3). Niech $z \in [-1/2, 0)$. Wówczas istnieją jedyne liczby $N \in \mathbb{N}$ oraz $b \in (1, 2]$ takie, że $z = -b/2^N$. Zauważmy, że

$$\sum_{j=4}^{\infty} \frac{r_{k,j}}{(a_j - z)^{m+1}} \leq \sum_{j=4}^{N} \frac{r_{k,j}}{a_j^{m+1}} + \sum_{j=N}^{\infty} \frac{r_{k,j}}{(-z)^{m+1}}.$$

Oszacujmy oba szeregi. Dla pierwszego mamy

$$\sum_{j=4}^{N} \frac{r_{k,j}}{a_j^{m+1}} = \sum_{j=4}^{N} \frac{2^{jm}}{j^{k+1}} \leq \frac{2^{Nm}}{N^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^j = 9\frac{2^{Nm}}{N^{k+1}}, \tag{2.1.4}$$

zaś drugi szacujemy następujaco:

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{r_{k,j}}{(-z)^{m+1}} = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{2^{N(m+1)}}{2^j j^{k+1} b^{m+1}} \leq \frac{2^{N(m+1)}}{2^N N^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq 2\frac{2^{Nm}}{N^{k+1}}. \tag{2.1.5}$$

Używając oszacowań (2.1.4) i (2.1.5) otrzymujemy

$$\sum_{j=4}^{\infty} \frac{r_{k,j}}{(a_j - z)^{k+1}} \leq \frac{11 \cdot 2^k (\log 2)^{k+1} 2^{Nm}}{b^m (\log(2^N/b))^{k+1}} = \frac{c_4}{(-z)^m(-\log(-z))^{k+1}},$$

gdzie $c_4 = c_4(k) := 11 \cdot 2^k (\log 2)^{k+1}$. Stosując Lemat 2.1.3, uzyskujemy

$$|f^{(m)}(z)| \le c_1 \left(1 + \frac{c_4}{(-z)^m(-\log(-z))^{k+1}}\right) \le \frac{2c_1c_4}{(-z)^m(-\log(-z))^{k+1}},$$

co daje (2.1.3) ze stałą $c_3 := 2c_1c_4$, gdzie $c_1 = k!2^{k+1}$ jest stałą z Lematu 2.1.3 dobrą dla wszystkich liczb $m \le k$.

Ad (b). Ustalmy $l > k$. Pokażemy, że

$$\gamma_{D_k}^{(l)}(z;1) \ge \frac{c_5}{|z|\log(1/|z|)}, \quad |z| < 1/4, \tag{2.1.6}$$

dla pewnej stałej dodatniej $c_5 = c_5(l) > 0$.

Załóżmy, że własność (2.1.6) jest udowodniona. Ustalmy $w \in D_k$. Wówczas, dla dowolnego punktu $|z| < 1/4$ i dowolnej krzywej $\alpha \in \mathcal{C}_p^1([0,1], D_k)$ takiej, że $\alpha(0) = z,\ \alpha(1) = w$, mamy

$$\int_0^1 \gamma_{D_k}^{(l)}(\alpha(t);\alpha'(t))dt \ge \int_0^{t_\alpha} \frac{c_5|\alpha'(t)|dt}{|\alpha(t)|\log(1/|\alpha(t)|)}, \tag{2.1.7}$$

gdzie $t_\alpha := \min\{t \in [0,1] : |\alpha(t)| = 1/4\}$; jeśli $|\alpha(t)| < 1/4$ dla $t \in [0,1]$, to $t_\alpha := 1$. Zauważmy, że, ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial t}|\alpha(t)| = \frac{\alpha'(t)\overline{\alpha(t)} + \overline{\alpha'(t)}\alpha(t)}{2|\alpha(t)|} = \frac{\Re(\alpha'(t)\overline{\alpha(t)})}{|\alpha(t)|} \le |\alpha'(t)|,$$

zachodzi następujące oszacowanie (jeśli $t_\alpha = 1$, to w poniższych formułach zamiast $1/4$ piszemy $|w|$):

$$\int_0^{t_\alpha} \frac{|\alpha'(t)|dt}{|\alpha(t)|\log(1/|\alpha(t)|)} \ge \int_{|z|}^{1/4} \frac{dx}{x\log(1/x)} = \log\log\frac{1}{|z|} - \log\log 4.$$

Biorąc infimum po wszystkich takich krzywych α, stosując (2.1.7) oraz powyższe oszacowanie, uzyskujemy

$$\int\gamma_{D_k}^{(l)}(w,z) \ge c_5(\log\log\frac{1}{|z|} - \log\log 4).$$

Dlatego, przy $z \to 0$, uzyskujemy (b).

Pozostało dowieść (2.1.6). Zgodnie z definicją odległości $\gamma_{D_k}^{(l)}$ uzyskamy (2.1.6), jeśli wykażemy, że dla dowolnego punktu $|z| < 1/4$ istnieje funkcja $f_z \in \mathcal{O}(D_k, E)$ taka, że $f_z(z) = f_z'(z) = ... = f_z^{(l-1)}(z) = 0$ oraz

$$|f_z^{(l)}(z)| \ge \frac{c_6}{(|z|\log(1/|z|))^l}, \tag{2.1.8}$$

z pewną stałą $c_6 = c_6(l) > 0$.

Skonstruujemy taką funkcję. Niech $|z| < 1/4$. Wówczas istnieją jedyne liczby $N \in \mathbb{N}$, $b \in (1,2]$ oraz $\theta \in [0, 2\pi)$ takie, że $z = be^{i\theta}/2^N$. Zauważmy, że $N \geq 3$. Niech

$$\tilde{f}_z(\lambda) := \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{b,\theta}^j (2^{-N-j-1} - \lambda)^{-1} + 2^{N+1}\beta_{b,\theta}, \quad \lambda \in D_k,$$

gdzie $\alpha_{b,\theta}^0 := 1$ oraz $\alpha_{b,\theta}^1, ..., \alpha_{b,\theta}^{l-1}, \beta_{b,\theta} \in \mathbb{C}$ są stałymi, zależnymi jedynie od b i θ (ale nie od N), dobranymi tak, aby spełniony był warunek $\tilde{f}_z(z) = ... = \tilde{f}_z^{(l-1)}(z) = 0$. Oczywiście, $\tilde{f}_z$ jest funkcją holomorficzną na D_k.

Poniżej, w Lemacie 2.1.5, pokażemy, że definicja funkcji $\tilde{f}_z$ jest poprawna, (tzn. liczby $\alpha_{b,\theta}^1, ..., \alpha_{b,\theta}^{l-1}, \beta_{b,\theta}$ istnieją), ale najpierw zauważmy, że

$$\big[(2^{-N-j-1} - \lambda)^{-1}\big]^{(s)} = s!(2^{-N-j-1} - \lambda)^{-s-1}, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{2.1.9}$$

Lemat 2.1.5. *Dla dowolnej liczby $z = be^{i\theta}/2^N$, gdzie $b \in [1,2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ oraz $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, liczby $\alpha_{b,\theta}^1, ..., \alpha_{b,\theta}^{l-1}, \beta_{b,\theta}$ jak wyżej istnieją oraz ich moduły są oszacowane od góry przez stałą $\alpha > 0$, niezależną od b i θ. Co więcej,*

$$B_{l,b,\theta} := \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{2^j}{1 - 2^{j+1}be^{i\theta}}\right)^{l+1} \alpha_{b,\theta}^j \neq 0.$$

W szczególności, $B_l := \min\{|B_{l,b,\theta}| : b \in [1,2], \theta \in [0, 2\pi]\} > 0$.

Dowód Lematu 2.1.5 zostanie przedstawiony później. Wykorzystując (2.1.9) uzyskamy

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}_z^{(l)}(z)| &= \left| \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{b,\theta}^j l! \left(\frac{1}{2^{N+j+1}} - \frac{be^{i\theta}}{2^N}\right)^{-(l+1)} \right| \\
&\geq \left| \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{b,\theta}^j \left(\frac{2^{N+j+1}}{1 - 2^{j+1}be^{i\theta}}\right)^{l+1} \right| = 2^{(N+1)(l+1)}|B_{l,b,\theta}| \geq c_7 2^{N(l+1)},
\end{aligned}$$

gdzie c_7 jest stałą dodatnią, zależną jedynie od l.

Teraz, z pomocą Lematu 2.1.5, oszacujemy supremum funkcji $\tilde{f}_z$ na D_k:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}_z\|_{D_k} &\leq \sum_{j=0}^{l-1} \frac{|\alpha_{b,\theta}^j|}{r_{k,N+j+1}} + 2^{N+1}|\beta_{b,\theta}| \\
&\leq \frac{\alpha(l+1)}{r_{k,N+l}} = \alpha(l+1)2^{N+l}(N+l)^{k+1} \leq c_8 2^N (N-1)^{k+1} \leq c_8 2^N (N-1)^l,
\end{aligned}$$

gdzie stała $c_8 > 0$ zależy tylko od liczb k oraz l.

Zauważmy, że dla funkcji $f_z := \tilde{f}_z/\|\tilde{f}_z\|_{D_k} \in \mathcal{O}(D_k, E)$ uzyskamy (2.1.8), ponieważ

$$|f_z^{(l)}(z)| \geq \frac{c_7 2^{Nl}}{c_8(N-1)^l} \geq \frac{c_7(\log 2)^l 2^{Nl}}{c_8 b^l (\log(2^N/b))^l} = \frac{c_6}{(|z|\log(1/|z|))^l}.$$

W ten sposób dowód Lematu 2.1.4 jest zakończony. □

Dowód Lematu 2.1.5. Najpierw skonstruujemy liczby $\alpha^1_{b,\theta}, ..., \alpha^{l-1}_{b,\theta}$. W tym celu wykażemy, że układ $l-1$ równań

$$\tilde{f}'_z(z) = ... = \tilde{f}^{(l-1)}_z(z) = 0 \tag{2.1.10}$$

z $l-1$ niewiadomymi $\alpha^1_{b,\theta}, ..., \alpha^{l-1}_{b,\theta}$ zawsze ma rozwiązanie, tzn. ma niezerowy wyznacznik.

Zauważmy, że, stosując (2.1.9), układ (2.1.10) jest równoważny układowi

$$\sum_{j=0}^{l-1} s! \left(\frac{2^{N+j+1}}{1-2^{j+1}be^{i\theta}}\right)^{s+1} \alpha^j_{b,\theta} = 0, \quad s = 1, ..., l-1, \tag{2.1.11}$$

który z kolei jest równoważny z

$$\sum_{j=1}^{l-1} \left(\frac{2^j}{1-2^{j+1}be^{i\theta}}\right)^{s+1} \alpha^j_{b,\theta} = -\left(\frac{1}{1-2be^{i\theta}}\right)^{s+1}, \quad s = 1, ..., l-1. \tag{2.1.12}$$

Aby uprościć oznaczenia, przyjmijmy

$$A^j_{b,\theta} := \frac{2^j}{1-2^{j+1}be^{i\theta}}, \quad j = 0, ..., l-1,$$

i zauważmy, że $|A^j_{b,\theta}| \in [1/8, 1]$ oraz $A^\mu_{b,\theta} \neq A^\nu_{b,\theta}$, jeśli tylko $\mu \neq \nu$. Dlatego układ (2.1.12) jest równoważny z

$$\sum_{j=1}^{l-1} (A^j_{b,\theta})^{s+1} \alpha^j_{b,\theta} = -(A^0_{b,\theta})^{s+1}, \quad s = 1, ..., l-1, \tag{2.1.13}$$

i łatwo zuważyć, że

$$|\det[(A^j_{b,\theta})^{s+1}]^{l-1}_{j,s=1}| = |A^1_{b,\theta} ... A^{l-1}_{b,\theta}|^2 \prod_{l-1 \geq \mu > \nu \geq 1} |A^\mu_{b,\theta} - A^\nu_{b,\theta}| \geq \varepsilon > 0, \tag{2.1.14}$$

gdzie ε jest stałą niezależną od b oraz θ. Dlatego wybór liczb $\alpha^1_{b,\theta}, ..., \alpha^{l-1}_{b,\theta}$ jest zawsze możliwy; można przyjąć

$$\beta_{b,\theta} := -\sum_{j=0}^{l-1} A^j_{b,\theta} \alpha^j_{b,\theta}.$$

Udowodnimy teraz istnienie stałej α. Ponieważ

$$|\beta_{b,\theta}| \leq \sum_{j=0}^{l-1} |A^j_{b,\theta} \alpha^j_{b,\theta}| \leq l \max\{|\alpha^j_{b,\theta}| : 0 \leq j \leq l-1\},$$

wystarczy więc oszacować liczby $\alpha^j_{b,\theta}$.

Zauważmy, że $|A^j_{b,\theta}|^{s+1} \in [2^{-3l}, 1]$ dla $j = 0, ..., l-1,\ s = 1, ..., l-1,\ b \in [1, 2]$ oraz $\theta \in [0, 2\pi]$. Ponieważ funkcja det jest ciągła, jest więc ograniczona na zbiorach zwartych. Ta uwaga oraz (2.1.14) dają nam globalne górne ograniczenia $\alpha^1, ..., \alpha^{l-1}$ liczb $|\alpha^1_{b,\theta}|, ..., |\alpha^{l-1}_{b,\theta}|$, niezależne od b oraz θ. Dlatego można przyjąć

$$\alpha := l \max\{|\alpha^j| : 0 \leq j \leq l-1\}.$$

Pozostało udowodnić, że $B_{l,b,\theta} \neq 0$. Zauważmy, że jest to równoważne z

$$\sum_{j=1}^{l-1} (A^j_{b,\theta})^{l+1} \alpha^j_{b,\theta} \neq -(A^0_{b,\theta})^{l+1}. \tag{2.1.15}$$

Przypuśćmy, że (2.1.15) nie zachodzi. Wówczas uzyskamy układ l równań

$$\sum_{j=1}^{l-1} (A^j_{b,\theta})^{s+1} \alpha^j_{b,\theta} = -(A^0_{b,\theta})^{s+1}, \quad s = 1, ..., l, \tag{2.1.16}$$

który posiada jedyne rozwiązanie $\alpha^j_{b,\theta},\ j = 1, ..., l-1$. Teraz, jeśli usuniemy z (2.1.16) pierwsze równanie, uzyskamy układ $l-1$ równań

$$\sum_{j=1}^{l-1} (A^j_{b,\theta})^{s+1} \alpha^j_{b,\theta} = -(A^0_{b,\theta})^{s+1}, \quad s = 2, ..., l, \tag{2.1.17}$$

który również posiada to samo jedyne rozwiązanie $\alpha^j_{b,\theta},\ j = 1, ..., l-1$. Ale jeśli porównamy rozwiązania układów (2.1.13) i (2.1.17), otrzymamy

$$\frac{A^0_{b,\theta}}{A^j_{b,\theta}} = 1, \quad j = 1, ..., l-1,$$

co jest niemożliwe i, w konsekwencji, formuła (2.1.15) jest prawdziwa.

Teraz, ponieważ $|B_{l,b,\theta}|$ jest, ze względu na zmienne (b, θ), dodatnią funkcją ciągłą, określoną na zbiorze zwartym $[1, 2] \times [0, 2\pi]$, wnioskujemy, że $B_l > 0$, co kończy dowód Lematu 2.1.5. $\square$

2.2. Wzrost $\boldsymbol{\int\gamma_D^{(k)}}$, a zupełność w obszarach płaskich. Jak zobaczyliśmy w dowodzie Twierdzenia 2.1.2, na to, aby obszar typu Zalcmana rozgraniczał zupełność ze względu na wewnętrzne odległości Carathéodory'ego–Reiffena rzędów $m \leq k$ oraz $l > k$, funkcje $\gamma_D^{(k)}$ muszą spełniać pewne specjalne warunki wzrostu. Następujące twierdzenie pokazuje, jak ostrożnie należy konstruować odpowiedni obszar.

Twierdzenie 2.2.1. ([Zap 02]) *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym, $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, i niech $0 \le \alpha < 1$ będzie taką liczbą, aby $\gamma_D^{(k)}(z;1) \le c(\operatorname{dist}(z, \partial D))^{-\alpha}$, $z \in D$, dla pewnej stałej dodatniej c. Wtedy*

$$\gamma_D^{(l)}(z;1) \le c'(\operatorname{dist}(z, \partial D))^{-\alpha'}, \quad z \in D,$$

dla pewnych stałych dodatnich c' oraz $\alpha' < 1$.

Ponieważ taki wzrost daje nam niezupełność obszarów typu Zalcmana D, otrzymujemy więc

Wniosek 2.2.2. *Jeśli dla dowolnego obszaru typu Zalcmana D istnieją stałe dodatnie c oraz $\alpha < 1$ takie, że*

$$\limsup_{0 > z \to 0} \gamma_D^{(k)}(z;1) < c|z|^{-\alpha},$$

to D jest $\int\gamma_D^{(l)}$-niezupełny dla dowolnego $l \ge k$.

W dowodzie Twierdzenia 2.2.1 wykorzystamy poniższy lemat.

Lemat 2.2.3. *Jeśli $D \subset \mathbb{C}$ jest obszarem ograniczonym, to dla dowolnych liczb $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$,*

$$\frac{\gamma_D^{(k)}(z_0;1)}{(d_D(z_0))^{(l-k)/k}} \ge \left(\gamma_D^{(l)}(z_0;1)\right)^{l/k}, \quad z_0 \in D.$$

Dowód Lematu 2.2.3. Ustalmy liczby $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, oraz punkt $z_0 \in D$. Wówczas dla funkcji $f \in \mathcal{O}(D, E)$ takiej, że $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(l-1)}(z_0) = 0$, określamy

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/(z - z_0)^{l-k}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}.$$

Zauważmy, że g jest funkcją holomorficzną na D. Ponadto, korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora funkcji f w punkcie z_0, uzyskujemy

$$g(z) = \sum_{j=l}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^{j-l+k}, \quad z \in D.$$

Zatem

$$g^{(m)}(z_0) = 0, \quad m = 0, 1, ..., k-1, \tag{2.2.1}$$

oraz

$$g^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{l!} f^{(l)}(z_0). \tag{2.2.2}$$

Stosując Zasadę Maksimum dla funkcji holomorficznych (zob. Dodatek, D 2) wnioskujemy, że

$$\|g\|_D \le 1/(d_D(z_0))^{l-k}.$$

Dlatego, dzięki (2.2.1), funkcja $h := (d_D(z_0))^{l-k} g \in \mathcal{O}(D, E)$ spełnia warunki z definicji pseudometryki Carathéodory'ego–Reiffena rzędu k. Stąd, korzystając z formuły (2.2.2), uzyskujemy

$$\begin{aligned}\gamma_D^{(k)}(z_0;1) &\ge \sup_h \left(\frac{1}{k!}|h^{(k)}(z_0)|\right)^{1/k} = \left(\frac{(d_D(z_0))^{l-k}}{l!}\sup_f |f^{(l)}(z_0)|\right)^{1/k} \\ &= ((d_D(z_0))^{l-k}(\gamma_D^{(l)}(z_0;1))^l)^{1/k} = (d_D(z_0))^{(l-k)/k}(\gamma_D^{(l)}(z_0;1))^{l/k},\end{aligned}$$

co kończy dowód Lematu 2.2.3. $\square$

Dowód Twierdzenia 2.2.1. Z Lematu 2.2.3 wynika, że dla liczb $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$,

$$\gamma_D^{(l)}(z;1) \le \frac{(\gamma_D^{(k)}(z;1))^{k/l}}{(\operatorname{dist}(z,\partial D))^{(l-k)/l}}, \quad z \in D.$$

Stąd, jeśli $\gamma_D^{(k)}(z;1) \le c(\operatorname{dist}(z,\partial D))^{-\alpha}$, to

$$\gamma_D^{(l)}(z;1) \le \frac{c^{k/l}}{(\operatorname{dist}(z,\partial D))^{(\alpha k+l-k)/l}} = \frac{c'}{(\operatorname{dist}(z,\partial D))^{\alpha'}}, \quad z \in D,$$

gdzie $c' := c^{k/l}$ oraz $\alpha' := 1-(1-\alpha)k/l < 1$. $\square$

III. Zupełność pseudowypukłych obszarów Reinhardta

W Rozdziale tym przedstawiona jest charakteryzacja ograniczonych pseudowypukłych obszarów Reinhardta, które są zupełne ze względu na wewnętrzną odległość Carathéodory'ego-Reiffena wyższych rzędów.

3.1. Geometria pseudowypukłych obszarów Reinhardta oraz stożki wypukłe. Dla obszaru Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$, przyjmijmy

$$\log D := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : (e^{x_1}, ..., e^{x_n}) \in D\}.$$

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^n_*$ i obszarami w $\mathbb{R}^n$ dana przez związek

$$\{\text{obszary Reinhardta w } \mathbb{C}^n_*\} \ni D \mapsto \log D \in \{\text{obszary w } \mathbb{R}^n\}.$$

Niech

$$V_j := \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : z_j = 0\}, \quad j = 1, ..., n,$$
$$W_j := \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : z_j = 1\}, \quad j = 1, ..., n.$$

W dalszej części pracy będziemy korzystać z następującej charakteryzacji pseudowypukłych obszarów Reinhardta.

Twierdzenie 3.1.1. ([Vla 66], [Jak-Jar 01]) *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem Reinhardta. Wówczas D jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy* $\log D$ *jest obszarem wypukłym oraz dla dowolnego $j \in \{1, ..., n\}$,*

jeśli $D \cap V_j \neq \varnothing$ i $(z', z_j, z'') \in D$, to $(z', \lambda z_j, z'') \in D$ dla dowolnego $\lambda \in \overline{E}$.

W badaniu własności pseudowypukłych obszarów Reinhardta ważną rolę odgrywają stożki związane z logarytmicznym obrazem tych obszarów.

Zbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *stożkiem o wierzchołku w punkcie* a jeśli $a + t(v - a) \in C$ dla dowolnych $v \in C,\ t > 0$. Stożek o wierzchołku w punkcie 0 nazywać będziemy krótko stożkiem.

Dla obszaru wypukłego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz punktu $a \in \overline{\Omega}$ definiujemy

$$\mathfrak{C}(\Omega, a) := \{v \in \mathbb{R}^n : a + \mathbb{R}_+ v \subset \overline{\Omega}\}.$$

Zauważmy, że zbiór $\mathfrak{C}(\Omega, a)$ jest domkniętym stożkiem wypukłym. Co więcej, mamy $\mathfrak{C}(\Omega, a) = \mathfrak{C}(\Omega, b)$ dla dowolnych $a, b \in \overline{\Omega}$. Dlatego można dobrze zdefiniować $\mathfrak{C}(\Omega) := \mathfrak{C}(\Omega, a)$ dla pewnego (dowolnego) $a \in \overline{\Omega}$. Dla pseudowypukłego obszaru Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$ definiujemy $\mathfrak{C}(D) := \mathfrak{C}(\log D)$.

Przedstawimy teraz pewne lematy, użyteczne w dalszej części rozważań.

Lemat 3.1.2. ([Zwo 00b]) *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta oraz niech $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

(a) *Jeśli $\langle \alpha, v \rangle < 0$ dla dowolnego wektora $v \in \mathfrak{C}(D)$, $v \neq 0$, to $z^\alpha \in H^\infty(D)$.*

(b) *Jeśli $z^\alpha \in H^\infty(D)$, to $\langle \alpha, v \rangle \leq 0$ dla wszystkich wektorów $v \in \mathfrak{C}(D)$.*

Lemat 3.1.3. ([Zwo 01]) *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie nieograniczonym obszarem wypukłym. Niech $p_j(x) := x_j$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, ..., n$. Załóżmy, że*

$$\sup p_j(\Omega) < \infty, \quad j = 1, ..., n.$$

Wtedy dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieją otwarte otoczenie U punktu a oraz wektor $v \in \mathbb{R}^n_- \setminus \{0\}$ takie, że $U + \mathbb{R}_+ v \subset \Omega$.

Ponadto, będziemy korzystać z następującej charakteryzacji.

Twierdzenie 3.1.4. ([Zwo 00b]) *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie hiperbolicznym pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *D jest algebraicznie równoważny z obszarem nieograniczonym;*

(ii) *D jest algebraicznie równoważny z obszarem ograniczonym $\widetilde{D}$ takim, że*

$$\text{(3.1.1)} \qquad \textit{istnieje indeks } j \in \{1, ..., n\} \textit{ taki, że } \overline{\widetilde{D}} \cap V_j \neq \varnothing \textit{ i } \widetilde{D} \cap V_j = \varnothing.$$

3.2. Zupełność obszarów Reinhardta względem $\int \gamma_D^{(k)}$. Charakteryzacja hiperbolicznych pseudowypukłych obszarów Reinhardta zupełnych ze względu na odległość Carathéodory'ego jak i na wewnętrzną odległość Carathéodory'ego, przedstawiona jest w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.2.1. ([Pfl 84], [Fu 94], [Zwo 00a], [Zwo 01]) *Niech D będzie hiperbolicznym pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *obszar D jest c_D-skończenie zwarty;*

(ii) *obszar D jest c_D-zupełny;*

(iii) *obszar D jest ograniczony oraz spełniony jest następujący warunek*

$$\text{(3.2.1)} \qquad \textit{dla dowolnego } j \in \{1, ..., n\}, \textit{ jeśli } \overline{D} \cap V_j \neq \varnothing, \textit{ to } D \cap V_j \neq \varnothing;$$

(iv) *obszar D jest c_D^i-zupełny.*

Naszym celem jest udowodnienie następującego wyniku.

Twierdznie 3.2.2. ([Zap 03]) *Niech $k \in \mathbb{N}$. Hiperboliczny pseudowypukły obszar Reinhardta D jest $\int \gamma_D^{(k)}$zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy D jest c_D-zupełny.*

Dowód Twierdzenia 3.2.2 jest rozwinięciem metod stosowanych w [Zwo 01]. Korzysta także z redukcji przedstawionych w [Zwo 00a].

Dowód Twierdzenia 3.2.2. Z uwagi na nierówności (1.4.2) oraz Twierdzenie 3.2.1 wystarczy pokazać, że dowolny obszar D nie spełniający warunku (iii) z Twierdzenia 3.2.1 nie jest $\int \gamma_D^{(k)}$-zupełny.

Dalej, korzystając z Twierdzenia 3.1.4, możemy założyć, używając w razie potrzeby algebraicznego biholomorfizmu, że obszar D jest ograniczony i nie spełnia warunku (3.2.1). Oznacza to, że istnieje indeks $j \in \{1, ..., n\}$ taki, iż $\overline{D} \cap V_j \neq \varnothing$ oraz $D \cap \ V_j = \varnothing$.

Możemy założyć, że istnieją liczby $1 \leq l \leq m \leq n$ takie, że

$$\begin{aligned} \overline{D} \cap V_j \neq \varnothing \quad \text{oraz} \quad D \cap V_j = \varnothing, \quad j = 1, ..., l, \\ \overline{D} \cap V_j = \varnothing, \quad j = l+1, ..., m, \\ D \cap V_j \neq \varnothing, \quad j = m+1, ..., n. \end{aligned}$$

Możemy zredukować nasze rozważania do przypadku $m = n$. Istotnie, niech $\widetilde{D} := D \cap V_{m+1} \cap ... \cap V_n$. Oczywiście, jeśli obszar $\widetilde{D}$ nie jest $\int\gamma_{\widetilde{D}}^{(k)}$-zupełny, to również D nie jest $\int\gamma_D^{(k)}$-zupełny. Zatem po utożsamieniu, $\widetilde{D} \subset \mathbb{C}^m$, $\widetilde{D} \cap V_j = \varnothing$, $j = 1, ..., m$, oraz $\overline{\widetilde{D}} \cap V_j = \varnothing$, $j = l+1, ..., m$. Co więcej, używając charakteryzacji obszarów Reinhardta z Lematu 3.1.1, można łatwo sprawdzić, że $\overline{\widetilde{D}} \cap V_j \neq \varnothing$, $j = 1, ..., l$.

Zakładamy więc, że

$$\text{(3.2.1')} \qquad D \subset \mathbb{C}_*^n, \quad \overline{D} \cap V_j \neq \varnothing, \ j = 1, ..., l, \quad \overline{D} \cap V_j = \varnothing, \ j = l+1, ..., n.$$

Dalej, możemy także założyć, że $(1, ..., 1) \in D$. Stosując Lemat 3.1.3 do obszaru $\Omega := \log D$ oraz punktu $a := (0, ..., 0)$ stwierdzamy, że istnieją wektor $v \in \mathbb{R}_-^n \setminus \{0\}$ i otoczenie otwarte U punktu a takie, że

$$x + tv \in \log D, \quad x \in U, \ t > 0.$$

Z uwagi na (3.2.1') możemy bez straty ogólności założyć, że $v = (v_1, ..., v_m, 0, ..., 0)$, gdzie $v_j < 0$, $j = 1, ..., m$, oraz $\leq m \leq l$ (m jest ustalone). Przyjmijmy $\gamma_j := -v_j$, $j = 1, ..., m$. Możemy także założyć, że $\gamma_1 = 1$. Utożsamiając, podobnie jak wyżej, $\widehat{D} := D \cap W_{m+1} \cap ... \cap W_n$ z obszarem $\widehat{D} \subset \mathbb{C}^m$ możemy założyć, że $\gamma_1, ..., \gamma_n > 0$. Wówczas

$$x + t\gamma \in \log D, \quad t < 0, \ x \in U.$$

Biorąc zamiast otoczenia U część jego przekroju wzdłóż $x_1 = 0$ postaci $\{0\} \times (\log\delta, -\log\delta)^{n-1}$ oraz korzystając z kontraktywności odległości $\int\gamma_D^{(k)}$ wnosimy, że dowód będzie zakończony, jeśli pokażemy, że D nie jest $\int\gamma_D^{(k)}$-zupełny, gdzie $D \subset \mathbb{C}_*^n$ jest pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że

$$\log D = \{0\} \times (\log\delta, -\log\delta)^{n-1} + (\mathbb{R}_{<0})\gamma,$$

gdzie $\delta \in (0, 1)$ oraz $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$, $\gamma_1 := 1$.

Ustalmy taki obszar D oraz liczbę $k \in \mathbb{N}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $n \geq 2$. Dla $r, s, t \in \mathbb{R}$ oraz $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ przyjmijmy $\mathbf{t}^\gamma := (t^{\gamma_1}, ..., t^{\gamma_n})$ oraz $\gamma^r \mathbf{t}^{\gamma - s} := (\gamma_1^r t^{\gamma_1 - s}, ..., \gamma_n^r t^{\gamma_n - s})$.

Pokażemy, że $\gamma_D^{(k)}$-długość krzywej $(0,1/2)\ni t\mapsto \mathbf{t}^\gamma\in D$ jest skończona, tzn.

$$\int_0^{1/2}\gamma_D^{(k)}(\mathbf{t}^\gamma;\gamma\mathbf{t}^{\gamma-1})dt<\infty. \tag{3.2.2}$$

Niech $\alpha\in\mathbb{Z}$. Zauważmy, że $-\gamma\in\mathfrak{C}(D)$. Dlatego, dzięki Lematowi 3.1.2, z^α jest funkcją ograniczoną na D wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle\alpha,\gamma\rangle\geq 0$.

Dowolną funkcję $f\in\mathcal{O}(D,E)$ możemy rozwinąć w szereg Laurenta

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}a_\alpha z^\alpha,\quad z\in D,$$

gdzie współczynnik

$$a_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1|=r_1,\dots,|\zeta_n|=r_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{\alpha+\mathbf{1}}}d\zeta_1\dots d\zeta_n$$

jest niezależny od promieni $(r_1,\dots,r_n)\in D$, a zbieżność szeregu jest lokalnie jednostajna na D.

Zauważmy, że

$$|a_\alpha|\leq\frac{1}{r^\alpha},\quad r=(r_1,\dots,r_n)\in D. \tag{3.2.3}$$

Łatwo wywnioskować z (3.2.3), że $a_\alpha=0$ dla wszystkich wielowskaźników $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ takich, że z^α jest funkcją nieograniczoną na D (tzn. $\langle\alpha,\gamma\rangle<0$). Dlatego

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle\geq 0}a_\alpha z^\alpha,\quad z\in D.$$

Biorąc w (3.2.3) $r_1<1$ dowolnie duże oraz $r_j,\ j=2,\dots,n$, dowolnie bliskie δ (lub $1/\delta$), uzyskamy oszacowanie

$$|a_\alpha|\leq\delta^{|\alpha_2|+\dots+|\alpha_n|},\quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle\geq 0, \tag{3.2.4}$$

gdzie $|\alpha_j|$ oznacza moduł liczby α_j.

Z drugiej strony, dla takiej funkcji i dowolnego indeksu $j=1,\dots,k$,

$$f^{(j)}(\mathbf{t}^\gamma)X\mathbf{t}^{\gamma-k/j}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle\geq 0}a_\alpha\sum_{\beta\in I_j^n}\frac{j!}{\beta!}p_\beta(\alpha)X^\beta t^{\langle\alpha,\gamma\rangle-k},\quad X\in\mathbb{C}^n, \tag{3.2.5}$$

gdzie $p_\beta(\alpha):=\prod_{j=1}^n p_{\beta_j}(\alpha_j)$ oraz $p_{\beta_j}(\alpha_j):=\prod_{l=0}^{\beta_j-1}(\alpha_j-l),\ j=1,\dots,n$.

Dla funkcji $f\in\mathcal{O}(D,E)$, $\operatorname{ord}_{\mathbf{t}^\gamma}f\geq k$, mamy $f^{(j)}(\mathbf{t}^\gamma)X=0$ dla dowolnego $X\in\mathbb{C}^n$ oraz $j=0,\dots,k-1$. Dlatego, dla takiej funkcji,

$$f^{(j)}(\mathbf{t}^\gamma)X\mathbf{t}^{\gamma-k/j}=0,\quad X\in\mathbb{C}^n,\ j=1,\dots,k-1. \tag{3.2.6}$$

Wykorzystując (3.2.5) i (3.2.6) uzyskamy

$$f^{(k)}(\mathbf{t}^\gamma)\gamma\mathbf{t}^{\gamma-1} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle>0} a_\alpha\langle\alpha,\gamma\rangle^k t^{\langle\alpha,\gamma\rangle-k} \tag{3.2.7}$$

dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(D,E)$ takiej, że $\operatorname{ord}_{\mathbf{t}^\gamma} f \geq k$.

Załóżmy, że wzór (3.2.7) jest udowodniony. Stąd, dzięki (3.2.7) i (3.2.4),

$$|f_{(k)}(\mathbf{t}^\gamma)\gamma\mathbf{t}^{\gamma-1}|^{1/k} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle>0} \delta^{(|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)/k}\langle\alpha,\gamma\rangle t^{\langle\alpha,\gamma\rangle/k-1}.$$

Zatem, jeśli weźmiemy infimum po wzystkich funkcjach $f \in \mathcal{O}(D,E)$ takich, że $\operatorname{ord}_{\mathbf{t}^\gamma} f \geq k$, otrzymamy

$$\gamma_D^{(k)}(\mathbf{t}^\gamma;\gamma\mathbf{t}^{\gamma-1}) \leq \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle>0} \delta^{(|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)/k}\langle\alpha,\gamma\rangle t^{\langle\alpha,\gamma\rangle/k-1}.$$

Zauważmy teraz, że zmieniając kolejność całkowania z sumowaniem uzyskujemy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \gamma_D^{(k)}(\mathbf{t}^\gamma;\gamma\mathbf{t}^{\gamma-1})dt \\
&\qquad\leq \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle>0} \delta^{(|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)/k} \int_0^{1/2} \langle\alpha,\gamma\rangle t^{\langle\alpha,\gamma\rangle/k-1}dt \\
&\qquad= \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n:\langle\alpha,\gamma\rangle>0} \delta^{(|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)/k} \frac{k}{2^{\langle\alpha,\gamma\rangle/k}} \\
&\qquad= \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \sum_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{Z}:\langle\alpha,\gamma\rangle>0} \delta^{(|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)/k} \sum_{\alpha_1\in\mathbb{Z}:\alpha_1>-\langle\alpha',\gamma'\rangle} \frac{1}{2^{\langle\alpha,\gamma\rangle/k}} \\
&\qquad= \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \sum_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{Z}:\langle\alpha,\gamma\rangle>0} \delta^{(|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)/k} \frac{1}{2^{(\langle\alpha',\gamma'\rangle+[-\langle\alpha',\gamma'\rangle])/k}},
\end{aligned}$$

gdzie $\alpha' := (\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\gamma' := (\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ oraz $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ $(\langle\alpha',\gamma'\rangle + [-\langle\alpha',\gamma'\rangle])/k \geq -1$, zatem ostatnia liczba jet skończona, co, wobec zbieżności ostatniego szeregu, daje nam oszacowanie (3.2.2).

Pozostał do udowodnienia wzór (3.2.7). Zauważmy, że, mając formułę (3.2.6), uzyskamy (3.2.7) jeśli pokażemy, że istnieją $M \in \mathbb{N}$, $X_1,\ldots,X_M \in \mathbb{C}^n$, $b_1,\ldots,b_M \in \mathbb{C}$ oraz $k_1,\ldots,k_M \in \{1,\ldots,k-1\}$ takie, że

$$\sum_{\beta\in I_k^n} \frac{k!}{\beta!}(p_\beta(\alpha)-\alpha^\beta)\gamma^\beta = \sum_{s=1}^M b_s \sum_{\beta\in I_{k_s}^n} \frac{k_s!}{\beta!} p_\beta(\alpha)X_s^\beta, \quad \alpha\in\mathbb{Z}^n. \tag{3.2.8}$$

Zauważmy, że jeśli $\beta \in I_r^n,\ 1 \leq r \leq k$, to $p_\beta(\alpha) - \alpha^\beta = \sum_{j=1}^{r-1} Q_j^\beta(\alpha)$, gdzie Q_j^β jest wielomianem jednorodnym stopnia j. $Q_j^\beta(\alpha)$ jest sumą jednomianów stopnia j, które są postaci $q_\delta^\beta \alpha^{\beta-\delta}$, gdzie $\delta \in I_{r-j}^n$ oraz liczby $q_\delta^\beta \in \mathbb{C}$ są takie, że $q_\delta^\beta = 0$ jeśli tylko istnieje indeks l taki, że $\beta_l < \delta_l$.

Dlatego łatwo zauważyć, że otrzymamy (3.2.8), jeśli pokażemy, że dla dowolnych $1 \leq r \leq k,\ 1 \leq j \leq r-1,\ \delta \in I_{r-j}^n$ oraz $X \in \mathbb{C}^n$, istnieją $N \in \mathbb{N},\ Y_1, ..., Y_N \in \mathbb{C}^n$ oraz $c_1, ..., c_N \in \mathbb{C}$ takie, że

$$\sum_{\beta \in I_r^n} \frac{r!}{\beta!} q_\delta^\beta \alpha^{\beta-\delta} X^\beta = \sum_{s=1}^N c_s \sum_{\nu \in I_j^n} \frac{j!}{\nu!} \alpha^\nu Y_s^\nu, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.2.9}$$

Ponieważ

$$\sum_{\beta \in I_r^n} \frac{r!}{\beta!} q_\delta^\beta \alpha^{\beta-\delta} X^\beta = \sum_{\substack{\beta \in I_r^n: \\ \beta_l \geq \delta_l,\ 1 \leq l \leq n}} \frac{r!}{\beta!} q_\delta^\beta \alpha^{\beta-\delta} X^\beta$$

$$= \sum_{\nu \in I_j^n} \frac{r!}{(\nu+\delta)!} q_\delta^{\nu+\delta} \alpha^\nu X^{\nu+\delta} = \sum_{\nu \in I_j^n} \frac{j!}{\nu!} \alpha^\nu \frac{r!\nu!}{j!(\nu+\delta)!} q_\delta^{\nu+\delta} X^{\nu+\delta},$$

otrzymamy wzór (3.2.9), jeśli zastosujemy poniższy lemat ze stałymi

$$C_\nu = C_\nu(r, j, \delta, X) := \frac{r!\nu!}{j!(\nu+\delta)!} q_\delta^{\nu+\delta} X^{\nu+\delta}, \quad \nu \in I_j^n,$$

co kończy dowód. □

Lemat 3.2.3. *Dla dowolej liczby $j \in \mathbb{N}$ i dowolnego ciągu $\{C_\nu\}_{\nu \in I_j^n} \subset \mathbb{C}$ istnieją $N \in \mathbb{N},\ Y_1, ..., Y_N \in \mathbb{C}^n$ oraz $c_1, ..., c_N \in \mathbb{C}$ takie, że*

$$\sum_{s=1}^N c_s Y_s^\nu = C_\nu, \quad \nu \in I_j^n. \tag{3.2.10}$$

Dowód Lematu 3.2.3. Dla dowolnych $\nu, \mu \in I_j^n,\ \nu \neq \mu$, niech $m = m(\nu, \mu) := \max\{l : \nu_l \neq \mu_l\}$. W zbiorze I_j^n wprowadzamy następujący porządek: dla dowolnych $\nu, \mu \in I_j^n,\ \nu \neq \mu$, powiemy, że $\nu < \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu_m < \mu_m$. Dlatego możemy napisać $I_j^n = \{\nu^1, ..., \nu^{\iota_j^n}\}$, gdzie $\nu^l < \nu^{l+1}$ dla dowolnego $l = 1, ..., \iota_j^n - 1$.

Niech

$$\begin{cases} a_1 := 1 \\ a_l := j a_{l-1} - j + 2, \quad l = 2, ..., n \end{cases}.$$

Określamy $Y_1 := (2^{a_1}, ..., 2^{a_n})$. Stąd uzyskujemy

$$Y_1^{\nu^l} = 2^{t_l}, \quad l = 1, ..., \iota_j^n, \tag{3.2.11}$$

gdzie $t_l \in \mathbb{N}$ oraz $j = t_1 < ... < t_{\iota_j^n}$. Istotnie, z uwagi na porządek wprowadzony w zbiorze I_j^n oraz definicję liczb a_l, jedynie dwa następujące przypadki są możliwe:

a) $\nu^l = (\nu_1^l, \nu_2^l, \nu_3^l, ..., \nu_n^l)$, $\nu^{l+1} = (\nu_1^l - 1, \nu_2^l + 1, \nu_3^l, ..., \nu_n^l)$, gdzie $\nu_1^l > 0$; wtedy

$$t_{l+1} - t_l = \nu_1^l - 1 + 2(\nu_2^l + 1) - \nu_1^l - 2\nu_2^l = 1 > 0.$$

b) $\nu^l = (\underbrace{0, ..., 0, \nu_s^l}_{s}, \nu_{s+1}^l, ..., \nu_n^l)$, $\nu^{l+1} = (\underbrace{j - R - 1, 0, ..., 0}_{s}, \nu_{s+1}^l + 1, ..., \nu_n^l)$, gdzie $R := \sum_{p=s+1}^n \nu_p^l$; wtedy

$$\begin{aligned} t_{l+1} - t_l &= j - R - 1 + a_{s+1}(\nu_{s+1}^l + 1) - a_s\nu_s^l - a_{s+1}\nu_{s+1}^l \\ &= j - R - 1 + a_{s+1} - a_s\nu_s^l = ja_s - a_s\nu_s^l - R + 1 \geq a_s(j - \nu_s^l - R) + 1 = 1, \end{aligned}$$

ponieważ $j - \nu_s^l - R = \sum_{p=1}^{s-1} \nu_p^l = 0$.

Dlatego istnieją tylko dwie możliwości.

1. $t_l = j + l - 1$ dla dowolnego $l = 1, ..., \iota_j^n$; wówczas przyjmujemy $N := \iota_j^n$ i definiujemy $Y_s := (2^{sa_1}, ..., 2^{sa_n})$ dla $s = 2, ..., N$.

Skonstruujemy teraz liczby $c_1, ..., c_N$. Zauważmy, że układ równań (3.2.10) jest równoważny z

$$\sum_{s=1}^{N} 2^{s(j+l-1)} c_s = C_{\nu^l}, \quad l = 1, ..., N. \tag{3.2.12}$$

Jest jasne, że układ (3.2.12) ma jedyne rozwiązanie $c_1, ..., c_N$ jeśli tylko jego wyznacznik nie jest równy zero. Szczęśliwie,

$$\det[2^{s(j+l-1)}]_{s,l=1}^N = 2^{j(1+...+M)} \det[2^{s(l-1)}]_{s,l=1}^N = 2^{jM(M+1)/2} \prod_{N \geq s > l \geq 1} (2^s - 2^l)$$

jest liczbą niezerową i dowód w tym przypadku jest zakończony.

2. Istnieje liczba l taka, że $t_{l+1} > t_l + 1$; wówczas wypełniamy luki w ciągu t_l brakującymi liczbami naturalnymi i, po przenumerowaniu, uzyskujemy nowy ciąg $j = u_1, ..., u_N := t_{\iota_j^n}$ taki, że $u_l = j + l - 1$ dla dowolnego $l = 1, ..., N$. Zauważmy, że jest to także definicja liczby N. Dla nowo wprowadzonych liczb u_l, tj. dla tych u_l, które ne mają odpowiednika pomiędzy liczbami t_l, definiujemy $\nu^l := (u_l, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}_+^n$ oraz $C_{\nu^l} := 0$. W ten sposób uzyskujemy własność (3.2.11) dla wszystkich liczb u_l. Potem, postępując dokładnie jak w przypadku 1, konstruujemy wektory $Y_2, ..., Y_N$ i dowodzimy istnienie $c_1, ..., c_N$. W tym przypadku, jednakże, aby spełniony był warunek (3.2.10), wykorzystujemy jedynie te równania z układu (3.2.12), które pochodzą od początkowo istniejących indeksów $\nu^l \in I_j^n$, tj. tych, które istniały przed wypełnieniem luk w ciągu t_l. □

Uwaga 3.2.4. Lemat 3.2.3 okazuje się być szczególnym przypadkiem zagadnień związanych ze zbiorami determinującymi rozważanych przez J. Siciaka w roku 1962 (zob. [Sic 62]).

Przyjmijmy

$$\widetilde{I}^n_k := \bigcup_{j=0}^{k} I^n_j, \quad \widetilde{\iota}^n_k := \#\widetilde{I}^n_k = \sum_{j=0}^{k} \iota^n_j.$$

Zbiór $E \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *determinującym*, jeśli dla dowolnej liczby $d \in \mathbb{N}$ istnieje układ punktów $\{z_1, ..., z_{\widetilde{\iota}^n_d}\} \subset E$ taki, że

$$V(z_1, ..., z_{\widetilde{\iota}^n_d}) := \det[z^\nu_j]^{\nu \in \widetilde{I}^n_d}_{j=1,...,\widetilde{\iota}^n_d} \neq 0.$$

Lemat 3.2.5. ([Sic 62], Corollary 1) *Niech $E \subset \mathbb{C}^n$. Jeśli istnieje ciąg $(z^j)^\infty_{j=0} \subset E$, gdzie $z^j = (z^j_1, ..., z^j_n)$ są takie, że $z^j_l \neq z^k_l$ dla dowolnych $l = 1, ..., n$ oraz $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$, to zbiór E jest determinujący.*

Tezę Lematu 3.2.3 uzyskujemy następująco. Przyjmujemy $N := \widetilde{\iota}^n_j$ i uzupełniamy układ (3.2.10) równaniami dla indeksów $\nu \in \widetilde{I}^n_j \setminus I^n_j$ przyjmując dowolne współczynniki po prawej stronie dopisanych równań, np. $C_\nu = 0$. W ten sposób otrzymujemy układ równań

$$\sum_{s=1}^{N} c_s Y^\nu_s = C_\nu, \quad \nu \in \widetilde{I}^n_j. \tag{3.2.13}$$

Wektory $Y_s = (Y_{s,1}, ..., Y_{s,n}) \in \mathbb{C}^n$, $s = 1, ..., N$, wybieramy dowolnie tak, aby $Y_{s,l} \neq Y_{t,l}$ dla $l = 1, .., n$ oraz $s, t \in \{1, ..., N\}$, $s \neq t$. Wówczas, na mocy Lematu 3.2.5, wyznacznik układu równań (3.2.13) ze zmiennymi zespolonymi $c_1, ..., c_N$ jest niezerowy, istnieje więc jedno rozwiązanie tego układu.

Dodatek

Poniższe definicje i rezultaty można znaleźć w: [Gun-Ros 65], [Hör 90], [Jak-Jar 01], [Kli 91], [Kra 82], [Niv 95], [Rad 37], [Ran 86].

Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie dowolnym obszarem. Powiemy, że funkcja $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{C})$ jest *holomorficzna*, jeśli $\partial f / \partial \overline{z}_j \equiv 0$ na D dla $j = 1, ..., n$, gdzie dla $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n,\ z_j = x_j + iy_j,\ x_j, y_j \in \mathbb{R},\ j = 1, ..., n,$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad j = 1, ..., n.$$

Zbiór wszystkich funkcji holomorficznych $f : D \to \widetilde{D}$, gdzie $\widetilde{D} \subset \mathbb{C}$, oznaczamy przez $\mathcal{O}(D, \widetilde{D})$. $\mathcal{O}(D) := \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$. Zbiór wszystkich odwzorowań holomorficznych $f : D \to G$, gdzie $G \subset \mathbb{C}^m$ jest dowolnym obszarem, oznaczamy przez $\mathcal{O}(D, G)$.

Odwzorowanie holomorficzne $f : D \to G$, gdzie D, G są jak wyżej, nazywamy *biholomorficznym*, jeśli jest ono bijekcją.

Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Mówimy, że półciągła z góry funkcja $u : U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ jest *subharmoniczna* (w skrócie *sh*), jeśli dla dowolnego relatywnie zwartego podzbioru U_0 zbioru U i dla dowolnej funkcji h, ciągłej na U_0 i harmonicznej na U_0, mamy: jeśli $u \le h$ na ∂U_0, to $u \le h$ na U_0. Piszemy: $u \in \mathcal{SH}(U)$.

Teraz niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}^n$. Półciągłą z góry funkcję $u : U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ nazywamy *plurisubharmoniczną* na U, jeśli dla dowolnego punktu $a \in U$ oraz dowolnego wektora $X \in \mathbb{C}^n$ funkcja

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda X \in U\} \ni \lambda \mapsto u(a + \lambda X) \in \mathbb{R}_{-\infty}$$

jest subharmoniczna (jako funkcja jednej zmiennej zespolonej). Zbiór wszystkich funkcji plurisubharmonicznych na U oznaczamy przez $\mathcal{PSH}(U)$.

Mówimy, że zbiór $P \subset \mathbb{C}^n$ jest *pluripolarny*, jeśli dla dowolnego punktu $z \in P$ istnieją spójne otoczenie U_z punktu z oraz funkcja $u_z \in \mathcal{PSH}(U_z),\ u_z \not\equiv -\infty$, takie, że $P \cap U_z \subset u_z^{-1}(-\infty)$. Jeśli $n = 1$, to zbiór P nazywamy *polarnym*.

Mówimy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *obszarem holomorficzności*, jeśli istnieje funkcja f holomorficzna na D taka, że dla dowolnej pary (U_1, U_2) niepustych zbiorów otwartych $U_j \subset \mathbb{C}^n$ takich, że $U_1 \subset U_2 \cap D \subsetneq U_2$, U_2 jest spójny, funkcja $f|_{U_1}$ nie jest restrykcją żadnej z funkcji $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U_2)$. Zauważmy, że dowolny obszar na płaszczyźnie zespolonej jest obszarem holomorficzności.

Mówimy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *pseudowypykły*, jeśli funkcja $-\log \operatorname{dist}(\cdot, \partial D)$ jest funkcją plurisubharmoniczną na D.

Mówimy, że ograniczony obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *hiperwypukły*, jeśli istnieje funkcja $u \in \mathcal{C}(D) \cap \mathcal{PSH}(D)$, $u < 0$, taka, że dla dowolnej liczby $\varepsilon < 0$ zbiór $\{z \in D : u(z) < \varepsilon\}$ jest relatywnie zwarty w D. Funkcję u nazywamy *funkcją wyczerpującą na D*.

Mówimy, że ograniczony obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *ściśle hiperwypukły*, jeśli istnieją ograniczony obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ oraz funkcja $u \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{PSH}(\Omega)$, $u < 1$, taka, że

$D = \{z \in \Omega : u(z) < 0\}$, funkcja u jest wyczerpująca na Ω oraz dla dowolnej liczby $c \in [0,1]$ zbiór $\{z \in \Omega : u(z) < c\}$ jest spójny.

Wprost z definicji wynika, że dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$

$$D \text{ jest ściśle hiperwypukły } \Rightarrow D \text{ jest hiperwypukły } \Rightarrow D \text{ jest pseudowypukły.}$$

D 1. (Rozwiązanie Problemu Leviego). *Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem holomorficzności wtedy i tylko wtedy, gdy D jest pseudowypukły.*

D 2. (Zasada Maksimum dla funkcji holomorficznych). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i niech $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. Wtedy*

(a) *funkcja $|f|$ nie osiąga lokalnych maksimów w D;*

(b) *jeśli, ponadto, D jest ograniczony, to*

$$|f(z)| < \sup_{\zeta \in \partial D} \{\limsup_{D \ni z \to \zeta} |f(z)|\}, \quad z \in D.$$

D 3. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Jeśli $f \in \mathcal{O}(D)$, to $\log|f| \in \mathcal{PSH}(D)$.*

Lista symboli

Symbole ogólne

$\mathbb{N}$:= zbiór liczb naturalnych ($0 \notin \mathbb{N}$);
$\mathbb{Z}$:= pierścień liczb całkowitych;
$\mathbb{R}$:= ciało liczb rzeczywistych;
$\mathbb{C}$:= ciało liczb zespolonych;
$A_* := A \setminus \{0\}$;
$A_+ := A \cap [0, \infty)$;
$A_- := A \cap (-\infty, 0]$;
$A_{>0} := A \cap (0, \infty)$;
$A_{<0} := A \cap (-\infty, 0)$;
$A_{-\infty} := A \cup \{-\infty\}$;
$A^n := \underbrace{A \times ... \times A}_{n}$;
$A^n_* := (A_*)^n$;
$\overline{A}$:= domknięcie zbioru $A \subset \mathbb{C}^n$ w topologii naturalnej;
$\Re\lambda$:= część rzeczywista liczby $\lambda \in \mathbb{C}$;
$|\lambda|$:= moduł liczby $\lambda \in \mathbb{C}$;
$\|z\| := \sqrt{|z_1|^2 + ... + |z_n|^2}$ norma euklidesowa w $\mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}^n$;
$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} ... z_n^{\alpha_n}$, $z, \alpha \in \mathbb{C}^n$, jeśli $\alpha_j < 0$, to $z_j \neq 0$;
$\mathcal{C}(D, G)$:= zbiór odwzorowań ciągłych $f : D \to G$;
$\mathcal{C}^k(D, G)$:= zbiór odwzorowań $f : D \to G$ klasy $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$;
$\mathcal{O}(D, G)$:= zbiór odwzorowań holomorficznych $f : D \to G$;
$\mathcal{O}(D) := \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$;
$H^\infty(D)$:= zbiór funkcji holomorficznych i ograniczonych na D;
$\mathcal{SH}(U)$:= zbiór funkcji subharmonicznych $f : U \to \mathbb{R}_{-\infty}$, $U \subset \mathbb{C}$;
$\mathcal{PSH}(U)$:= zbiór funkcji plurisubharmonicznych $f : U \to \mathbb{R}_{-\infty}$, $U \subset \mathbb{C}^n$;
$\langle z, w \rangle := z_1\overline{w}_1 + ... + z_n\overline{w}_n$ = iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$, $z, w \in \mathbb{C}^n$;
$B_d(z, r) := \{w \in \mathbb{C}^n : d(z, w) < r\}$ = kula otwarta o środku w punkcie $z \in \mathbb{C}^n$ i promieniu $r > 0$, d jest odległością w $\mathbb{C}^n$;
$B(z, r) := B_d(z, r)$, gdzie d jest odległością euklidesową;
D_α — elementarny obszar Reinhardta, $\alpha \in \mathbb{N}$;
$E := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ = dysk jednostkowy w $\mathbb{C}$.

Rozdział I

$m(\cdot, \cdot)$ — odległość Möbiusa;
$\gamma(\lambda; X) := |X|/(1 - |\lambda|^2)$;
p — odległość Poincarégo;
c_D — pseudoodległość Carathéodory'ego obszaru D;
$d := (d_D)_{D \text{ obszar w } \mathbb{C}^n}$ — holomorficznie kontraktywna rodzina funkcji;

γ_D — pseudometryka Carathéodory'ego-Reiffena obszaru D;
$\delta := (\delta_D)_{D \text{ obszar w } \mathbb{C}^n}$ — holomorficznie kontraktywna rodzina pseudometryk;
$|\beta| := \beta_1 + ... + \beta_n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$;
$I_k^n := \{\beta \in \mathbb{Z}_+^n : |\beta| = k\}$;
$\iota_k^n := \# I_k^n$;
$\mathcal{D}^\beta f := \partial^{|\beta|} f / \partial z_1^{\beta_1} ... \partial z_n^{\beta_n},\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n,\ f \in \mathcal{O}(D, G)$;
$\mathrm{ord}_z\, f :=$ krotność zera funkcji $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ w punkcie $z \in D$;
$m_D^{(k)}$ — funkcja Möbiusa rzędu k obszaru D;
$\gamma_D^{(k)}$ — pseudometryka Carathéodory'ego–Reiffena rzędu k obszaru D;
c_D^∞ — osobliwa funkcja Carathéodory'ego obszaru D;
γ_D^∞ — osobliwa pseudometryka Carathéodory'ego–Reiffena obszaru D;
g_D — funkcja Greena obszaru D;
A_D — pseudometryka Azukawy obszaru D;
$\mathcal{C}_p^1([a,b], D) :=$ rodzina krzywych $\alpha : [a,b] \to D$ kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$;
L_{d_D} — długość (krzywej ciągłej) względem pseudoodległości d_D;
d_D^i — wewnętrzna pseudoodległość względem d_D;
L_{δ_D} — długość (krzywej kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$) względem pseudometryki δ_D;
$\int \delta_D$ — forma całkowa pseudometryki δ_D.

Rozdział II

$dist(z, \partial A) := \inf\{\|z - w\| : w \in \partial A\},\ \partial A$ jest brzegiem obszaru w $\mathbb{C}^n$;
$\|f\|_A := \sup\{|f(z)| : z \in A\},\ f : A \to \mathbb{C}$.

Rozdział III

$\log D$ — obraz logarytmiczny obszaru Reinhardta D;
$V_j := \{z \in \mathbb{C}^n : z_j = 0\}$;
$W_j := \{z \in \mathbb{C}^n : z_j = 1\}$;
$\mathfrak{C}(\Omega, a)$ — maksymalny podstożek w $\overline{\Omega},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \overline{\Omega}$;
$\mathfrak{C}(\Omega) := \mathfrak{C}(\Omega, a)$;
$\mathfrak{C}(D) := \mathfrak{C}(\log D),\ D$ jest obszarem Reinhardta;
$p_j(x) := x_j,\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$;
$\boldsymbol{t}^\gamma := (t^{\gamma_1}, ..., t^{\gamma_n}) \in \mathbb{R}^n,\ \gamma^r \boldsymbol{t}^{\gamma - s} := (\gamma_1^r t^{\gamma_1 - s}, ..., \gamma_n^r t^{\gamma_n - s}),\ r, s, t \in \mathbb{R},\ \gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$;
$\widetilde{I}_k^n := \bigcup_{j=0}^k I_j^n$;
$\widetilde{\iota}_k^n := \# \widetilde{I}_k^n = \sum_{j=0}^k \iota_j^n$;
$V(z_1, ..., z_{\widetilde{\iota}_k^n})$ — n wymiarowy wyznacznik Vandermonda rzędu $\widetilde{\iota}_k^n$.

Bibliografia

[Azu 84] K. Azukawa, *Bergman metric on a domain of Thullen type*, Math. Rep. Toyama Univ. **7** (1984), 41–65.

[Azu 86] K. Azukawa, *Two intrinsic pseudo-metrics with pseudoconvex indicatrices and star-like domains*, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 627–647.

[Car 27] C. Carathéodory, *Über eine spezielle Metrik die in der Theorie der analytischen Funktionen auftritt*, Atti Pontifica Acad. Sci. Nuovi Lincei **80** (1927), 135–141.

[Coh-Vos 35] S. Cohn-Vossen, *Existenz kürzester Wege*, Comptes Rendus l'Acad. Sci. URSS, Vol. III (VIII) 8 **68** (1935), 239–242.

[Dem 87] J. P. Demailly, *Mesures de Monge–Ampère et mesures pluriharmoniques*, Math. Zeitschrift **194** (1987), 519–564.

[Fu 94] S. Fu, *On completeness of invariant metrics of Reinhardt domains*, Arch. Math. **63** (1994), 166–172.

[Gun-Ros 65] R. Gunning and H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Pentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[Hör 90] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North Holland, 1990.

[Jak-Jar 01] P. Jakóbczak and M. Jarnicki, *Lectures on Holomorphic Functions of Several Complex Variables*, plik PS na stronie http://www.im.uj.edu.pl/~jarnicki/mjp.htm, 2001.

[Jar-Pfl 91] M. Jarnicki and P. Pflug, *Some remarks on the product property*, in: Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc **52** (1991), 263–272.

[Jar-Pfl 93] M. Jarnicki and P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, de Gruyter Expositions Math. 9, Berlin, 1993.

[Kli 85] M. Klimek, *Extremal plurisubharmonic functions and invariant pseudodistances*, Bull. Soc. Math. France **113** (1985), 231–240.

[Kli 89] M. Klimek, *Infinitesimal pseudometrics and the Schwarz Lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 134–140.

[Kli 91] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Oxford University Press, 1991.

[Kob 98] S. Kobayashi, *Hyperbolic Complex Spaces*, Grundlehren der math. Wiss. 318, Springer Verlag, 1998.

[Kra 82] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1982.

[Lem 83] L. Lempert, *Solving the degenerate complex Monge-Ampère equation with one concentrated singularity*, Math. Ann. **263** (1983), 515–532.

[Nik 00] N. Nikolov, *Continuity and boundary behavior of the Carathéodory metric*, Math. Notes **67** (2000), 183–191.

[Nik-Zwo 02] N. Nikolov i W. Zwonek, *Some remarks on the Green function and the Azukawa pseudometric*, preprint (2002).

[Niv 95] S. Nivoche, *The pluricomplex Green function, capacitative notions and approximation problems in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 489–510.

[Pfl 84] P. Pflug, *About the Carathéodory completeness of all Reinhardt domains*, In: G. Zapata (ed.), Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II (1984), North-Holland, Amsterdam, 331–337.

[Rad 37] T. Radó, *Subharmonic Functions*, Ergebnisse der Math. und ihre Grenzgebiete, Springer Verlag, 1937.

[Ran 86] R. M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer Verlag, 1986.

[Rei 65] H. J. Reiffen, *Die Carathéodory Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik*, Math. Ann **161** (1965), 315–324.

[Rin 61] W. Rinow, *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, Grundlehren der math. Wiss. 105, Springer Verlag, 1961.

[Sib 75] N. Sibony, *Prolongement de fonctions holomorphes bornées et metrique de Carathéodory*, Invent. Math. **29** (1975), 205–230.

[Sic 62] J. Siciak, *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic fuctions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 322–357.

[Vla 66] V. Vladimirov, *Methods of the Theory of Several Complex Variables*, Cambridge, MA, 1966.

[Zap 02] P. Zapałowski, *Completeness of the inner kth Reiffen pseudometric*, Ann. Polon. Math. **79** (2002), 277-288.

[Zap 03] P. Zapałowski, *Inner k-th Carathéodory completeness of Reinhardt domains*, preprint (2003).

[Zwo 99] W. Zwonek, *On hyperbolicity of pseudoconvex Reinhardt domains*, Arch. Math. (Basel) **72** (1999), 304–314.

[Zwo 00a] W. Zwonek, *On Carathéodory completeness of pseudoconvex Reinhardt domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **128(3)** (2000), 857–864.

[Zwo 00b] W. Zwonek, *Completeness, Reinhardt domains and the method of complex geodesics in the theory of invariant functions*, Diss. Math. **388** (2000), 1–103.

[Zwo 01] W. Zwonek, *Inner Carathéodory completeness of Reinhardt domain*, Rend. Mat. Acc. Lincei **12** (2001), 153–157.