Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Tomasz Warszawski

Wariacje na temat twierdzenia Lemperta

Praca doktorska

Promotor:
Prof. dr hab. **Włodzimierz Zwonek**

Promotor pomocniczy:
Dr **Łukasz Kosiński**

Kraków 2014

Spis treści

Wstęp

Praca dotyczy geometrycznej teorii funkcji i składa się z trzech właściwych rozdziałów wraz z Dodatkiem.

W pierwszym rozdziale, opartym na [**KWZ13**], studiujemy geometrię obszarów semitubowych — naturalnych uogólnień obszarów tubowych w $\mathbb{C}^2$. Obszary semitubowe są niezmiennicze ze względu na przesunięcie ostatniej współrzędnej rzeczywistej (części urojonej drugiej współrzędnej zespolonej). Z kolei w obszarach tubowych niezmiennikiem jest translacja części urojonej. Ogólniej, można rozważać obszary niezmiennicze względem tzw. akcji pewnej grupy [**FI01, Hei91, HI97, Ian02, IST04, Sno82**], w tym obszary Reinhardta i tubowe [**KS04, KS06, Shi99, Shi00**]. W przypadku grupy addytywnej $\mathbb{R}$ mówimy o $\mathbb{R}$-akcjach [**For96, IT12, MO09**].

Punktem wyjścia jest dla nas twierdzenie Bochnera [**Boc38**]: obszar tubowy jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest wypukły. Następnie omówimy związki obszarów semitubowych z obszarami Hartogsa-Laurenta. Dzięki nim udaje się udowodnić wyniki w ogólniejszych przypadkach niż uzyskane przez J. M. Burguésa i R. J. Dwilewicza [**BD12**], ponadto otrzymuje się prostsze dowody znanych faktów. Wymieńmy główne wyniki rozdziału.

Twierdzenie 1.1.2 (por. [**BD12**], Corollary 4.1)**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem takim, że obszar semitubowy $S_{A(\Omega)}$ jest pseudowypukły dla każdej izometrii A przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas Ω jest wypukły.*

Mamy zatem, inaczej niż w [**BD12**], tezę bez założenia gładkości obszaru.

Standardowym problemem jest możliwość wyczerpania obszaru przez obszary o bardzo dobrych własnościach jak gładkość, silna wypukłość, silna pseudowypukłość czy silna liniowa wypukłość. W przypadku obszarów semitubowych udowodnimy

Twierdzenie 1.1.3. *Dowolny pseudowypukły obszar semitubowy można wyczerpać $\mathcal{C}^\infty$-gładkimi silnie pseudowypukłymi obszarami semitubowymi.*

W związku z Twierdzeniem 1.1.2 nasuwa się podobne pytanie o przypadek dowolnego obszaru w $\mathbb{C}^n$. Kluczem do rozwiązania są funkcje multisubharmoniczne.

Propozycja 1.3.6. *Niech $n \geqslant 2$. Wówczas istnieje niewypukły obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ taki, że obszar $A(D)$ jest pseudowypukły dla każdej rzeczywistej izometrii A w $\mathbb{C}^n$.*

Drugi rozdział poświęcamy stosunkowo nowym obiektom: słabym m-ekstremalnym, m-ekstremalnym i m-geodezyjnym w różnych klasach obszarów. Są to szczególne odwzorowania holomorficzne koła jednostkowego w obszar leżący w $\mathbb{C}^n$. Uogólniają ekstremalne Lemperta i geodezyjne, czyli klasyczne obiekty teorii funkcji holomorficznie kontraktywnych. Pojęcie m-ekstremalnej pojawiło się po raz pierwszy w pracy J. Aglera, Z. A. Lykovej i N. J. Younga [**ALY13**] (por. [**ALY14**]), jako narzędzie pomocnicze do badania problemów interpolacyjnych w zsymetryzowanym bidysku — specjalnym obszarze związanym z tzw. μ-syntezą. Autorzy podali proste własności m-ekstremalnych, nie wgłębiając się w ich studiowanie z punktu widzenia geometrycznej teorii funkcji. Początków idei należy jednak upatrywać w [**Pic16**]. Wynik G. Picka sformułowany w naszej notacji stwierdza, że funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ jest m-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia co najwyżej $m-1$. Jak się wydaje, bardziej znany jest inny rezultat tej pracy, zwany obecnie twierdzeniem Picka lub Nevanlinny-Picka (por. [**Mar75, Nev19, Nev29**]). Opisuje on w języku macierzy sytuacje, w których dany problem interpolacyjny w kole jednostkowym ma rozwiązanie. Oba rezultaty uzyskano dzięki redukcji Schura [**Gar07, Sch17, Sch18**].

Problemy ogólniejsze od słabej m-ekstremalności badał E. A. Poletsky [**Pol83**], a następnie A. Edigarian [**Edi95**], który uzyskał m.in. konieczną postać słabych m-ekstremalnych (ściślej mówiąc, odwzorowań dziś tak nazywanych) w elipsoidach zespolonych. Wykorzystamy ten rezultat do udowodnienia wystarczających warunków na m-ekstremalne w tych obszarach. Pokrewny problem badany był też w [**AT94**]. Ł. Kosiński i W. Zwonek [**KZ14**] wprowadzili koncepcję słabych m-ekstremalnych i m-geodezyjnych oraz rozwiązali pewne naturalne problemy związane z geometryczną teorią funkcji. Ta praca (w szczególności, pytania) była inspiracją dla autora, której efektem jest preprint [**War14**] i omawiany rozdział.

Prezentację wyników zaczynamy od ogólnych własności i przypadku płaskiego, następnie badamy quasi-zbalansowane obszary pseudowypukłe, elipsoidy zespolone i kulę euklidesową, kończąc na własnościach brzegowych. Otrzymujemy zarówno wyniki podobne, jak i stojące w opozycji do znanej teorii, tj. $m = 2$ [**JP93, JP13, Kob98**].

Szczególną uwagę zwracamy na pytanie o naturalne "słabe" uogólnienie twierdzenia Lemperta dla obszarów wypukłych [**Lem81, Lem82**]. Twierdzenie Lemperta implikuje, że dowolna słaba 2-ekstremalna obszaru wypukłego jest 2-geodezyjną, w szczególności 2-ekstremalną. Nie wiadomo jednak czy istnieje $m \geqslant 3$, obszar wypukły i jego słaba m-ekstremalna niebędąca m-ekstremalną. Z drugiej strony, istnieje obszar wypukły, w którym dla każdego $m \geqslant 3$ znajdzie się m-ekstremalna nie będąca m-geodezyjną.

Propozycja 2.4.3. *Niech $m \geqslant 3$ i $0 < a < 1$. Wówczas odwzorowanie*

$$f(\lambda) := (a\lambda^{m-2}, (1-a)\lambda^{m-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

jest m-ekstremalną, ale nie m-geodezyjną w $\mathcal{E}(1/2) \subset \mathbb{C}^2$.

Pierwszym przykładem wypukłym, ale dla $m \geqslant 4$, była jednostkowa kula euklidesowa $\mathbb{B}_n$, $n \geqslant 2$ [**KZ14**]. W ten sposób dochodzimy do brakującego przypadku $m = 3$.

Twierdzenie 2.5.8. *Dowolna* 3*-ekstremalna w* $\mathbb{B}_n$ *jest* 3*-geodezyjną.*

Wracając do wspomnianego problemu, podajemy opis m-ekstremalnych w wypukłych elipsoidach zespolonych o równych wykładnikach.

Propozycja 2.4.12. *Niech* $p_0 \geqslant 1/2$ *i niech* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p_0) \subset \mathbb{C}^n$ *będzie odwzorowaniem holomorficznym. Wtedy*

(*a*) f *jest słabą* m*-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest* m*-ekstremalną.*

(*b*) *jeśli* $f_j \not\equiv 0$, $j = 1, \ldots, n$, *to* f *jest* m*-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest następującej postaci dla* $p := (p_0, \ldots, p_0)$

$$f_j(\lambda) = a_j \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda - \alpha_{kj}}{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}\right)^{r_{kj}} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda}\right)^{1/p_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{$\star$}$$

gdzie

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}_*, \quad \alpha_{kj} \in \overline{\mathbb{D}}, \quad \alpha_{k0} \in \mathbb{D}, \quad r_{kj} \in \{0, 1\}, \quad r_{kj} = 1 \Longrightarrow \alpha_{kj} \in \mathbb{D},$$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{2p_j} \prod_{k=1}^{m-1} (\lambda - \alpha_{kj})(1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda) = \prod_{k=1}^{m-1} (\lambda - \alpha_{k0})(1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

przypadek $r_{kj} = 0$, $k = 1, \ldots, m-1$, $j = 1, \ldots, n$ *oraz*

$\{\alpha_{kj} : k = 1, \ldots, m-1\} = \{\alpha_{k0} : k = 1, \ldots, m-1\}$ *jako multizbiory,*

$j = 1, \ldots, n$, *jest wykluczony.*

Równoważność słabej m-ekstremalności i m-ekstremalności mamy też w klasycznych obszarach Cartana [**KZ14**], w szczególności w kuli.

Gdy $p/p_0 \in \mathbb{N}^n$, $p_0 \geqslant 1/2$, otrzymujemy pewną l-ekstremalność słabych m-ekstremalnych; co więcej, l jest ograniczone przez funkcję m i p. Mamy bowiem

Propozycja 2.4.13. *Niech* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ *będzie dane przez* $(\star)$*. Załóżmy, że*

(*a*) $p_1, \ldots, p_n \geqslant p_0 \geqslant 1/2$,

(*b*) $\alpha_{kj} \in \mathbb{D}$, $r_{kj} = 0$ *dla* $k = 1, \ldots, m-1$ *oraz* $j \in J$, *gdzie* $J := \{j : p_j/p_0 \notin \mathbb{N}\}$,

(*c*) $s_j := \#\{k : r_{kj} = 1\}$,

(*d*) $\widetilde{m} := m + \sum_{j \notin J} (p_j/p_0 - 1)s_j$.

Wówczas f *jest* $\widetilde{m}$*-ekstremalną.*

W szczególności, jeśli $p/p_0 \in \mathbb{N}^n$, *gdzie* $p_0 \geqslant 1/2$, *to odwzorowanie* f *jest* $(m + (m-1)(p_1/p_0 + \ldots + p_n/p_0 - n))$*-ekstremalną.*

Wśród innych interesujących nas problemów, wymieńmy jeszcze dzielenie m-geodezyjnych ($m \geqslant 3$) zbalansowanych obszarów pseudowypukłych przez funkcję identycznościową na kole jednostkowym. Celem jest rozstrzygnięcie czy powstałe w ten sposób odwzorowanie jest $(m-1)$-geodezyjną. Łatwo uzyskać pozytywną odpowiedź na analogiczne pytanie w przypadku m-ekstremalnych. Kolejną motywacją była pozytywna odpowiedź w [**EKZ13**] na pokrewny problem dla 2-geodezyjnych w quasi-zbalansowanych obszarach pseudowypukłych. Powtórzenie rozumowania daje pozytywną odpowiedź dla $m = 3$. Ogólny kontrprzykład dla $m \geqslant 4$ jest prostą konsekwencją Propozycji 2.4.3, natomiast dla $m \geqslant 5$ mamy go nawet w obszarze wypukłym.

Propozycja 2.4.5. *Niech $m \geqslant 5$ i niech liczby dodatnie a, b spełniają warunek $2a^2 + b = 1$. Wówczas odwzorowanie*

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E} := \{z \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3| < 1\},$$

$$f(\lambda) := (a\lambda, a\lambda^{m-2}, b\lambda^{m-1})$$

jest m-geodezyjną taką, że $\varphi(\lambda) := f(\lambda)/\lambda$ nie jest $(m-1)$-geodezyjną w $\mathcal{E}$.

Dla zobrazowania możliwego kierunku dalszych prac, przygotowaliśmy zestaw pytań otwartych. Miejsca ich wystąpienia w tekście są oznaczone (**P*n***). Niektóre z uzyskanych wyników częściowo na nie odpowiadają. Nadzieją autora jest, że to pole badań będzie na tyle interesujące, by całkowicie rozwiązać te problemy.

Trzeci, najobszerniejszy rozdział, zawiera szczegółowy dowód twierdzenia Lemperta dla obszarów silnie liniowo wypukłych. Przypomnijmy najważniejsze przypadki, w których uzyskano do tej pory równość wszystkich pseudoodległości i/lub pseudometryk holomorficznie kontraktywnych, nazywaną zwyczajowo twierdzeniem Lemperta dla odpowiedniej klasy obszarów. Pierwsza seria wyników należy do L. Lemperta [**Lem81, Lem82, Lem84**], odpowiednio w klasie obszarów silnie wypukłych, wypukłych i (niepłaskich ograniczonych) silnie liniowo wypukłych z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi. Są to bardzo głębokie rezultaty. Twierdzenie dla (ograniczonych) obszarów $\mathbb{C}$-wypukłych klasy $\mathcal{C}^2$ udowodnił D. Jacquet [**Jac06, Jac08**] (nie wiadomo czy można opuścić założenie $\mathcal{C}^2$). Znany jest ponadto inny dowód dla przypadku wypukłego [**JP13**, Chapter 11], por. [**RW83**]. Jest on krótszy, ale z drugiej strony, metody L. Lemperta są ogólniejsze. Teza twierdzenia Lemperta zachodzi też dla następujących obszarów wywodzących się z μ-syntezy: zsymetryzowanego bidysku [**AY04, Cos04**] i tetrabloku [**EKZ13**]. Są to obszary istotne z tego powodu, że nie można ich wyczerpać obszarami biholomorficznymi z wypukłymi [**Edi04, EKZ13**]. Dlatego są w ostatnich latach przedmiotem intensywnych badań.

Zajmujemy się przypadkiem obszarów silnie liniowo wypukłych. L. Lempert dowiódł, że funkcja Lemperta i pseudoodległość Carathéodory'ego oraz pseudometryka Kobayashiego-Roydena i pseudometryka Carathéodory'ego-Reiffena pokrywają się na niepłaskich ograniczonych obszarach silnie liniowo wypukłych z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi. Oryginalny dowód został zaprezentowany jedynie w trudno dostępnym sprawozdaniu z konferencji [**Lem84**] i w niektórych miejscach był bardzo szkicowy. W [**KW13**] podjęliśmy próbę uzupełnienia szczegółów i przebudowy całego dowodu tak, by otrzymać też pośrednie wyniki dla klasy $\mathcal{C}^2$. Zaowocowało to rozwiązaniem dla tego przypadku. Podkreślamy jednak, że **idea dowodu należy całkowicie do L. Lemperta**.

Udowodnimy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3.1.13 (Twierdzenie Lemperta, por. [**Lem84**]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym. Wówczas*

$$\boldsymbol{c}_D = \boldsymbol{\ell}_D, \quad \boldsymbol{\gamma}_D = \varkappa_D.$$

Twierdzenie 3.1.20 (por. [**Lem84**]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym. Wówczas*

(*a*) *odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabym E-odwzorowaniem.*
(*b*) *jeśli D ma brzeg $\mathbb{R}$-analityczny, to odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest E-odwzorowaniem.*
(*c*) *gdy D jest klasy $\mathcal{C}^k$, $k = 3, 4, \ldots, \infty$, każde słabe E-odwzorowanie $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ i stowarzyszone odwzorowania $\widetilde{f}, \rho$ są klasy $\mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}$, przy dowolnym $\varepsilon \in (0, 1)$.*

Pragniemy zwrócić uwagę na główne różnice w stosunku do [**Lem84**]:

- wyniki uzyskane dla przypadku $\mathcal{C}^2$,
- oddzielone pojęcia odwzorowań stacjonarnych i E-odwzorowań,
- geometria obszarów badana w otoczeniach brzegów odwzorowań stacjonarnych, co pozwala otrzymać lokalizację,
- własności brzegowe obszarów silnie wypukłych wyrażone w języku funkcji Minkowskiego.

Dodatkową motywacją do podjęcia pracy był fakt pokazany w [**PZ12**], że zsymetryzowany bidysk można wyczerpać obszarami silnie liniowo wypukłymi.

W Dodatku znajdują się potrzebne nam ogólne fakty z analizy zespolonej. Pracę kończymy spisem symboli i cytowanych prac.

Podziękowania

Serdecznie dziękuję profesorowi Włodzimierzowi Zwonkowi i doktorowi Łukaszowi Kosińskiemu za pomoc w powstaniu tej pracy. Podziękowania kieruję dalej do organizatorów Środowiskowych Studiów Doktoranckich z Nauk Matematycznych. Dziękuję też uczestnikom seminariów "Geometryczna Teoria Funkcji" i "Analiza Zespolona", a także uczestnikom konferencji, w których miałem przyjemność uczestniczyć, szczególnie kierując te słowa do profesora Pascala J. Thomasa.

Powstanie pracy zostało współsfinansowane ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer **DEC-2012/05/N/ST1/03067**.

ROZDZIAŁ 1

Obszary semitubowe

1.1. Wprowadzenie

Niech $z_1, \ldots, z_n$ będą standardowymi współrzędnymi zespolonymi w $\mathbb{C}^n$, natomiast $x_1, \ldots, x_m$ standardowymi współrzędnymi rzeczywistymi w $\mathbb{R}^m$. Naturalnie utożsamiamy euklidesową przestrzeń zespoloną i rzeczywistą

$$\mathbb{C}^n \ni z = (z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \longmapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Definicja 1.1.1. Niech B będzie podzbiorem $\mathbb{R}^3$. *Zbiorem semitubowym* nazywamy zbiór

$$S_B := \{z \in \mathbb{C}^2 : (z_1, \operatorname{Re} z_2) \in B\},$$

co utożsamia się z $B \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$. Zbiór B jest wówczas *bazą*. Mówimy w tej sytuacji, że S_B jest zbiorem semitubowym nad B.

Gdy baza jest obszarem, oznaczanym Ω, otrzymujemy *obszar semitubowy* S_Ω.

Obszary tubowe to zbiory postaci $\{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z \in \Omega\}$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem. Zauważmy, że dowolny obszar tubowy w $\mathbb{C}^2$ jest semitubowy. Mamy następujące twierdzenie Bochnera [**Boc38**]: obszar tubowy jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest wypukły. Łatwo zaobserwować, że bezpośredni analogon twierdzenia Bochnera jest fałszywy dla obszarów semitubowych. Wynika to z faktu, że dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$, obszar $S_{D\times(0,1)}$ jest pseudowypukły.

Okazuje się, że można dodać warunek, z którego wyniknie oczekiwana wypukłość. Jednym z głównych rezultatów [**BD12**] jest fakt, że jeżeli obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ klasy $\mathcal{C}^2$ jest taki, że dla dowolnej izometrii A w $\mathbb{R}^3$ (zob. Dodatek) obszar $S_{A(\Omega)}$ jest pseudowypukły, to Ω musi być wypukły (formalnie, Ω jest z założenia ograniczony, jednak w dowodzie nie ma to znaczenia). Pokażemy, że można opuścić założenie gładkości.

Twierdzenie 1.1.2 (por. [**BD12**], Corollary 4.1)**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem takim, że obszar semitubowy $S_{A(\Omega)}$ jest pseudowypukły dla każdej izometrii A przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas Ω jest wypukły.*

Naturalnym pytaniem pojawiającym się przy rozważaniu obszarów semitubowych jest problem wyczerpywania pseudowypukłego obszaru semitubowego przez gładkie obszary semitubowe. Ogólnie, przez *wyczerpanie* obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ rozumiemy ciąg obszarów $\Omega_j \subset \mathbb{R}^m$, $j \in \mathbb{N}$, takich, że $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ i $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Używamy w takiej sytuacji symbolu $\Omega_j \nearrow \Omega$. Pokażemy, że jest jeszcze lepiej, mamy bowiem

Twierdzenie 1.1.3. *Dowolny pseudowypukły obszar semitubowy można wyczerpać $\mathcal{C}^\infty$-gładkimi silnie pseudowypukłymi obszarami semitubowymi.*

Zwracamy uwagę na problem pojawiający się w przypadku definiowania nieograniczonych obszarów pseudowypukłych (zob. Dodatek). Z konstrukcji będzie jednak jasne, że funkcje r_j definiujące kolejne obszary semitubowe D_j spełniają warunek $\mathcal{L}r_j(a;X) \geqslant |X|^2/j$ dla $a \in \partial D_j$ i $X \in \mathbb{C}^2$, gdzie

$$\mathcal{L}u(a;X) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) X_j \overline{X}_k, \quad X \in \mathbb{C}^n, \tag{1.1.1}$$

jest *formą Leviego* funkcji u klasy $\mathcal{C}^2$.

Twierdzenie 1.1.3 pozwala wywnioskować Twierdzenie 1.1.2 z przypadku silnie pseudowypukłego, zob. Uwagę 1.2.1.

Rozważmy odwzorowanie

$$\Pi : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \longmapsto (z_1, e^{z_2}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$$

(gdzie $S_* := S \setminus \{0\}$). Indukuje ono nakrycie holomorficzne między obszarami semitubowymi S_Ω a obszarami Hartogsa-Laurenta $\Pi(S_\Omega)$ leżącymi w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$. Obszar $D \subset \mathbb{C}^2$ określamy mianem *obszaru Hartogsa-Laurenta*, jeżeli każde niepuste włókno $\{z_2 \in \mathbb{C} : (z_1, z_2) \in D\}$ jest sumą mnogościową pierścieni, tzn. zbiorów postaci

$$\mathbb{A}(r, R) := \{z_2 \in \mathbb{C} : r < |z_2| < R\}, \quad 0 \leqslant r < R \leqslant \infty.$$

Rzut D na pierwszą współrzędną nazywamy *bazą*. Mamy wzajemną jednoznaczność między rozważanymi klasami obszarów.

Lemat 1.1.4. *Odwzorowanie*

$$S_\Omega \longmapsto \Pi(S_\Omega)$$

jest bijekcją między zbiorem pseudowypukłych obszarów semitubowych w $\mathbb{C}^2$ i zbiorem pseudowypukłych obszarów Hartogsa-Laurenta w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$.

Dowód. Załóżmy, że obszar S_Ω jest pseudowypukły. Wtedy funkcja $u := -\log \operatorname{dist}(\cdot, \partial S_\Omega)$ jest plurisubharmoniczna w S_Ω. Skoro u nie zależy od $\operatorname{Im} z_2$, funkcja v dana wzorem $v(z) := u(z_1, \log z_2)$, $z \in \Pi(S_\Omega)$, jest dobrze zdefiniowana i plurisubharmoniczna w $\Pi(S_\Omega)$. Wobec tego,

$$\widetilde{v}(z) := \max\{v(z), |z|, -\log |z_2|\}, \quad z \in \Pi(S_\Omega),$$

jest wyczerpującą funkcją plurisubharmoniczną dla $\Pi(S_\Omega)$ (zob. Dodatek).

Przeciwna implikacja wynika z ogólnej własności: przeciwobraz obszaru pseudowypukłego przez odwzorowanie holomorficzne jest pseudowypukły. □

Stwierdziliśmy naturalną relację między (pseudowypukłymi) obszarami semitubowymi a (pseudowypukłymi) obszarami Hartogsa-Laurenta. Dostępna jest bogata literatura o tej klasie obszarów, np. [**JP00, Par03**], co pozwala wnioskować własności pseudowypukłych obszarów semitubowych z własności pseudowypukłych obszarów Hartogsa-Laurenta. W szczególności, nieregularne obszary Hartogsa-Laurenta typu "worm" [**DF77**], pozwalają konstruować nieregularne pseudowypukłe obszary semitubowe.

1.2. Dowody Twierdzeń 1.1.2 oraz 1.1.3

Dowód Twierdzenia 1.1.2. Przypuśćmy, że Ω nie jest wypukły. Idea dowodu jest następująca. Znajdujemy w Ω ciąg równoległych odcinków jednakowej długości takich, że wnętrze granicznego odcinka I przecina $\partial\Omega$, podczas gdy końce I leżą w obszarze. Obracamy Ω w taki sposób, by I stał się równoległy do osi $\operatorname{Re} z_2$. Obraz obróconego obszaru semitubowego poprzez Π jest (na mocy założenia) pseudowypukłym obszarem Hartogsa-Laurenta, posiadającym specjalny ciąg pierścieni. Pseudowypukłość pozwoli nam dostać sprzeczność z Kontinuitätssatz.

Przechodzimy do szczegółów. Dzięki [**Hör94**, Theorem 2.1.27] znajdujemy punkt $a \in \partial\Omega$ i wielomian kwadratowy P na $\mathbb{R}^3$ taki, że

- $P(a) = 0$,
- $v := \nabla P(a) \neq 0$,
- $\langle v, X\rangle = 0$ i $C := -\mathcal{H}P(a; X) > 0$ dla pewnego $X \in \mathbb{R}^3$,
- $P(x) < 0$ implikuje $x \in \Omega$ dla $x \in \mathbb{R}^3$ bliskich a.

Przez ∇ i $\mathcal{H}$ oznaczyliśmy *gradient* i *hesjan*, czyli

$$\nabla u(a) := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(a)\right),$$

$$\mathcal{H}u(a; X) := \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(a) X_j X_k, \quad X \in \mathbb{R}^m,$$

gdzie u jest funkcją klasy $\mathcal{C}^1$ i $\mathcal{C}^2$ odpowiednio. Stosujemy również symbol $\mathcal{H}u(a)$ do oznaczenia *macierzy Hessego*

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(a)\right]_{1 \leqslant j,k \leqslant m}.$$

W szczególności, $\mathcal{H}u(a; X) = X^T \mathcal{H}u(a) X$. Naturalnie, $\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$ jest *iloczynem skalarnym* w $\mathbb{R}^m$.

Można założyć, że $|v| = 1$, gdzie $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ jest *normą euklidesową*. Dla $\varepsilon \geqslant 0$ i $\delta \in \mathbb{R}$ takich, że $(\varepsilon, \delta) \neq (0, 0)$, $\varepsilon \mathcal{H}P(a; v) \leqslant 1$ i $|\delta v^T \mathcal{H}P(a) X| \leqslant 1/4$, mamy (ze wzoru Taylora dla wielomianu stopnia 2)

$$\begin{aligned}P(a-\varepsilon v+\delta X) &= P(a)+\langle\nabla P(a),-\varepsilon v+\delta X\rangle+\frac{1}{2}\mathcal{H}P(a;-\varepsilon v+\delta X)\\ &= -\varepsilon+\frac{1}{2}\mathcal{H}P(a;-\varepsilon v)+\frac{1}{2}\mathcal{H}P(a;\delta X)-\varepsilon\delta v^T\mathcal{H}P(a)X\\ &\leqslant -\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2\mathcal{H}P(a;v)-\frac{1}{2}C\delta^2+\frac{1}{4}\varepsilon\\ &\leqslant -\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{2}C\delta^2+\frac{1}{4}\varepsilon<0.\end{aligned}$$

Znaczy to, że $a-\varepsilon v+\delta X\in\Omega$, jeśli ten punkt jest wystarczająco blisko a (tzn. jeśli (ε,δ) jest bliski $(0,0)$, ale nie równy $(0,0)$ i $\varepsilon\geqslant 0$). W szczególności, istnieje domknięty niezdegenerowany prostokąt $R\subset\mathbb{R}^3$ taki, że

- $a\in\partial R\cap\partial\Omega$,
- a nie jest wierzchołkiem R,
- $R\setminus\{a\}\subset\Omega$.

(Intuicyjnie prosty fakt geometryczny o zaawansowanym dowodzie.)

Istnieje izometria A spełniająca warunki

- $A(R)=[\alpha,\beta]\times\{0\}\times[\alpha',\beta']\subset\mathbb{R}^3$ dla pewnych $\alpha<\beta$ i $\alpha'<\beta'$,
- $A(a)\in\{\beta\}\times\{0\}\times(\alpha',\beta')$.

Skoro $S_{A(\Omega)}$ jest pseudowypukły, to $\Pi(S_{A(\Omega)})$ też (Lemat 1.1.4). Ze względu na postać $A(\Omega)$, mamy rodzinę odwzorowań holomorficznych

$$f_\gamma(\lambda):=(\gamma,\lambda),\quad \lambda\in\overline{\mathbb{A}}(e^{\alpha'},e^{\beta'}),\ \gamma\in[\alpha,\beta],$$

takich, że

$$\bigcup_{\gamma\in[\alpha,\beta)} f_\gamma(\overline{\mathbb{A}}(e^{\alpha'},e^{\beta'}))\subset\Pi(S_{A(\Omega)}),$$
$$\bigcup_{\gamma\in[\alpha,\beta]} f_\gamma(\partial\mathbb{A}(e^{\alpha'},e^{\beta'}))\subset\subset\Pi(S_{A(\Omega)}).$$

Z drugiej strony, $f_\beta(\overline{\mathbb{A}}(e^{\alpha'},e^{\beta'}))\not\subset\Pi(S_{A(\Omega)})$, co przeczy Kontinuitätssatz (por. Dodatek). $\square$

Dowód Twierdzenia 1.1.3. Oznaczmy przez D dany obszar semitubowy, niech $u:=-\log\operatorname{dist}(\cdot,\partial D)\in\mathcal{PSH}(D)$ (zbiór funkcji plurisubharmonicznych na D) oraz

$$D_\varepsilon:=\{z\in D:\operatorname{dist}(z,\partial D)>\varepsilon\},\quad \varepsilon\in(0,1).$$

Definiujemy regularyzacje u_ε funkcji u za pomocą splotu z funkcjami radialnymi (Dodatek). Mamy $u_\varepsilon\in\mathcal{PSH}\cap\mathcal{C}^\infty(D_\varepsilon)$ oraz $u_\varepsilon\searrow u$, gdy $\varepsilon\searrow 0$ (malejąco). Co więcej, u_ε nie zależy od $\operatorname{Im} z_2$.

Dla $\varepsilon\in(0,1)$ i $\delta>0$ połóżmy

$$\widetilde{u}_\varepsilon(z):=u_\varepsilon(z)+\varepsilon|(z_1,\operatorname{Re} z_2)|^2,\quad \widetilde{D}_{\varepsilon,\delta}:=\{z\in D_\varepsilon:\widetilde{u}_\varepsilon(z)<1/\delta\}.$$

Zauważmy, że $\overline{\widetilde{D}_{\varepsilon,\delta}} \subset D_\varepsilon$ dla $\delta > -1/\log\varepsilon$. Rzeczywiście, jeżeli $z_j \in \widetilde{D}_{\varepsilon,\delta}$, $z_j \to z$, to $u(z_j) \leqslant \widetilde{u}_\varepsilon(z_j) < 1/\delta < -\log\varepsilon$, skąd $u(z) < -\log\varepsilon$.

Na mocy Twierdzenia Sarda, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zbiór A_ε liczb $\delta > 0$ takich, że $\nabla\widetilde{u}_\varepsilon(z) \neq 0$, gdy $\widetilde{u}_\varepsilon(z) = 1/\delta$, jest gęsty w $\mathbb{R}_{>0}$. Dla $j \in \mathbb{N}$ wybieramy liczbę $\delta_{1/j}$ spełniającą warunki

- $\delta_{1/j} > -1/\log(1/j)$,
- $\delta_{1/j} \in A_{1/j}$.

Ponieważ minoranty $-1/\log(1/j)$ dążą do zera, można założyć dodatkowo, że $\delta_{1/j} \searrow 0$ wraz z $j \nearrow \infty$ (rosnąco). Wówczas kładziemy

$$\widetilde{D}_{1/j} := \widetilde{D}_{1/j,\,\delta_{1/j}}.$$

Z własności

- $r_j := \widetilde{u}_{1/j} - 1/\delta_{1/j}$ są $\mathcal{C}^\infty$-gładkimi funkcjami definiującymi $\widetilde{D}_{1/j}$, takimi, że
$$\mathcal{L}r_j(a;X) \geqslant \frac{1}{j}|X|^2, \quad a \in \partial\widetilde{D}_{1/j},\ X \in \mathbb{C}^2,$$
- $\widetilde{u}_\varepsilon$ są niezależne od $\operatorname{Im} z_2$,

wynika, że $\widetilde{D}_{1/j}$ są $\mathcal{C}^\infty$-gładkimi silnie pseudowypukłymi (por. Dodatek) otwartymi zbiorami semitubowymi. Nie dostarcza trudności sprawdzenie, że

$$\widetilde{D}_{1/j} \subset \widetilde{D}_{1/k} \subset D, \quad j < k,$$

i każdy punkt $z \in D$ należy do pewnego $\widetilde{D}_{1/j}$.

Aby zakończyć dowód, ustalamy $z \in D$ i definiujemy D_j jako składową $\widetilde{D}_{1/j}$ zawierającą z. Wtedy $D_j \subset D_{j+1} \subset D$ i $\bigcup_{j=1}^\infty D_j = D$ (faktycznie, niech $w \in D$, weźmy krzywą $\gamma \subset D$ łączącą w, z; wówczas $\gamma \subset \widetilde{D}_{1/j_1} \cup \ldots \cup \widetilde{D}_{1/j_m} = \widetilde{D}_{1/\max j_k}$ oraz $w \in \gamma \subset D_{\max j_k}$). □

Uwaga 1.2.1. Niech $\mathcal{P} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie rzutowaniem, a G bazą obszaru semitubowego D. Zauważmy, że z konstrukcji obiektów w dowodzie Twierdzenia 1.1.3 wynika, że $S_{A(\mathcal{P}(D_j))}$ są silnie pseudowypukłymi obszarami wyczerpującymi $S_{A(G)}$ dla dowolnej izometrii A w $\mathbb{R}^3$. Stąd Twierdzenie 1.1.2 wynika z tego samego rezultatu dla przypadku silnie pseudowypukłego [**BD12**, Corollary 4.1]. Wydaje się jednak, że zaprezentowany dowód Twierdzenia 1.1.2 jest prostszy i bardziej naturalny.

1.3. Inne problemy związane z obszarami semitubowymi

Rozumowanie z dowodu Twierdzenia 1.1.2 pozwala wykazać następującą własność pseudowypukłych obszarów Hartogsa-Laurenta i pseudowypukłych obszarów semitubowych.

Propozycja 1.3.1. (a) *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie pseudowypukłym obszarem Hartogsa-Laurenta z bazą $G \subset \mathbb{C}$. Rozważmy funkcję*

$$d : G \ni z_1 \longmapsto \text{liczba składowych } D_{z_1},$$

gdzie $D_{z_1} := D \cap (\{z_1\} \times \mathbb{C})$. Wtedy d jest półciągła z dołu.

(b) *Niech obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie taki, że S_Ω jest pseudowypukłym obszarem semitubowym. Definiujemy funkcję*

$$\omega : \Omega_1 \ni z_1 \longmapsto \text{liczba składowych } \Omega \cap (\{z_1\} \times \mathbb{R}),$$

gdzie $\Omega_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Omega \cap (\{z_1\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset\}$. Wówczas ω jest półciągła z dołu.

Dowód. (a) Ustalmy $z_0 \in G$ i oznaczmy $m := d(z_0)$. Niech $w_1, \ldots, w_m \in D_{z_0}$ będą punktami z różnych składowych D_{z_0}, oznaczonych $W_1, \ldots, W_m$ odpowiednio. Niech $U_j \subset D$ będzie otoczeniem W_j, $j = 1, \ldots, m$. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $G \ni z_k \to z_0$ taki, że $d(z_k) \leqslant m - 1$. Wówczas dla $k \geqslant k_0$ mamy $(z_k, w_j) \in U_j$, $j = 1, \ldots, m$. Skoro punkty (z_k, w_j), $j = 1, \ldots, m$, leżą w co najwyżej $m - 1$ składowych D_{z_k}, to (dla każdego $k \geqslant k_0$) pewne dwa różne $(z_k, w_{j_k}), (z_k, w_{j'_k})$, należą do tej samej (która z definicji jest pierścieniem). Definiujemy odwzorowania

$$f_k(\lambda) := (z_k, \lambda), \quad \lambda \in \overline{A}_k,\ k \geqslant k_0,$$

gdzie A_k jest pierścieniem, w którego brzegu leżą w_{j_k} i $w_{j'_k}$. Ponieważ dla nieskończenie wielu k zbiory A_k są identyczne, na mocy Kontinuitätssatz zastosowanego analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 1.1.2, otrzymujemy sprzeczność.

(b) Wynika to z punktu (a) zastosowanego do obszaru $\Pi(S_\Omega)$. □

Uwaga 1.3.2 (por. [**BD12**], Section 6.4)**.** Z Propozycji 1.3.1(b) wynika, że obszar semitubowy nad (otwartym) torusem w pozycji *pionowej* (jak również w ustawieniach dostatecznie bliskich pionowemu), nie jest pseudowypukły. Rozumiemy to ustawienie w ten sposób, że torus powstaje przez obrót koła

$$x_1^2 + (x_2 - R)^2 < r^2,\ x_3 = 0, \quad R > r > 0,$$

wokół osi x_1.

W przypadku obszarów semitubowych nad *standardowo* leżącymi torusami, mamy następującą charakteryzację pseudowypukłości (i prostsze rachunki).

Propozycja 1.3.3 (por. [**BD12**], Theorem 6.1)**.** *Niech torus $T \subset \mathbb{R}^3$ będzie w standardowej pozycji, tzn. dany przez obrót koła*

$$(x_1 - R)^2 + x_3^2 < r^2,\ x_2 = 0, \quad R > r > 0,$$

wokół osi x_3. Wówczas obszar semitubowy S_T jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

DOWÓD. Z Lematu 1.1.4 wiemy, że S_T jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $\Pi(S_T)$ jest pseudowypukły.

Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ należy do T wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 < r^2.$$

Z kolei punkt $z \in \mathbb{C}^2$ należy do $\Pi(S_T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(z_1, \log|z_2|) \in T$, równoważnie

$$(|z_1| - R)^2 + \log^2|z_2| < r^2, \quad w \neq 0.$$

Wobec tego,

$$\Pi(S_T) = \{z \in \mathbb{A}(R - r, R + r) \times \mathbb{C} : -\infty < \log|z_2| < \sqrt{r^2 - (|z_1| - R)^2}\}$$

(zauważmy, że $r^2 - (|z_1| - R)^2 > 0$ dla $z_1 \in \mathbb{A}(R - r, R + r)$).

Korzystając z charakteryzacji pseudowypukłych obszarów Hartogsa-Laurenta (Dodatek), wnosimy, że $\Pi(S_T)$ jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja

$$z_1 \longmapsto -\sqrt{r^2 - (|z_1| - R)^2}$$

jest subharmoniczna w pierścieniu $\mathbb{A}(R - r, R + r)$.

Oznaczmy $u(z_1) := r^2 - (|z_1| - R)^2$. Wtedy warunek laplasjanu $\Delta\sqrt{u} \leqslant 0$ w $\mathbb{A}(R-r, R+r)$ jest równoważny nierówności $2uu_{z_1\bar{z}_1} \leqslant u_{z_1}u_{\bar{z}_1}$, wiążącej pochodne cząstkowe. Stąd

$$2(r^2 - (|z_1| - R)^2)\left(-1 + \frac{2R}{4|z_1|}\right) \leqslant \left(-\bar{z}_1 + 2R\frac{\bar{z}_1}{2|z_1|}\right)\left(-z_1 + 2R\frac{z_1}{2|z_1|}\right).$$

Przekształcamy równoważnie

$$(r^2 - (|z_1| - R)^2)(R - 2|z_1|) \leqslant |z_1|(|z_1| - R)^2,$$

$$r^2(R - 2|z_1|) \leqslant (R - |z_1|)^3 \quad \text{dla} \quad R - r < |z_1| < R + r.$$

Funkcja

$$f(t) := r^2(R - 2t) - (R - t)^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

przyjmuje w punktach $R-r$ i $R+r$ ujemne wartości $r^2(r-R)$ i $r^2(-R-r)$. Wynika stąd, że $f \leqslant 0$ na przedziale $(R - r, R + r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t_0) \leqslant 0$ dla każdego pierwiastka t_0 funkcji f' na $(R - r, R + r)$.

Ponieważ $f'(t) = -2r^2 + 3(R - t)^2$, zerami są tylko $R \pm \sqrt{\frac{2}{3}}r$. Mamy

$$f\left(R + \sqrt{\frac{2}{3}}r\right) = -r^2R - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}r^3 < 0$$

oraz

$$f\left(R - \sqrt{\frac{2}{3}}r\right) = -r^2R + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}r^3,$$

co jest niedodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

□

Ze względu na Twierdzenie 1.1.2, naturalne jest rozważenie następującego problemu. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem spełniającym warunek: dla każdej rzeczywistej izometrii A przestrzeni $\mathbb{C}^n$ obszar $A(D)$ jest pseudowypukły. Czy wynika stąd, że D jest wypukły? Zagadnienie jest nietrywialne dla $n \geqslant 2$.

Pokażemy, że odpowiedź jest negatywna. W tym celu wprowadzimy pojęcie funkcji multisubharmonicznych. Jest to analogon funkcji plurisubharmonicznych w sytuacji rzeczywistej. Funkcja plurisubharmoniczna jest z definicji subharmoniczna na przecięciu dziedziny z każdą prostą zespoloną, czyli specyficznie ustawioną płaszczyzną rzeczywistą. Zatem plurisubharmoniczność jest niezmiennikiem izometrii zespolonych. Z kolei funkcja multisubharmoniczna będzie subharmoniczna na przecięciu dziedziny z dowolną płaszczyzną rzeczywistą, więc własność multisubharmoniczności będzie niezmiennicza względem izometrii rzeczywistych. Precyzujemy to w następujący sposób.

Definicja 1.3.4. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, będzie obszarem. Funkcję $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}$ nazywamy *multisubharmoniczną*, jeśli jest półciągła z góry oraz funkcja

$$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : a + sX + tY \in \Omega\} \ni (s,t) \longmapsto u(a + sX + tY) \in \mathbb{R}_{-\infty}$$

jest subharmoniczna dla dowolnych $a \in \Omega$ i wektorów ortonormalnych $X, Y \in \mathbb{R}^m$ (jeśli dziedzina jest pusta to przyjmujemy, że ten warunek jest spełniony).

Uwaga 1.3.5. (a) Funkcja multisubharmoniczna na obszarze leżącym w $\mathbb{C}^n$ jest plurisubharmoniczna i te dwa pojęcia są identyczne w $\mathbb{C}$.

(b) Funkcja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^2$ jest multisubharmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_{X,Y} u(a) := \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}(a) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(a)(X_j^2 + Y_j^2) \geqslant 0$$

dla $a \in \Omega$ i $X, Y \in \mathbb{R}^m$ takich, że $|X| = |Y| = 1$, $\langle X, Y\rangle = 0$.

Propozycja 1.3.6. *Niech $n \geqslant 2$. Wówczas istnieje niewypukły obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ taki, że obszar $A(D)$ jest pseudowypukły dla każdej rzeczywistej izometrii A w $\mathbb{C}^n$.*

Dowód. Dla $m \geqslant 2$ i $\alpha \in (0,1]$ definiujemy wielomian

$$u(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 - \alpha x_m^2).$$

Mamy

$$\Delta_{X,Y} u(a) = X_1^2 + \ldots + X_{m-1}^2 - \alpha X_m^2 + Y_1^2 + \ldots + Y_{m-1}^2 - \alpha Y_m^2.$$

Dla ortonormalnych X, Y dostajemy $\Delta_{X,Y}u(a) = 2 - (1+\alpha)(X_m^2 + Y_m^2)$. Teraz zauważmy, że

$$\begin{aligned}(1 - X_m^2)(1 - Y_m^2) &= (X_1^2 + \ldots + X_{m-1}^2)(Y_1^2 + \ldots + Y_{m-1}^2) \\ &\geqslant (X_1Y_1 + \ldots + X_{m-1}Y_{m-1})^2 = X_m^2 Y_m^2,\end{aligned}$$

skąd $X_m^2 + Y_m^2 \leqslant 1$ i $\Delta_{X,Y}u(a) \geqslant 1 - \alpha$, zatem u jest multisubharmoniczna.

Połóżmy $m := 2n$ i $D := \{z \in \mathbb{C}^n : u(z) < 1\}$. Zbiór D jest otwarty, spójny (jest gwiaździsty względem zera) i niewypukły. Z multisubharmoniczności u wynika, że $A(D)$ jest pseudowypukły dla każdej rzeczywistej izometrii A. □

Uwaga 1.3.7. Można znaleźć przykład ograniczony. Niech bowiem u i D będą jak w dowodzie Propozycji 1.3.6. Weźmy pod uwagę obszar wypukły $G \subset \mathbb{C}^n$ taki, że zbiór $\widetilde{D} := D \cap G$ jest spójny, niewypukły i ograniczony (np. kula $r\mathbb{B}_n$, $r > 1$, jest dobra). Wtedy $\widetilde{D}$ spełnia żądany warunek. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\widetilde{D} &= \{z \in G : u(z) < 1\}, \\ A(\widetilde{D}) &= \{Az : z \in G,\ u(z) < 1\} \\ &= \{w \in A(G) : (u \circ A^{-1})(w) < 1\},\end{aligned}$$

ale $A(G)$ jest wypukły i $u \circ A^{-1}$ jest multisubharmoniczna, więc plurisubharmoniczna. Implikuje to pseudowypukłość $A(\widetilde{D})$.

Kończymy własnością, która wprowadza w tematykę kolejnych rozdziałów. Zdefiniujemy najpierw funkcje holomorficznie kontraktywne. Opieramy się na monografii [**JP13**].

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcja d_X jest *pseudoodległością* na X, jeśli

- $d_X : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$,
- $d_X(x, x) = 0$, $x \in X$,
- $d_X(x, y) = d_X(y, x)$, $x, y \in X$,
- $d_X(x, z) \leqslant d_X(x, y) + d_X(y, z)$, $x, y, z \in X$.

Funkcja δ_X jest *pseudometryką* na X, jeśli

- $\delta_X : X \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, \infty)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$,
- $\delta_X(x; \lambda v) = |\lambda|\delta_X(z; v)$, $x \in X$, $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definicja 1.3.8. *Odległością Möbiusa* nazywamy funkcję

$$\boldsymbol{m}(\lambda_1, \lambda_2) := \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1\overline{\lambda}_2}\right|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}.$$

Niech

$$\boldsymbol{p} := \operatorname{tgh}^{-1} \boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\boldsymbol{m}}{1-\boldsymbol{m}}$$

oznacza *odległość Poincaré*.

Ponadto, *metrykę Poincaré* określamy jako

$$\boldsymbol{\gamma}(\lambda) := \frac{1}{1-|\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Definicja 1.3.9. Rodzinę pseudoodległości $d = (d_D)_D$, indeksowaną po wszystkich obszarach we wszystkich przestrzeniach $\mathbb{C}^n$, nazywamy *holomorficznie kontraktywną*, gdy
(*a*) $d_{\mathbb{D}} = \boldsymbol{p}$,
(*b*) $d_G(f(z), f(w)) \leqslant d_D(z, w)$, $f \in \mathcal{O}(D, G)$, $z, w \in D \subset \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^k$.

Definicja 1.3.10. Rodzinę pseudometryk $\delta = (\delta_D)_D$, indeksowaną po wszystkich obszarach we wszystkich przestrzeniach $\mathbb{C}^n$, nazywamy *holomorficznie kontraktywną*, gdy
(*a*) $\delta_{\mathbb{D}}(\cdot; 1) = \boldsymbol{\gamma}$,
(*b*) $\delta_G(f(z); f'(z)v) \leqslant \delta_D(z; v)$, $f \in \mathcal{O}(D, G)$, $z \in D \subset \mathbb{C}^n$, $v \in \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^k$.

Przypadek pseudometryk nazywany jest również *infinitezymalnym*.

Holomorficznie kontraktywne są np. pseudoodległość Carathéodory'ego $\boldsymbol{c}$, pseudoodległość Kobayashiego $\boldsymbol{k}$, pseudometryka Carathéodory'ego-Reiffena $\boldsymbol{\gamma}$ i pseudometryka Kobayashiego-Roydena $\varkappa$ (definicje w Rozdziałach 2 i 3). Funkcja Lemperta $\boldsymbol{\ell}$ spełnia warunki (*a*), (*b*) Definicji 1.3.9, ale nie jest pseudoodległością (nie musi spełniać warunku trójkąta).

Z lematu Schwarza-Picka (Dodatek) wynika, że

$$\boldsymbol{c}_D \leqslant d_D \leqslant \boldsymbol{k}_D \leqslant \boldsymbol{\ell}_D, \quad \boldsymbol{\gamma}_D \leqslant \delta_D \leqslant \varkappa_D.$$

Jeśli zachodzi równość $\boldsymbol{c}_D = \boldsymbol{\ell}_D$ i $\boldsymbol{\gamma}_D = \varkappa_D$, określamy to mianem *twierdzenia Lemperta* dla D.

Twierdzenie 1.3.11 (Twierdzenie Lemperta, [**Lem81, Lem82**], por. [**JP13, RW83**] i Uwagę 3.1.14)**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem wypukłym. Wówczas*

$$\boldsymbol{c}_D = \boldsymbol{\ell}_D, \quad \boldsymbol{\gamma}_D = \varkappa_D.$$

Niech $d = (d_D)_D$ będzie holomorficznie kontraktywną rodziną pseudoodległości. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *d-hiperbolicznym*, gdy $d_D(z, w) > 0$ dla $z, w \in D$, $z \neq w$. Na mocy twierdzenia Lemperta, d-hiperboliczność obszaru wypukłego nie zależy od rodziny, tym samym możemy opuścić przedrostek d.

Poniższy lemat jest motywowany podobnym wynikiem dla obszarów tubowych [**JP13**, Proposition 13.6.1].

Lemat 1.3.12 (por. [**BS09**], Theorem 1.1)**.** *Dla obszaru wypukłego $D \subset \mathbb{C}^n$ następujące warunki są równoważne*
(*a*) *D jest biholomorficzny z obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}^n$,*
(*b*) *D jest hiperboliczny,*
(*c*) *D nie zawiera prostej zespolonej.*

Dowód. Implikacje $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$ są oczywiste i zachodzą w każdym obszarze. Dzięki [**JP13**, Proposition 13.1.7] zachodzi wynikanie $(c) \Longrightarrow (a)$. $\square$

Wniosek 1.3.13. *Istnieje obszar wypukły $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ i izometria A w $\mathbb{R}^3$ taka, że obszar semitubowy S_Ω jest hiperboliczny, ale $S_{A(\Omega)}$ nie.*

Dowód. Niech $\Omega := \mathbb{R} \times (0,1)^2$ i A przekształca Ω na $(0,1)^2 \times \mathbb{R}$.

Sposób 1. Sprawdzamy warunek (a). Obszar $S_\Omega = (\mathbb{R} \times (0,1)) \times ((0,1) \times \mathbb{R})$ jest biholomorficzny z $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Natomiast $S_{A(\Omega)}$ jest biholomorficznie równoważny obszarowi $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, który na mocy twierdzenia Liouville'a nie jest biholomorficzny z obszarem ograniczonym.

Sposób 2. Sprawdzamy warunek (c). Dla każdego odwzorowania holomorficznego $f : \mathbb{C} \longrightarrow S_\Omega$ funkcje harmoniczne $\operatorname{Im} f_1$ i $\operatorname{Re} f_2$ są ograniczone, więc z twierdzenia Liouville'a stałe. Zatem f_1, f_2 też są stałe (równania Cauchy'ego-Riemanna). Oczywiście, $S_{A(\Omega)}$ zawiera proste zespolone. $\square$

ROZDZIAŁ 2

(Słabe) m-ekstremalne i m-geodezyjne

2.1. Wprowadzenie

Niech $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ będzie *kołem jednostkowym* i niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Oznaczamy przez $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ zbiór odwzorowań h takich, że istnieje otoczenie $U = U(h)$ zbioru $\overline{\mathbb{D}}$ spełniające warunek $h \in \mathcal{O}(U, D)$.

Odtąd, jeżeli nie wspomniano inaczej, zakładamy, że $m \geqslant 2$ jest liczbą naturalną.

Definicja 2.1.1. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{D}$ będą różnymi punktami (różne = parami różne). Odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ nazywamy *słabą m-ekstremalną dla* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, jeśli nie istnieje $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ takie, że $h(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Naturalnie, *słaba m-ekstremalność* oznacza słabą m-ekstremalność dla pewnych $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Jeśli powyższy warunek jest spełniony dla każdego wyboru $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, mówimy, że f jest *m-ekstremalną*.

Uwaga 2.1.2 (por. Lemat 2.2.1(a))**.** Odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma odwzorowania $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ takiego, że $g(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, i $g(\mathbb{D}) \subset\subset D$.

Niech $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ będzie *okręgiem jednostkowym*. Dla $\alpha \in \mathbb{D}$ definiujemy *funkcję Möbiusa*

$$m_\alpha(\lambda) := \frac{\lambda - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Będziemy rozważać skończone *iloczyny Blaschkego*, tj. funkcje

$$B := c \prod_{j=1}^{k} m_{\alpha_j},$$

gdzie $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \in \mathbb{D}$, $c \in \mathbb{T}$. Liczbę k nazywamy *stopniem* i oznaczamy $\deg B$. W przypadku $k = 0$, funkcja B jest stałą *unimodularną* c.

Definicja 2.1.3. Odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ określamy *m-geodezyjną*, jeżeli istnieje $F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ takie, że $F \circ f$ jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia co najwyżej $m - 1$. Funkcja F jest wtedy *m-lewą odwrotną*.

Wprowadzone pojęcia uogólniają klasyczne ekstremalne Lemperta i geodezyjne, gdyż

Uwaga 2.1.4. Odwzorowanie holomorficzne jest słabą 2-ekstremalną (odp. 2-geodezyjną) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ekstremalną Lemperta (odp. geodezyjną).

Aby to wyjaśnić, wprowadzamy następujące oznaczenia. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i niech $z, w \in D$.

Definicja 2.1.5. *Funkcję Lemperta* określamy wzorem

$$\boldsymbol{\ell}_D(z,w) := \inf\{\boldsymbol{p}(\lambda_1,\lambda_2) : \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{D} \text{ i } \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(\lambda_1) = z,\ f(\lambda_2) = w\}.$$

(Infimum jest wzięte po niepustym zbiorze [**JP13**, Remark 3.1.1(a)].)

Jeśli $z \neq w$ i istnieje odwzorowanie, dla którego infimum jest osiągnięte, to nazywamy je *ekstremalną Lemperta* (lub $\boldsymbol{\ell}_D$*-ekstremalną*) dla z, w.

Uwaga 2.1.6. Często pomijamy określenie "dla z, w". Wówczas mamy na myśli, że odwzorowanie jest ekstremalną Lemperta dla pewnych z, w.

Ogólnie, nie musi istnieć ekstremalna Lemperta dla z, w. Istnieje natomiast, gdy D jest taut (definicja w Dodatku).

Mamy następującą własność normalizacyjną

$$\boldsymbol{\ell}_D(z,w) = \inf\{\boldsymbol{p}(0,\xi) : \xi \in [0,1) \text{ i } \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(0) = z,\ f(\xi) = w\}.$$

Wynikający stąd (przez rozważenie odwzorowań postaci $h_r(\lambda) := h(r\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{D}$, $r > 1$) związek 2-ekstremalnych i ekstremalnych Lemperta można przeformułować w następujący sposób.

Uwaga 2.1.7. Niech $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$ będą różne. Wówczas odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest słabą 2-ekstremalną dla λ_1, λ_2 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\boldsymbol{\ell}_D(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = \boldsymbol{p}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Definicja 2.1.8. Funkcję

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_D(z,w) :&= \sup\{\boldsymbol{p}(F(z),F(w)) : F \in \mathcal{O}(D,\mathbb{D})\} \\ &= \sup\{\boldsymbol{p}(0,F(w)) : F \in \mathcal{O}(D,\mathbb{D}),\ F(z) = 0\} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

nazywamy *pseudoodległością Carathéodory'ego.* (Istnieje funkcja realizująca supremum.)

Odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest *geodezyjną*, gdy

$$\boldsymbol{c}_D(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = \boldsymbol{p}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{2.1.2}$$

dla dowolnych (równoważnie, dla pewnych różnych) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$.

W szczególności, geodezyjna jest ekstremalną Lemperta dla dowolnych dwóch różnych punktów swojego obrazu (czyli 2-ekstremalną).

Uwaga 2.1.9 (por. [**JP13**], Proposition 11.1.7)**.** Warunek (2.1.2) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ określana mianem *lewej odwrotnej* taka, że $F \circ f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. W tej sytuacji dokładnie te funkcje F realizują supremum w (2.1.1) dla $z := f(\lambda_1)$, $w := f(\lambda_2)$, przy dowolnych różnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$.

Wobec tego, pojęcia 2-geodezyjnej i geodezyjnej, podobnie jak 2-lewej odwrotnej i lewej odwrotnej są identyczne. Można przyjąć, że automorfizmem koła w definicjach jest identyczność.

Uwaga 2.1.10. Załóżmy, że $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest słabą 2-ekstremalną dla λ_1, λ_2 oraz

$$\boldsymbol{c}_D(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = \boldsymbol{\ell}_D(f(\lambda_1), f(\lambda_2)).$$

Wynika stąd, że f jest 2-geodezyjną. Wobec tego, jeśli D jest obszarem, który spełnia tezę twierdzenia Lemperta (przynajmniej w przypadku pseudoodległości), to każda jego słaba 2-ekstremalna jest 2-geodezyjną. Zatem, gdy dodatkowo D jest taut, dla każdych $z, w \in D$ istnieje 2-geodezyjna $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ taka, że $z, w \in f(\mathbb{D})$.

Na mocy twierdzenia Lemperta otrzymujemy

Wniosek 2.1.11 (por. [**Lem82**], Lemma)**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem wypukłym, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ słabą 2-ekstremalną. Wówczas f jest 2-geodezyjną. Jeśli ponadto D jest taut, to dla każdych $z, w \in D$ istnieje 2-geodezyjna $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ taka, że $z, w \in f(\mathbb{D})$.*

Narzuca się w związku z tym pytanie, czy istnieje 2-ekstremalna niebędąca 2-geodezyjną (**P1**).

Uwaga 2.1.12. Z opisu m-ekstremalnych w $\mathbb{D}$ (czyli wspomnianego we Wstępie rezultatu G. Picka) wynika, że w dowolnym obszarze m-geodezyjność implikuje m-ekstremalność. Rzeczywiście, funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ jest m-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia $\leqslant m - 1$. Wystarczy teraz złożyć dowolną m-geodezyjną $g : \mathbb{D} \longrightarrow D$ z jej m-lewą odwrotną, aby otrzymać m-ekstremalność odwzorowania g.

Jest oczywiste, że dla każdego z przedstawionych pojęć, "poziom" m pociąga za sobą $m + 1$. Są one niezmiennicze względem biholomorfizmów i złożeń z automorfizmami $\mathbb{D}$.

Nie wiemy czy istnieje m-ekstremalna, która nie jest żadną k-geodezyjną (**P2**).

2.2. Ogólne własności i przypadek płaski

Niech $\|f\|_S := \sup_S |f|$.

Lemat 2.2.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{D}$ różnymi punktami.*

(a) Ustalmy $z_1, \dots, z_n \in D$. Wówczas istnieje $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ takie, że $h(\lambda_j) = z_j$, $j = 1, \dots, m$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ takie, że $g(\lambda_j) = z_j$, $j = 1, \dots, m$, oraz $g(\mathbb{D}) \subset\subset D$.

(b) Niech $\mathbb{D} \ni \lambda_j^{(k)} \to \lambda_j$, $k \to \infty$, i niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_m^{(k)}$. Wtedy f jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

(c) Załóżmy, że $f_k, f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$, $f_k(\lambda_j) \to f(\lambda_j)$, $k \to \infty$, oraz f_k są słabymi m-ekstremalnymi dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Wówczas f też nią jest.

(d) *Jeśli* $\mathcal{O}(\mathbb{D}, D) \ni f_k \to f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ *punktowo i każde* f_k *jest* m*-ekstremalną, to* f *też.*

Dowód. Niech $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}^n$, $w := (w_1, \ldots, w_m)$. Odwzorowanie wielomianowe

$$P_w(\lambda) := \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k \neq j} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right) w_j, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

ma własność: $P_w(\lambda_l) = w_l$, $l = 1, \ldots, m$, oraz $\|P_w\|_S \to 0$, gdy $w \to 0$, dla dowolnego $S \subset\subset \mathbb{C}$.

(a) Jeśli mamy g, to rozważmy $g_r(\lambda) := g(\lambda/r)$, $\lambda \in r\mathbb{D}$, $r > 1$. Skoro

$$g_r(\lambda_j) + g(\lambda_j) - g_r(\lambda_j) = z_j,$$

kładziemy $w_j = w_j(r) := g(\lambda_j) - g_r(\lambda_j)$ oraz $h := g_r + P_{w(r)}$ dla r bliskich 1.

(b) Przypuśćmy, że istnieje $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ takie, że $h(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, m$, oraz $h(\mathbb{D}) \subset\subset D$. Postępujemy podobnie jak wyżej z równaniem

$$h(\lambda_j^{(k)}) + h(\lambda_j) - h(\lambda_j^{(k)}) + f(\lambda_j^{(k)}) - f(\lambda_j) = f(\lambda_j^{(k)})$$

i dostajemy sprzeczność ze słabą m-ekstremalnością f dla $\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_m^{(k)}$, $k >> 1$.

(c) Jeżeli istniałoby $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ spełniające $h(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, m$, i $h(\mathbb{D}) \subset\subset D$, mielibyśmy

$$h(\lambda_j) + f_k(\lambda_j) - f(\lambda_j) = f_k(\lambda_j),$$

więc dla dużych k odwzorowanie f_k nie byłoby słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

(d) Wynika to z (c). □

Z definicji słabej m-ekstremalnej wynika

Lemat 2.2.2. *Niech* $D_j \subset \mathbb{C}^{k_j}$ *będą obszarami i niech* $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D_j)$, $j = 1, \ldots, n$. *Wówczas odwzorowanie* $(f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{D} \longrightarrow D_1 \times \ldots \times D_n$ *jest słabą* m*-ekstremalną dla* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedno z odwzorowań* f_j *jest słabą* m*-ekstremalną dla* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

W szczególności, mamy następujący opis dla polidysku $\mathbb{D}^n$.

Uwaga 2.2.3. Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}^n$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Wówczas następujące warunki są równoważne

(a) f jest słabą m-ekstremalną,
(b) f jest m-ekstremalną,
(c) f jest m-geodezyjną,
(d) $f = B\varphi$, gdzie B jest niestałym iloczynem Blaschkego co najwyżej $m - 1$ oraz $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \partial(\mathbb{D}^n))$,
(e) f_j jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia co najwyżej $m-1$ dla pewnego $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Jak wiemy, funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ jest m-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia $\leqslant m-1$. Wynika stąd, że słaba m-ekstremalność pokrywa się z m-ekstremalnością i m-geodezyjnością oraz jest całkowicie opisana we wszystkich jednospójnych właściwych obszarach w $\mathbb{C}$.

Interpolacja wielomianowa natychmiast pokazuje, że $\mathbb{C}^n$, $(\mathbb{C}_*)^k$ i $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}_*)^k$ nie posiadają słabych m-ekstremalnych. Prezentujemy opis słabych m-ekstremalnych *nietrywialnych* obszarów płaskich, tj. obszarów $D \subset \mathbb{C}$ takich, że $\#(\mathbb{C} \setminus D) \geqslant 2$ i D nie jest biholomorficzny z $\mathbb{D}$.

Poprzedzimy go lematem (podstawowe własności nakryć holomorficznych dostępne są w Dodatku).

Lemat 2.2.4. *Niech* $\Pi : \widetilde{D} \longrightarrow D$ *będzie nakryciem holomorficznym między obszarami* $\widetilde{D}, D \subset \mathbb{C}^n$. *Załóżmy, że* $\widetilde{f} : \mathbb{D} \longrightarrow \widetilde{D}$ *jest* m*-ekstremalną. Wówczas* $f := \Pi \circ \widetilde{f} : \mathbb{D} \longrightarrow D$ *jest słabą* m*-ekstremalną.*

Dowód. Przypuśćmy, że f nie jest słabą m-ekstremalną. Wtedy dla dowolnego $k \geqslant m$ istnieje $r_k > 1$ i funkcja $h_k \in \mathcal{O}(r_k\mathbb{D}, D)$ spełniająca $h_k(j/k) = f(j/k)$, $j = 0, \dots, m-1$. Ponieważ $\widetilde{f}(0) \in \Pi^{-1}(\{h_k(0)\})$, możemy podnieść h_k przez Π do $\widetilde{h}_k \in \mathcal{O}(r_k\mathbb{D}, \widetilde{D})$ z warunkiem $\widetilde{h}_k(0) = \widetilde{f}(0)$. Z twierdzenia Montela pewien podciąg $\widetilde{h}_{l_k}$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $\mathbb{D}$. Wówczas, dla dużych k, wszystkie punkty $\widetilde{h}_{l_k}(j/l_k)$, $\widetilde{f}(j/l_k)$ $(j = 0, \dots, m-1)$ wpadają do otoczenia punktu $\widetilde{f}(0)$, na którym Π jest biholomorficzne. Z równości

$$\Pi(\widetilde{h}_{l_k}(j/l_k)) = h_{l_k}(j/l_k) = f(j/l_k) = \Pi(\widetilde{f}(j/l_k))$$

wnosimy, że $\widetilde{h}_{l_k}(j/l_k) = \widetilde{f}(j/l_k)$, $j = 0, \dots, m-1$, co przeczy m-ekstremalności $\widetilde{f}$. $\square$

Propozycja 2.2.5. *Niech* $D \subset \mathbb{C}$ *będzie nietrywialnym obszarem, a* $\Pi : \mathbb{D} \longrightarrow D$ *nakryciem holomorficznym. Wówczas funkcja holomorficzna* $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ *jest słabą* m*-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy* $f = \Pi \circ B$*, gdzie* B *jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia* $\leqslant m-1$. *Ponadto,* f *nie jest* m*-ekstremalną.*

Dowód. Każda funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ może być podniesiona przez Π, tzn. istnieje $B \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ takie, że $f = \Pi \circ B$. Załóżmy, że f jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Wówczas B jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, tj. niestałym iloczynem Blaschkego stopnia $\leqslant m-1$.

Na odwrót, załóżmy, że $f = \Pi \circ B$, gdzie B jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia $\leqslant m-1$. Na mocy Lematu 2.2.4, funkcja f jest słabą m-ekstremalną.

Przypuśćmy, że f jest m-ekstremalną. Twierdzimy, że Π jest m-ekstremalną. Załóżmy bowiem przeciwnie. Wynika stąd, że istnieją różne punkty $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{D}$ i funkcja holomorficzna $h : \mathbb{D} \longrightarrow D$ spełniająca $h(\lambda_j) = \Pi(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, i $h(\mathbb{D}) \subset\subset D$. Niech $\mu_j \in \mathbb{D}$ będą takie, że $\lambda_j = B(\mu_j)$. Wówczas $h \circ B$ daje sprzeczność ze słabą m-ekstremalnością f dla $\mu_1, \dots, \mu_m$. Skoro Π jest nieskończonej (przeliczalnej) krotności, dla każdego $a \in D$ zbiór $\Pi^{-1}(\{a\}) \subset \mathbb{D}$ jest nieskończony. Wobec tego, funkcja stała a interpoluje Π dla dowolnych różnych liczb $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Pi^{-1}(\{a\})$, sprzeczność. $\square$

2.3. Quasi-zbalansowane obszary pseudowypukłe

Definicja 2.3.1. Niech $k = (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}_0^n)_*$. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ taki, że

$$(\lambda^{k_1} z_1, \dots, \lambda^{k_n} z_n) \in D, \quad \text{o ile } z \in D,\ \lambda \in \overline{\mathbb{D}} \quad (0^0 := 1),$$

nazywamy *k-zbalansowanym* lub ogólnie *quasi-zbalansowanym*. Obszar $(1, \dots, 1)$-zbalansowany jest *zbalansowany*.

Lemat 2.3.2. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie k-zbalansowanym obszarem pseudowypukłym i niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ (odp. $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$). Załóżmy, że*

$$f = (m_\alpha^{k_1} \varphi_1, \dots, m_\alpha^{k_n} \varphi_n),$$

gdzie $\varphi_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ (odp. $\varphi_j \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$), $\alpha \in \mathbb{D}$ i $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Wówczas $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$ albo $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D$ (odp. $\varphi \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$).

Dowód. Rozważmy dwa przypadki.

(a) $k_1, \dots, k_n \geqslant 1$. Niech

$$h(z) := \inf \left\{ t > 0 : \left(\frac{z_1}{t^{k_1}}, \dots, \frac{z_n}{t^{k_n}} \right) \in D \right\}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

oznacza *k-funkcję Minkowskiego* obszaru D. Jeśli $k = (1, \dots, 1)$, to mamy do czynienia z klasyczną *funkcją Minkowskiego* (por. s. 86). Wówczas

- $D = \{z \in \mathbb{C}^n : h(z) < 1\}$,
- $h(\lambda^{k_1} z_1, \dots, \lambda^{k_n} z_n) = |\lambda| h(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- D jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $\log h \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n)$ [**Nik06**] (por. [**JP13**, Proposition 2.2.15]).

Ponieważ $h \circ \varphi$ jest funkcją subharmoniczną na $\mathbb{D}$ ($\log h \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n)$ implikuje $h \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n)$) oraz

$$\limsup_{\lambda \to \mathbb{T}} h(\varphi(\lambda)) = \limsup_{\lambda \to \mathbb{T}} h(f(\lambda)) \leqslant 1$$

$$(\text{odp. } h \circ \varphi = h \circ f < 1 \text{ na } \mathbb{T}),$$

dostajemy $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$ albo $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D$ (odp. $\varphi \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$).

(b) W przeciwnym przypadku załóżmy, że $k_1 = \ldots = k_s = 0$, $k_{s+1}, \dots, k_n \geqslant 1$, gdzie $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Oznaczmy $z' := (z_1, \dots, z_s)$, $z'' := (z_{s+1}, \dots, z_n)$ dla $z \in \mathbb{C}^n$. Niech G będzie rzutem D na $\mathbb{C}^s$. Definiujemy h tym samym wzorem jak wcześniej, ale dla $z \in G \times \mathbb{C}^{n-s}$. Dalej rozumujemy analogicznie jak w [**Nik06**] (por. [**JP13**, Proposition 2.2.15]). Określamy odwzorowanie $\Phi : G \times \mathbb{C}^{n-s} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\Phi(z) :=$

$(z', z_{s+1}^{k_{s+1}}, \dots, z_n^{k_n})$ i kładziemy $\widetilde{D} := \Phi^{-1}(D)$, $\widetilde{h} := h \circ \Phi$. Wówczas $\widetilde{h}(z', \lambda z'') = |\lambda| \widetilde{h}(z', z'')$, co oznacza, że

$$\widetilde{D} = \{(z', z'') \in G \times \mathbb{C}^{n-s} : \widetilde{h}(z', z'') < 1\}$$

jest pseudowypukłym obszarem Hartogsa nad G z włóknami zbalansowanymi. Dla dowolnego punktu $z' \in G$, funkcja $\widetilde{h}(z', \cdot)$ jest funkcją Minkowskiego włókna

$$\widetilde{D}_{z'} := \{z'' \in \mathbb{C}^{n-s} : (z', z'') \in \widetilde{D}\},$$

wobec czego G jest pseudowypukły i $\log \widetilde{h} \in \mathcal{PSH}(G \times \mathbb{C}^{n-s})$ [**JJ01**, Proposition 4.1.14]. Skoro $h(z) = \widetilde{h}(z', \sqrt[k_{s+1}]{z_{s+1}}, \dots, \sqrt[k_n]{z_n})$ (przy dowolnym wyborze pierwiastków), mamy $\log h \in \mathcal{PSH}(G \times (\mathbb{C}_*)^{n-s})$. Z twierdzenia o usuwaniu osobliwości funkcji plurisubharmonicznych [**JJ01**, Proposition 3.4.19] wynika, że $\log h \in \mathcal{PSH}(G \times \mathbb{C}^{n-s})$.

Dowód kończymy jak w przypadku (a). $\square$

Następujący lemat odegra kluczową rolę w badaniu (słabych) m-ekstremalnych m.in. w elipsoidach zespolonych.

Lemat 2.3.3. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie k-zbalansowanym obszarem pseudowypukłym, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.*

(a) *Załóżmy, że $f = (m_\alpha^{k_1}\varphi_1, \dots, m_\alpha^{k_n}\varphi_n)$, $\varphi_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $\alpha \in \mathbb{D}$, $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Wówczas $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$ albo $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D$, i w pierwszym przypadku*
   - (i) *φ jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.*
   - (ii) *jeśli $m \geqslant 3$, $\lambda_m = \alpha$ i $k_1, \dots, k_n \geqslant 1$, to φ jest słabą $(m-1)$-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$.*

(b) *Przypuśćmy, że $\mathbb{D} \ni \lambda_{m+1} \neq \lambda_1, \dots, \lambda_m$ oraz $k_1, \dots, k_n \leqslant 1$, $l \in \mathbb{N}$. Wtedy odwzorowanie $\psi_{(l)} := (m_{\lambda_{m+1}}^{lk_1} f_1, \dots, m_{\lambda_{m+1}}^{lk_n} f_n) : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest słabą $(m+1)$-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$.*

Dowód. (a) Przyjmijmy, że $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$.

(i) Przypuśćmy, że istnieje $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ takie, że $h(\lambda_j) = \varphi(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$. Wtedy $g := (m_\alpha^{k_1} h_1, \dots, m_\alpha^{k_n} h_n) \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ spełnia $g(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, sprzeczność.

(ii) Załóżmy, że jest $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ takie, że $h(\lambda_j) = \varphi(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m-1$. Wówczas $g := (m_\alpha^{k_1} h_1, \dots, m_\alpha^{k_n} h_n) \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ spełnia $g(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m-1$, i $g(\alpha) = f(\alpha) = 0$, sprzeczność.

(b) Dowodzimy indukcyjnie ze względu na l. Dla $l = 1$ załóżmy istnienie odwzorowania $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ takiego, że $h(\lambda_j) = \psi_{(1)}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m+1$. Odwzorowanie $g := (h_1/m_{\lambda_{m+1}}^{k_1}, \dots, h_n/m_{\lambda_{m+1}}^{k_n}) \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ spełnia $g(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m+1$, sprzeczność.

Krok $l \implies l+1$: postępujemy jak wyżej dla $\psi_{(l)}$ i $\psi_{(l+1)}$ zamiast f i $\psi_{(1)}$ odpowiednio. $\square$

Przy założeniu, że f jest m-ekstremalną, wydaje się, że ogólnie $\psi_{(1)}$ nie powinno być $(m+1)$-ekstremalną (**P3**).

Lematy 2.3.3$(a)(ii)$ i 2.2.1(b) dają

Wniosek 2.3.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie k-zbalansowanym obszarem pseudowypukłym, a f jego m-ekstremalną. Załóżmy, że $f = (m_\alpha^{k_1}\varphi_1, \dots, m_\alpha^{k_n}\varphi_n)$, $\varphi_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $\alpha \in \mathbb{D}$, $m \geqslant 3$, $k_1, \dots, k_n \geqslant 1$. Wtedy $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest $(m-1)$-ekstremalną w D albo $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D$.*

Uwaga 2.3.5. Analogon Wniosku 2.3.4 dla m-geodezyjnych, $m \geqslant 4$, jest fałszywy. Weźmy bowiem m-geodezyjną $(a\lambda^{m-1}, (1-a)\lambda^{m-1})$ elipsoidy zespolonej $\mathcal{E}(1/2) \subset \mathbb{C}^2$ $(0 < a < 1)$, wówczas odwzorowanie $(a\lambda^{m-3}, (1-a)\lambda^{m-2})$ nie jest $(m-1)$-geodezyjną, zob. Propozycję 2.4.3.

Mamy również kontrprzykłady dla $m \geqslant 4$ i $k = (1, \dots, 1)$: ogólny we Wniosku 2.4.4 oraz wypukły w Propozycji 2.4.5 dla $m \geqslant 5$. Dla $m = 4$ kwestia przypadku wypukłego pozostaje otwarta (**P4**).

Okazuje się, że analogon Wniosku 2.3.4 jest prawdziwy dla $m = 3$.

Propozycja 2.3.6. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie k-zbalansowanym obszarem pseudowypukłym, a f jego 3-geodezyjną. Załóżmy, że $f = (m_\alpha^{k_1}\varphi_1, \dots, m_\alpha^{k_n}\varphi_n)$, $\varphi_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $\alpha \in \mathbb{D}$, $k_1, \dots, k_n \geqslant 1$. Wówczas $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest 2-geodezyjną w D albo $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D$.*

Jeśli f jest dodatkowo 2-geodezyjną, to $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D$.

Przed pokazaniem tego, przypomnijmy

Twierdzenie 2.3.7 ([**EKZ13**], Theorem 3)**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie k-zbalansowanym obszarem pseudowypukłym i niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie 2-geodezyjną. Załóżmy, że $f = (m_\alpha^{k_1}\varphi_1, \dots, m_\alpha^{k_n}\varphi_n)$, $\varphi_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $\alpha \in \mathbb{D}$. Wtedy $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest 2-geodezyjną w D albo $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D$.*

Będziemy postępować bardzo podobnie jak w tamtym dowodzie.

Dowód Propozycji 2.3.6. Możemy przyjąć, że $\alpha = 0$, więc $f(0) = 0$. Wiemy, że $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ albo $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \partial D)$. Załóżmy, że zachodzi pierwszy przypadek. Niech $F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ będzie takie, że $F \circ f$ jest iloczynem Blaschkego stopnia 1 albo 2. Możemy przyjąć, że $F(0) = 0$, a stąd

$$F(f(\lambda)) = \lambda, \quad \text{wtedy oznaczmy } m := 1$$

albo

$$F(f(\lambda)) = \lambda m_\gamma(\lambda) \text{ dla pewnego } \gamma \in \mathbb{D}, \quad \text{wówczas } m := m_\gamma.$$

Ustalmy $z \in D$ i rozważmy funkcje holomorficzne określone na otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$

$$g_z : \lambda \longmapsto F(\lambda^{k_1} z_1, \dots, \lambda^{k_n} z_n)/\lambda, \quad m : \lambda \longmapsto m(\lambda).$$

Skoro $|g_z(\lambda)| < 1 = |m(\lambda)|$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$, twierdzenie Rouché implikuje, że funkcja $\mathbb{D} \ni \lambda \longmapsto g_z(\lambda) - m(\lambda) \in \mathbb{C}$ ma w $\mathbb{D}$ tę samą liczbę zer jak m.

Wobec tego, nie ma zer gdy $m = 1$. To jest nieprawdą dla $z \in \varphi(\mathbb{D})$, więc założenie $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$ jest fałszywe w tym przypadku. "Dodatkowe" stwierdzenie jest udowodnione.

Jeśli $m = m_\gamma$, to funkcja $g_z - m$ ma w $\mathbb{D}$ dokładnie jeden pierwiastek $G(z)$. Ponieważ wykres funkcji $G : D \longrightarrow \mathbb{D}$, równy

$$\{(z, \lambda) \in D \times \mathbb{D} : F(\lambda^{k_1} z_1, \dots, \lambda^{k_n} z_n) = \lambda m_\gamma(\lambda)\}$$

jest zbiorem analitycznym, wynika stąd holomorficzność G ([**Łoj91**, Chapter V, §1], por. [**Chi89**] i [**JJ02**, Sekcja 5.5]). Ponadto, $G(\varphi(\lambda)) = \lambda$ dla $\lambda \in \mathbb{D}$, co kończy dowód. $\square$

Kończymy sekcję następującą własnością.

Lemat 2.3.8. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie k-zbalansowanym obszarem pseudowypukłym i niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \partial D)$, $\alpha \in \mathbb{D}$, $k_1, \dots, k_n \leqslant 1$. Wtedy $f := (m_\alpha^{k_1} \varphi_1, \dots, m_\alpha^{k_n} \varphi_n) : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest słabą 2-ekstremalną dla α i $\mu \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha\}$.*

W szczególności, dla dowolnego $a \in \partial D$ odwzorowanie $\mathbb{D} \ni \lambda \longmapsto \lambda a \in D$ jest słabą 2-ekstremalną dla 0 i $\mu \in \mathbb{D}_*$.

Dowód. Można przyjąć, że $\alpha = 0$ i $f(\lambda) = (\lambda\psi(\lambda), \widetilde{\psi}(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{D}$, gdzie $\psi = (\varphi_1, \dots, \varphi_s)$, $\widetilde{\psi} = (\varphi_{s+1}, \dots, \varphi_n)$ dla pewnego $1 \leqslant s \leqslant n$. Przypuśćmy, że $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ spełnia $h(0) = (0, \widetilde{\psi}(0))$ i $h(\mu) = (\mu\psi(\mu), \widetilde{\psi}(\mu))$. Wtedy $h(\lambda) = (\lambda g(\lambda), \widetilde{g}(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{D}$, dla pewnego odwzorowania $(g, \widetilde{g}) \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$. Przeczy to równości $(g, \widetilde{g})(\mu) = (\psi(\mu), \widetilde{\psi}(\mu)) = \varphi(\mu) \in \partial D$. $\square$

2.4. Elipsoidy zespolone

Definicja 2.4.1. Niech $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$. *Elipsoidą zespoloną* nazywamy obszar

$$\mathcal{E}(p) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^{2p_1} + \ldots + |z_n|^{2p_n} < 1\}.$$

Piszemy ponadto

$$\mathcal{E}(\underbrace{p_0, \dots, p_0}_{n}) =: \mathcal{E}(p_0) \subset \mathbb{C}^n, \quad p_0 > 0.$$

Jednostkowa kula euklidesowa, w skrócie *kula*, to oczywiście

$$\mathbb{B}_n := \mathcal{E}(1) \subset \mathbb{C}^n.$$

Uwaga 2.4.2. (a) $\mathcal{E}(p)$ jest k-zbalansowana i pseudowypukła, $k \in (\mathbb{N}_0^n)_*$.
(b) $\mathcal{E}(p)$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $p_1, \dots, p_n \geqslant 1/2$.

W [**KZ14**, Proposition 9] podano przykłady m-ekstremalnych niebędących m-geodezyjnymi dla $m \geqslant 4$ w $\mathbb{B}_n$, $n \geqslant 2$. W Sekcji 2.5 pokazujemy, że nie jest to możliwe w kuli dla $m = 3$. Poniżej mamy w szczególności przykład 3-ekstremalnych niebędących 3-geodezyjnymi w obszarze wypukłym.

Propozycja 2.4.3. *Niech $m \geqslant 3$ i $0 < a < 1$. Wówczas odwzorowanie*

$$f(\lambda) := (a\lambda^{m-2}, (1-a)\lambda^{m-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

jest m-ekstremalną, ale nie m-geodezyjną w $\mathcal{E}(1/2) \subset \mathbb{C}^2$.

Dowód. Odwzorowanie

$$\mathbb{D} \ni \lambda \longmapsto (a\lambda^{m-1}, (1-a)\lambda^{m-1}) \in \mathcal{E}(1/2)$$

jest m-geodezyjną (m-lewa odwrotna $z \longmapsto z_1 + z_2$), więc Lemat 2.3.3(a)(i) mówi, że f jest m-ekstremalną. Przypuśćmy, że istnieje $F \in \mathcal{O}(\mathcal{E}(1/2), \mathbb{D})$ takie, że $F \circ f$ jest iloczynem Blaschkego stopnia $\leqslant m-1$. Można założyć, że $F(0) = 0$, skąd na podstawie rozwinięcia Taylora wynika, że (z dokładnością do stałej unimodularnej) $F(f(\lambda)) = \lambda^{m-2}$ albo $F(f(\lambda)) = \lambda^{m-2} m_\gamma(\lambda)$ dla pewnego $\gamma \in \mathbb{D}$.

W pierwszym przypadku mamy $F(z) = z_1/a$, co jest niemożliwe.

Dla drugiego przypadku rozwińmy $F(z) = \alpha z_1 + \beta z_2 + \delta z_1^2 + \dots$ Przy ustalonym $z \in \mathcal{E}(1/2)$, funkcja $g_z(\lambda) := F(\lambda z)/\lambda$, określona w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$, jest mniejsza na moduł od 1 na $\mathbb{T}$. Wynika stąd, że $g_z(0) = \alpha z_1 + \beta z_2 \in \mathbb{D}$ dla $z \in \mathcal{E}(1/2)$. Zatem $|\alpha|, |\beta| \leqslant 1$. Z porównania współczynników w równaniu

$$\lambda^{m-2} m_\gamma(\lambda) = F(f(\lambda))$$

mamy

$$-\gamma = \alpha a,$$
$$1 - |\gamma|^2 = \begin{cases} \beta(1-a) + \delta a^2, & m = 3 \\ \beta(1-a), & m \geqslant 4. \end{cases}$$

Rozważmy najpierw możliwość $m \geqslant 4$. Otrzymujemy

$$1 - a^2 \leqslant 1 - |\alpha|^2 a^2 = 1 - |\gamma|^2 \leqslant 1 - a,$$

skąd $a \leqslant a^2$, sprzeczność.

Dla $m = 3$ niech funkcja $g : \mathbb{D} \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}$ będzie dana jako $g(z_1) := F(z_1, 0)/z_1 = \alpha + \delta z_1 + \dots$

Jeśli $|\alpha| = 1$, to $g = \alpha$, $\delta = 0$ i $|\gamma| = a$, więc $\beta = 1 + a$, sprzeczność.

W przeciwnym przypadku g ma wartości w $\mathbb{D}$. Funkcja $h := m_\alpha \circ g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ spełnia $h(0) = 0$, zatem

$$1 \geqslant |h'(0)| = \frac{|\delta|}{1 - |\alpha|^2}.$$

To daje

$$1 - |\alpha|^2 a^2 = 1 - |\gamma|^2 \leqslant |\beta|(1-a) + |\delta| a^2 \leqslant 1 - a + (1 - |\alpha|^2) a^2,$$

tj. $a \leqslant a^2$. □

Wniosek 2.4.4. *Niech $m \geqslant 4$ i niech liczby $a, b, c > 0$ będą takie, że $ab + c = 1$. Niech ponadto $\widetilde{D} := \mathbb{D} \times (1/a)\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ lub $\widetilde{D} := \mathbb{C}^3$. Wówczas odwzorowanie*

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow D := \{z \in \widetilde{D} : |z_1 z_2| + |z_3| < 1\},$$
$$f(\lambda) := (a\lambda, b\lambda^{m-2}, c\lambda^{m-1})$$

jest m-geodezyjną taką, że $\varphi(\lambda) := f(\lambda)/\lambda$ nie jest $(m-1)$-geodezyjną w D.

Dowód. Wielomian $z_1 z_2 + z_3$ jest m-lewą odwrotną f. Przypuśćmy, że istnieje $F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ takie, że

$$F(a, b\lambda^{m-3}, c\lambda^{m-2}) = B(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

gdzie B jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia $\leqslant m - 2$. Funkcja

$$G : \{(z_2, z_3) \in \mathbb{C}^2 : |z_2| + |z_3| < 1\} \ni (z_2, z_3) \longmapsto F(a, z_2/a, z_3) \in \mathbb{D}$$

spełnia równość

$$G(ab\lambda^{m-3}, c\lambda^{m-2}) = B(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

co przeczy Propozycji 2.4.3. □

Pokazaliśmy zatem, że analogon Wniosku 2.3.4 dla m-geodezyjnych nie zachodzi gdy $m \geqslant 4$ oraz $k_1 = \ldots = k_n = 1$ (niezależnie od ograniczoności obszaru). Dla $m \geqslant 5$ i $k_1 = \ldots = k_n = 1$ mamy też przykład wypukły.

Propozycja 2.4.5. *Niech $m \geqslant 5$ i niech liczby dodatnie a, b spełniają warunek $2a^2 + b = 1$. Wówczas odwzorowanie*

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E} := \{z \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3| < 1\},$$
$$f(\lambda) := (a\lambda, a\lambda^{m-2}, b\lambda^{m-1})$$

jest m-geodezyjną taką, że $\varphi(\lambda) := f(\lambda)/\lambda$ nie jest $(m-1)$-geodezyjną w $\mathcal{E}$.

Dowód. Wielomian $2z_1 z_2 + z_3$ jest m-lewą odwrotną f. Przypuśćmy, że istnieje $F \in \mathcal{O}(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ takie, że

$$F(a, a\lambda^{m-3}, b\lambda^{m-2}) = B(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

gdzie B jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia $\leqslant m - 2$. Rozważmy funkcje

$$G : \{(z_2, z_3) \in \mathbb{C}^2 : |z_2|^2 + |z_3| < 1 - a^2\} \ni (z_2, z_3) \longmapsto F(a, z_2, z_3) \in \mathbb{D},$$
$$H : \{(z_2, z_3) \in \mathbb{C}^2 : |z_2|^2 + |z_3| < 1\} \ni (z_2, z_3) \longmapsto G(\sqrt{1 - a^2} z_2, (1 - a^2) z_3) \in \mathbb{D}.$$

Wówczas

$$H(c\lambda^{m-3}, d\lambda^{m-2}) = B(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

dla pewnych liczb dodatnich c, d spełniających $c^2 + d = 1$, tj.

$$c := \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad d := \frac{b}{1 - a^2}.$$

Można przyjąć, że $H(0) = 0$. Wtedy $B(\lambda) = \lambda^{m-3} m_\gamma(\lambda)$ dla pewnego $\gamma \in \mathbb{D}$ (z dokładnością do stałej unimodularnej; przypadek $B(\lambda) = \lambda^{m-3}$ nie zachodzi). Rozwijając $H(z_2, z_3) = \alpha z_2 + \beta z_3 + \ldots$, dostajemy

$$\alpha c = -\gamma,$$
$$\beta d = 1 - |\gamma|^2.$$

Stąd $\beta(1 - c^2) = 1 - |\alpha|^2 c^2$, czyli

$$\beta(1 - c^2) + |\alpha|^2 c^2 = 1. \tag{2.4.1}$$

Identycznie jak w dowodzie Propozycji 2.4.3 pokazujemy, że $\alpha z_2 + \beta z_3 \in \mathbb{D}$ dla każdych z_2, z_3 takich, że $|z_2|^2 + |z_3| < 1$. W szczególności, $|\alpha|, |\beta| \leqslant 1$. Jest oczywiste, że nie może być $|\alpha| = |\beta| = 1$, więc (2.4.1) jest nieprawdą. $\square$

Na mocy twierdzenia Lemperta, każda słaba 2-ekstremalna obszaru wypukłego jest 2-geodezyjną. Dla wszystkich m, jednowymiarowe kontrprzykłady (Propozycja 2.2.5) dają się łatwo uogólnić. Mianowicie, niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie nietrywialnym obszarem, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ słabą m-ekstremalną. Weźmy obszar $G \subset \mathbb{C}^n$ i odwzorowanie $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, G)$ spełniające warunek $g(\mathbb{D}) \subset\subset G$. Wtedy $(f, g) : \mathbb{D} \longrightarrow D \times G$ jest słabą m-ekstremalną, ale nie m-ekstremalną (Lemat 2.2.2). Nie umiemy rozstrzygnąć czy ostatnia sytuacja jest możliwa dla $m \geqslant 3$ w obszarze wypukłym (**P5**).

Prezentujemy kontrprzykład innego typu w przypadku niewypukłym, który wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.4.6 ([**Zwo00**], Theorem 4.1.1)**.** *Elipsoida zespolona $\mathcal{E}(p)$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\boldsymbol{\ell}_{\mathcal{E}(p)}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) = \boldsymbol{p}(\lambda_1, \lambda_2), \quad a \in \partial\mathcal{E}(p),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}.$$

Wniosek 2.4.7. *Niech $\mathcal{E}(p)$ będzie niewypukła i niech B będzie iloczynem Blaschkego stopnia $m-1$, mającym wszystkie zera różne. Wtedy istnieje $a \in \partial\mathcal{E}(p)$ takie, że odwzorowanie $Ba : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ jest słabą m-ekstremalną, ale nie m-ekstremalną.*

Dowód. Z Lematu 2.3.8, dla dowolnego $a \in \partial D$ odwzorowanie $f_a(\lambda) := \lambda a$ jest słabą 2-ekstremalną dla 0 i $\mu \in \mathbb{D}_*$, zatem dostajemy słabą m-ekstremalność dzięki Lematowi 2.3.3(b). Natomiast z Twierdzenia 2.4.6 wynika, że istnieje $a \in \partial\mathcal{E}(p)$ takie, że f_a nie jest 2-ekstremalną. Gdyby zatem Ba było m-ekstremalną, na mocy Wniosku 2.3.4 otrzymalibyśmy przeciwne stwierdzenie. $\square$

A. Edigarian [**Edi95**] podał bardzo silne narzędzie do badania problemów ekstremalnych typu $(\mathcal{P}_m)$. Mamy następujący związek z m-ekstremalnymi.

Uwaga 2.4.8 (por. [**Edi95**], Lemma 20 i [**JP13**], Remark 11.4.4)**.** Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym. Wówczas odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest słabą m-ekstremalną dla niezerowych punktów wtedy i tylko wtedy, gdy jest ekstremalną dla $(\mathcal{P}_m)$. W przeciwnym przypadku, gdy jeden z punktów to 0, mamy równoważnie ekstremalną dla $(\mathcal{P}_{m-1})$.

Twierdzenie A. Edigariana dostarcza konieczną postać ekstremalnych $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ dla $(\mathcal{P}_{m-1})$ (dla wygody piszemy $m-1$ zamiast m i zmieniamy sformułowanie). Ponieważ ekstremalna taka, że $f_j \equiv 0$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\}$, jest ekstremalną dla tego samego problemu w niżej wymiarowym przypadku i na odwrót, można bez straty ogólności przyjmować, że ten warunek nie zachodzi (ogólna ekstremalna ma konieczną postać niżej wymiarowej z funkcjami zerowymi na odpowiednich współrzędnych).

Twierdzenie 2.4.9 ([**Edi95**], Theorem 4)**.** *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ będzie ekstremalną dla $(\mathcal{P}_{m-1})$ taką, że $f_j \not\equiv 0$, $j = 1, \dots, n$. Wówczas*

$$f_j(\lambda) = a_j \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda - \alpha_{kj}}{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda} \right)^{r_{kj}} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda} \right)^{1/p_j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.4.2}$$

gdzie

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_*, \quad \alpha_{kj} \in \overline{\mathbb{D}}, \quad \alpha_{k0} \in \mathbb{D}, \quad r_{kj} \in \{0, 1\}, \quad r_{kj} = 1 \Longrightarrow \alpha_{kj} \in \mathbb{D},$$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{2p_j} \prod_{k=1}^{m-1} (\lambda - \alpha_{kj})(1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda) = \prod_{k=1}^{m-1} (\lambda - \alpha_{k0})(1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

przypadek $r_{kj} = 0$, $k = 1, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, n$ oraz

$\{\alpha_{kj} : k = 1, \dots, m-1\} = \{\alpha_{k0} : k = 1, \dots, m-1\}$ jako multizbiory,

$j = 1, \dots, n$, jest wykluczony.

Uwaga 2.4.10. Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ będzie postaci (2.4.2).

(a) Ostatni warunek znaczy dokładnie, że f nie jest stałą (leżącą w $\partial\mathcal{E}(p)$), równoważnie $f(\mathbb{D}) \subset \mathcal{E}(p)$.

(b) W pracy A. Edigariana nie ma warunku $\alpha_{k0} \in \mathbb{D}$, ale $\alpha_{k0} \in \overline{\mathbb{D}}$. Jednak, jeśli $\alpha_{\widetilde{k}0} \in \mathbb{T}$ dla pewnego $\widetilde{k}$, to z równości

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{2p_j} \prod_{k=1}^{m-1} |\lambda - \alpha_{kj}|^2 = \prod_{k=1}^{m-1} |\lambda - \alpha_{k0}|^2, \quad \lambda \in \mathbb{T},$$

wnosimy, że dla każdego $j = 1, \dots, n$ istnieje $k_j \in \{1, \dots, m-1\}$ takie, że $\alpha_{k_j j} = \alpha_{\widetilde{k}0}$. Wtedy $r_{kj} = 0$ i odpowiedni czynnik dla k_j i j w (2.4.2) jest jedynką. Redefiniujemy $\alpha_{k_j j}$ i $\alpha_{\widetilde{k}0}$ jako ten sam element $\mathbb{D}$ i powtarzamy procedurę w razie potrzeby.

(c) Odwzorowanie f rozszerza się na $\overline{\mathbb{D}}$. W szczególności, $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ jest właściwe (Definicja 2.6.10).

Propozycja 2.4.11 ([**JP13**], Proposition 16.2.2, [**JPZ93**])**.** *Niech $\mathcal{E}(p)$ będzie wypukła, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ odwzorowaniem holomorficznym. Wówczas, jeśli $f_j \not\equiv 0$,*

$j = 1, \ldots, n$, to f jest 2-ekstremalną (tj. 2-geodezyjną) wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci (2.4.2) *z* $m = 2$.

Nie wiemy tego w ogólnej sytuacji dla $m \geqslant 3$, nawet jeśli pytamy o jakąś słabą l-ekstremalność (**P6**). Naszym celem jest zaprezentowanie rozwiązań szczególnych przypadków.

Mamy nowe przykłady obszarów wypukłych, w których słaba m-ekstremalność implikuje m-ekstremalność.

Propozycja 2.4.12. *Niech $p_0 \geqslant 1/2$ i niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p_0) \subset \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Wtedy*

(*a*) *f jest słabą m-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest m-ekstremalną.*
(*b*) *jeśli $f_j \not\equiv 0$, $j = 1, \ldots, n$, to f jest m-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci* (2.4.2) *dla $p := (p_0, \ldots, p_0)$.*

Dowód. (*a*) Można założyć, że f jest słabą m-ekstremalną dla 0 i pewnych innych $m-1$ punktów oraz $f_j \not\equiv 0$ dla każdego j. Wtedy f jest postaci (2.4.2). Bez straty ogólności zakładamy, że $a_j > 0$.

Niech $p_0 = 1/2$. Rozważmy odwzorowanie $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(1/2)$ dane przez

$$g_j(\lambda) := a_j \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda - \alpha_{kj}}{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda}\right)^2$$

(g jest niestałe, bo $\alpha_{k0} \in \mathbb{D}$). Wówczas

$$g_j(\lambda) = a_j \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda - \alpha_{kj}}{\lambda - \alpha_{k0}} \frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda - \alpha_{k0}}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda}.$$

Kładąc $F(z) := z_1 + \ldots + z_n$, mamy

$$F(g(\lambda)) = \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda - \alpha_{k0}}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda},$$

co pokazuje, że g jest m-geodezyjną. Po iteracji Lematu 2.3.3(a)(i) otrzymujemy m-ekstremalność f.

Załóżmy, że $p_0 > 1/2$. Przypuśćmy, że istnieją różne punkty $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{D}$ i odwzorowanie holomorficzne $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p_0)$ takie, że $h(\lambda_l) = f(\lambda_l)$, $l = 1, \ldots, m$, oraz $h(\mathbb{D}) \subset\subset \mathcal{E}(p_0)$. Wtedy

$$h_j(\lambda_l) a_j^{2p_0 - 1} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda_l}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda_l}\right)^{2 - 1/p_0} = a_j^{2p_0} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda_l - \alpha_{kj}}{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda_l}\right)^{r_{kj}} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda_l}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda_l}\right)^2.$$

Zauważmy, że odwzorowanie $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ zdefiniowane jako

$$g_j(\lambda) := h_j(\lambda) a_j^{2p_0 - 1} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda}\right)^{2 - 1/p_0}$$

spełnia $g(\mathbb{D}) \subset\subset \mathcal{E}(1/2)$. Faktycznie, niech q_0 będzie wyznaczone przez równanie $1/(2p_0) + 1/q_0 = 1$, tzn.

$$q_0 := \frac{2p_0}{2p_0 - 1} > 0.$$

Z nierówności Höldera mamy

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |g_j(\lambda)| &\leqslant \left(\sum_{j=1}^n |h_j(\lambda)|^{2p_0}\right)^{1/(2p_0)} \left(\sum_{j=1}^n \left| a_j^{2p_0-1} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1-\overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1-\overline{\alpha}_{k0}\lambda}\right)^{2-1/p_0}\right|^{q_0}\right)^{1/q_0}\\ &\leqslant c^{1/(2p_0)} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^{2p_0} \prod_{k=1}^{m-1} \left|\frac{1-\overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1-\overline{\alpha}_{k0}\lambda}\right|^2\right)^{1/q_0}\\ &\leqslant c^{1/(2p_0)} < 1,\end{aligned}$$

gdzie $c := \sup_{\mathbb{D}} \sum_{j=1}^n |h_j|^{2p_0} < 1$.

Wynika stąd, że $\widetilde{f} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(1/2)$ określone przez

$$\widetilde{f}_j(\lambda) := a_j^{2p_0} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda - \alpha_{kj}}{1-\overline{\alpha}_{kj}\lambda}\right)^{r_{kj}} \left(\frac{1-\overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1-\overline{\alpha}_{k0}\lambda}\right)^2$$

nie jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Przeczy to wykazanej tezie dla $\mathcal{E}(1/2)$.

(b) Wniosek z dowodu (a). □

W ogólniejszym przypadku dostajemy wyższą ekstremalność.

Propozycja 2.4.13. *Niech* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ *będzie dane przez* (2.4.2). *Załóżmy, że*

(a) $p_1, \dots, p_n \geqslant p_0 \geqslant 1/2$,
(b) $\alpha_{kj} \in \mathbb{D}$, $r_{kj} = 0$ *dla* $k = 1, \dots, m-1$ *oraz* $j \in J$, *gdzie* $J := \{j : p_j/p_0 \notin \mathbb{N}\}$,
(c) $s_j := \#\{k : r_{kj} = 1\}$,
(d) $\widetilde{m} := m + \sum_{j \notin J}(p_j/p_0 - 1)s_j$.

Wówczas f *jest* $\widetilde{m}$*-ekstremalną.*

W szczególności, jeśli $p/p_0 \in \mathbb{N}^n$, *gdzie* $p_0 \geqslant 1/2$, *to odwzorowanie* f *jest* $(m + (m-1)(p_1/p_0 + \ldots + p_n/p_0 - n))$*-ekstremalną.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją różne punkty $\lambda_1, \dots, \lambda_{\widetilde{m}} \in \mathbb{D}$ i odwzorowanie $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathcal{E}(p))$ takie, że $h(\lambda_l) = f(\lambda_l)$ dla wszystkich l oraz $h(\mathbb{D}) \subset\subset \mathcal{E}(p)$. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ odwzorowanie $\widetilde{h} := \alpha h + (1-\alpha)f$ spełnia $\widetilde{h}(\lambda_l) = f(\lambda_l)$, $l = 1, \dots, \widetilde{m}$. Jednakże, dla $\alpha \in (0,1)$ funkcje współrzędne $\widetilde{h}_j$, $j \in J$, nie mają zer w $\mathbb{D}$, gdyż $f_j \neq 0$ w $\overline{\mathbb{D}}$, o ile $j \in J$ (używamy tu też $\alpha_{k0} \in \mathbb{D}$).

Definiujemy odwzorowanie $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ przez $g_j := \widetilde{h}_j^{p_j/p_0}$. Nierówność Jensena implikuje

$$\sum_{j=1}^{n} |g_j|^{2p_0} = \sum_{j=1}^{n} |\alpha h_j + (1-\alpha) f_j|^{2p_j}$$
$$\leqslant \alpha \sum_{j=1}^{n} |h_j|^{2p_j} + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} |f_j|^{2p_j} < \alpha c + 1 - \alpha < 1 \text{ na } \mathbb{D},$$

gdzie $c := \sup_{\mathbb{D}} \sum_{j=1}^{n} |h_j|^{2p_j} < 1$. Stąd $g(\mathbb{D}) \subset\subset \mathcal{E}(p_0)$. Dalej mamy

$$g_j(\lambda_l) = a_j^{p_j/p_0} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda_l - \alpha_{kj}}{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda_l} \right)^{(p_j/p_0) r_{kj}} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda_l}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda_l} \right)^{1/p_0}.$$

To pokazuje, że odwzorowanie $\widetilde{f} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p_0)$,

$$\widetilde{f}_j(\lambda) := a_j^{p_j/p_0} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda - \alpha_{kj}}{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda} \right)^{(p_j/p_0) r_{kj}} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda} \right)^{1/p_0}$$

nie jest słabą $\widetilde{m}$-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_{\widetilde{m}}$.

Z Propozycji 2.4.12(b) odwzorowanie $\widetilde{g} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p_0)$,

$$\widetilde{g}_j(\lambda) := a_j^{p_j/p_0} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda - \alpha_{kj}}{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda} \right)^{r_{kj}} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1 - \overline{\alpha}_{k0}\lambda} \right)^{1/p_0}$$

jest m-ekstremalną. Stosujemy $\sum_{j \notin J} (p_j/p_0 - 1) s_j$ razy Lemat 2.3.3(b) i Propozycję 2.4.12(a), aby otrzymać $\widetilde{m}$-ekstremalność $\widetilde{f}$, sprzeczność. $\square$

Uwaga 2.4.14. Zauważmy fakt wynikający z dowodu Propozycji 2.4.13. Przypuśćmy, że $p, q \in \mathbb{R}^n_{>0}$ są takie, że $p_j/q_{\sigma(j)} \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, dla pewnej permutacji σ zbioru $\{1, \dots, n\}$ (jest to równoważne istnieniu odwzorowania holomorficznego właściwego między $\mathcal{E}(p)$ a $\mathcal{E}(q)$). Załóżmy, że każde odwzorowanie postaci (2.4.2) w $\mathcal{E}(q)$ jest pewną (słabą) t-ekstremalną. Wówczas dowolne odwzorowanie dane przez (2.4.2) w $\mathcal{E}(p)$ jest pewną (słabą) s-ekstremalną. Procedura ta dostarcza jednak te same p, tworzące zbiór $[1/2, \infty) \cdot \mathbb{N}^n$, jak opisano w Propozycji 2.4.13.

Propozycja 2.4.15. *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ będzie postaci* (2.4.2). *Załóżmy, że*
(a) $p_1, \dots, p_n \geqslant p_0 \geqslant 1/2$,
(b) $\alpha_{kj} \in \mathbb{D}$ *dla* $k = 1, \dots, m-1$ *oraz* $j \in J$, *gdzie* $J := \{j : p_j/p_0 \notin \mathbb{N}\}$,
(c) $S := \{(k, j) : r_{kj} = 1\}$,
(d) α_{kj}, $(k, j) \in S$, *są różne,*
(e) $s := \#S \geqslant m$.
Wówczas f jest słabą s-ekstremalną dla α_{kj}, $(k, j) \in S$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje odwzorowanie holomorficzne $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ spełniające $h(\alpha_{kj}) = f(\alpha_{kj})$, $(k, j) \in S$, oraz $h(\mathbb{D}) \subset\subset \mathcal{E}(p)$. W szczególności,

$h_j(\alpha_{kj}) = 0$, $(k, j) \in S$. Rozważmy odwzorowania $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ i $\widetilde{f} : \mathbb{D} \longrightarrow \overline{\mathcal{E}(p)}$ dane jako

$$g_j(\lambda) := \frac{h_j(\lambda)}{\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\lambda-\alpha_{kj}}{1-\overline{\alpha}_{kj}\lambda}\right)^{r_{kj}}},$$

$$\widetilde{f}_j(\lambda) := a_j \prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1-\overline{\alpha}_{kj}\lambda}{1-\overline{\alpha}_{k0}\lambda}\right)^{1/p_j}.$$

Mamy $g(\alpha_{kj}) = \widetilde{f}(\alpha_{kj})$, $(k, j) \in S$, i $g(\mathbb{D}) \subset\subset \mathcal{E}(p)$. Wynika stąd, że $\widetilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{E}(p)$, w przeciwnym razie $\widetilde{f}$ byłoby stałą leżącą w brzegu $\mathcal{E}(p)$ (przeczyłoby to także warunkowi $s \geqslant m$). Zatem $\widetilde{f}$ nie jest słabą s-ekstremalną dla α_{kj}, $(k, j) \in S$. Jednak dzięki Propozycji 2.4.13, odwzorowanie $\widetilde{f}$ jest m-ekstremalną. Jest to niemożliwe, gdyż $s \geqslant m$. □

W dalszym ciągu (zob. też Propozycję 2.5.9) pojawiają się niestałe odwzorowania postaci $(a_1B_1, \dots, a_nB_n)$, gdzie $a \in \partial\mathcal{E}(p)$ i $B_1, \dots, B_n$ są skończonymi iloczynami Blaschkego. Sądzimy, że dowolna m-ekstremalna w kuli jest równoważna z którymś z tych odwzorowań (**P8**), o których z kolei przypuszczamy, że są pewnymi k-geodezyjnymi (**P7**). Dałoby to pozytywną odpowiedź na (**P9**).

Propozycja 2.4.16. *Niech $a \in \partial\mathcal{E}(p)$ będzie takie, że*

$$(p_j|a_j|^{2p_j})_{j=1}^n = c(m_1, \dots, m_n), \quad c > 0,\ m_j \in \mathbb{N}.$$

Załóżmy, że $B_1, \dots, B_n$ są skończonymi iloczynami Blaschkego, nie wszystkie stałe. Wtedy odwzorowanie $f := (a_1B_1, \dots, a_nB_n) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ jest pewną m-geodezyjną.

Dowód. Rozważmy obraz logarytmiczny $\mathcal{E}(p)$, tzn. obszar wypukły

$$\begin{aligned}\Omega :&= \{x \in \mathbb{R}^n : (e^{x_1}, \dots, e^{x_n}) \in \mathcal{E}(p)\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n e^{2p_jx_j} < 1\right\}.\end{aligned}$$

Afiniczną przestrzenią styczną w punkcie $b := (\log|a_1|, \dots, \log|a_n|) \in \partial\Omega$ jest

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n p_je^{2p_jb_j}(x_j - b_j) = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n cm_j(x_j - b_j) = 0\right\},$$

skąd

$$\Omega \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n m_j(x_j - b_j) < 0\right\}.$$

To pociąga za sobą

$$\mathcal{E}(p) \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} m_j \log |z_j| < \sum_{j=1}^{n} m_j b_j \right\}$$
$$= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j} < \prod_{j=1}^{n} |a_j|^{m_j} \right\},$$

więc wielomian

$$F(z) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z_j}{a_j} \right)^{m_j}$$

jest m-lewą odwrotną, której szukamy. □

Propozycja 2.4.17. *Niech $a \in \partial\mathcal{E}(p)$ i niech m będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $2p_j m_j \geqslant m$, $j = 1, \dots, n$. Wtedy odwzorowanie $f : \mathbb{D} \ni \lambda \longmapsto (a_1\lambda^{m_1}, \dots, a_n\lambda^{m_n}) \in \mathcal{E}(p)$ jest $(m+1)$-geodezyjną.*

Dowód. Można przyjąć, że $a_j \in (0, 1)$. Definiujemy obszar

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1^{m_1/m}, \dots, x_n^{m_n/m}) \in \mathcal{E}(p)\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j^{\frac{2p_j m_j}{m}} < 1 \right\}.$$

Jest on wypukły. Afiniczną przestrzenią styczną w $b := (a_1^{m/m_1}, \dots, a_n^{m/m_n}) \in \partial\Omega$ jest

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} p_j m_j b_j^{\frac{2p_j m_j}{m} - 1} (x_j - b_j) = 0 \right\},$$

więc

$$\Omega \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} p_j m_j b_j^{\frac{2p_j m_j}{m} - 1} (x_j - b_j) < 0 \right\}.$$

To implikuje

$$\mathcal{E}(p) \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} p_j m_j b_j^{\frac{2p_j m_j}{m} - 1} |z_j|^{\frac{m}{m_j}} < \sum_{j=1}^{n} p_j m_j b_j^{\frac{2p_j m_j}{m}} \right\},$$

i stąd wielomian

$$F(z) := \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j m_j b_j^{\frac{2p_j m_j}{m} - 1} z_j^{\frac{m}{m_j}}}{\sum_{j=1}^{n} p_j m_j b_j^{\frac{2p_j m_j}{m}}}$$

jest $(m+1)$-lewą odwrotną. □

2.5. Kula euklidesowa

Definicja 2.5.1. Odwzorowania holomorficzne $f, g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}_n$ są *równoważne*, jeżeli istnieje $A \in \operatorname{Aut}(\mathbb{B}_n)$ takie, że $f = A \circ g$.

Przypomnijmy, że grupa automorfizmów kuli składa się z odwzorowań $U \circ \chi_w$ (równoważnie, z odwzorowań $\chi_w \circ U$), gdzie $U : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ jest unitarne, a $\chi_w : \mathbb{B}_n \longrightarrow \mathbb{B}_n$ określone jako $\chi_0 := \mathrm{id}_{\mathbb{B}_n}$ oraz

$$\chi_w(z) := \frac{1}{|w|^2} \frac{\sqrt{1 - |w|^2}(|w|^2 z - \langle z, w\rangle w) - |w|^2 w + \langle z, w\rangle w}{1 - \langle z, w\rangle}, \quad w \in \mathbb{B}_{n*}.$$

Uwaga 2.5.2. Dowolna 2-ekstremalna $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}_n$ jest równoważna odwzorowaniu $(\lambda, 0, \dots, 0)$. Istotnie, f jest równoważne z pewnym odwzorowaniem $m_\alpha a$, gdzie $a \in \partial\mathbb{B}_n$, $\alpha \in \mathbb{D}$ [**JP13**, Example 16.1.1]. To z kolei jest unitarnie równoważne z $(m_\alpha, 0, \dots, 0)$, co przez automorfizm $\chi_{(-\alpha, 0, \dots, 0)}$ przekształca się na $(\lambda, 0, \dots, 0)$.

Uwaga 2.5.3 ([**KZ14**])**.** (a) Każda 3-ekstremalna $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}_n$, $n \geqslant 2$, jest równoważna z pewnym odwzorowaniem

$$\mathbb{D} \ni \lambda \longmapsto (a\lambda, \sqrt{1 - a^2}\lambda m_\alpha(\lambda), 0, \dots, 0) \in \mathbb{B}_n, \tag{2.5.1}$$

gdzie $0 \leqslant a \leqslant 1$ i $\alpha \in \mathbb{D}$. Rzeczywiście, niech $A \in \operatorname{Aut}(\mathbb{B}_n)$ będzie takie, że $A(f(0)) = 0$. Wtedy $A(f(\lambda)) = \lambda\varphi(\lambda)$, gdzie $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}_n$ jest 2-ekstremalną albo stałą z brzegu. W pierwszym przypadku przekształcamy φ unitarnie na ψ w ten sposób, by pewne dwa punkty zbioru $\psi(\mathbb{D})$ miały tą samą pierwszą współrzędną $a_1 \in \mathbb{D}$. Z postaci 2-ekstremalnych w kuli (Propozycja 2.4.11) wynika, że $\psi_1 \equiv a_1$. Zatem $(\psi_2, \dots, \psi_n)$ jest 2-ekstremalną w $\sqrt{1 - |a_1|^2}\mathbb{B}_{n-1}$. Powtarzając tą procedurę, otrzymujemy, że φ jest unitarnie równoważne odwzorowaniu $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n m_\alpha)$. Wystarczy teraz przekształcić unitarnie punkt $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ na $(\sqrt{1 - |a_n|^2}, 0, \dots, 0)$ (dla $n = 2$ można skorzystać z jednoznaczności zamiast postaci). Natomiast, gdy φ jest stałą, można ją przekształcić unitarnie na punkt $(1, 0, \dots, 0)$.

(b) Każde odwzorowanie postaci (2.5.1) jest 3-ekstremalną.

(c) Odwzorowanie dane wzorem (2.5.1) jest 2-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$.

(d) Dowolna 3-ekstremalna jest równoważna dokładnie jednemu odwzorowaniu postaci (2.5.1).

(e) Dla $\alpha = 0$ odwzorowanie dane przez (2.5.1) jest 3-geodezyjną, gdyż posiada 3-lewą odwrotną

$$F(z) := \frac{1}{2 - a^2} z_1^2 + \frac{2\sqrt{1 - a^2}}{2 - a^2} z_2.$$

Dzięki algorytmowi Schura mamy następującą charakteryzację.

Uwaga 2.5.4 ([**KZ14**])**.** Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}_n$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Wówczas f jest m-ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(\lambda) = A_1(\lambda A_2(\lambda \ldots A_l(\lambda a) \ldots)), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

dla pewnych $A_1, \ldots, A_l \in \operatorname{Aut}(\mathbb{B}_n)$, $l \leqslant m-1$, $a \in \partial\mathbb{B}_n$.

W szczególności, dowolna m-ekstremalna w $\mathbb{B}_n$ rozszerza się holomorficznie na otoczenie $\overline{\mathbb{D}}$.

Przypomnijmy mniej oczywiste fakty.

Propozycja 2.5.5 ([**KZ14**], Proposition 7)**.** *Dowolna słaba m-ekstremalna w $\mathbb{B}_n$ jest m-ekstremalną.*

Propozycja 2.5.6 ([**KZ14**], Proposition 10)**.** *Niech $m \geqslant 4$ i $0 < a < 1$. Wówczas odwzorowanie*

$$f(\lambda) := (a\lambda^{m-2}, \sqrt{1-a^2}\lambda^{m-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

jest m-ekstremalną, ale nie m-geodezyjną w $\mathbb{B}_2$.

Uwaga 2.5.7. Słynne twierdzenie Poincaré (zob. np. [**JJ01**, Theorem 1.4.25] i [**JP13**, Corollary 2.3.9]) mówi, że $\mathbb{B}_n$ i $\mathbb{D}^n$ nie są biholomorficzne, gdy $n \geqslant 2$. Zauważmy, że z Uwagi 2.2.3 i Propozycji 2.5.6 wynika kolejny dowód tego faktu.

Głównym rezultatem sekcji jest

Twierdzenie 2.5.8. *Dowolna 3-ekstremalna w $\mathbb{B}_n$ jest 3-geodezyjną.*

Dowód. Z postaci 3-ekstremalnych wynika, że wystarczy udowodnić tezę dla $n = 2$. Rozważmy 3-geodezyjne postaci

$$f(\lambda) := (am_c(\lambda), bm_c(\lambda)^2), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

gdzie $a, b \in (0,1)$, $a^2 + b^2 = 1$ i $c \in \mathbb{D}_*$. Każde takie odwzorowanie jest równoważne z $g(\lambda) := (\alpha\lambda, \beta\lambda m_\gamma(\lambda))$ dla pewnych $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ i $\gamma \in \mathbb{D}$, tzn. istnieje odwzorowanie unitarne U i punkt $w \in \mathbb{B}_2$ taki, że

$$\chi_w(am_c(\lambda), bm_c(\lambda)^2) = U(\alpha\lambda, \beta\lambda m_\gamma(\lambda)).$$

Biorąc $\lambda := 0$ dostajemy $w = (-ac, bc^2)$. Zauważmy, że $\beta \neq 0$, gdyż w przeciwnym przypadku $\lambda := c$ daje $\chi_w(0) = U(c, 0)$; stąd $|w|^2 = |c|^2$, tj. $a^2 + b^2|c|^2 = 1$, sprzeczność.

Ze wzoru na χ_w mamy

$$\begin{aligned} &p_0 + p_1 m_c(\lambda) + p_2 m_c(\lambda)^2 \\ &\quad = (1 + a^2\overline{c}m_c(\lambda) - b^2\overline{c}^2 m_c(\lambda)^2)\lambda(q_1\alpha + q_2\beta m_\gamma(\lambda), q_3\alpha + q_4\beta m_\gamma(\lambda)) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

dla pewnych $p_j \in \mathbb{C}^2$, $q_j \in \mathbb{C}$ spełniających $q_2 \neq 0$ lub $q_4 \neq 0$. Stąd

$$1 + a^2\overline{c}m_c(1/\overline{\gamma}) - b^2\overline{c}^2 m_c(1/\overline{\gamma})^2 = 0, \tag{2.5.3}$$

o ile $\gamma \neq 0$ i $\gamma \neq c$.

Przypuśćmy, że $\gamma = 0$ i $q_2 \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} p_{0,1} + p_{1,1}\lambda + p_{2,1}\lambda^2 &= (1 + (1-b^2)\bar{c}\lambda - b^2\bar{c}^2\lambda^2)m_{-c}(\lambda)(q_1\alpha + q_2\beta m_{-c}(\lambda)) \\ &= (1 - b^2\bar{c}\lambda)(c+\lambda)(q_1\alpha + q_2\beta m_{-c}(\lambda)). \end{aligned}$$

Ponieważ liczby

$$\frac{1}{b^2\bar{c}}, \quad -c, \quad -\frac{1}{\bar{c}}$$

są różne, wnosimy stąd, że

$$p_{0,1} + p_{1,1}\lambda + p_{2,1}\lambda^2 = C(1 - b^2\bar{c}\lambda)(c+\lambda),$$

(C jest stałą) więc $q_1\alpha + q_2\beta m_{-c}(\lambda)$ jest stałą, sprzeczność.

Przypadek $\gamma = c$ jest również niemożliwy, jako że w przeciwnym razie rząd osobliwości $1/\bar{c}$ po prawej stronie (2.5.2) byłby równy 3.

Równanie (2.5.3) jest równoważne

$$(1 - b^2\bar{c}m_c(1/\bar{\gamma}))(1 + \bar{c}m_c(1/\bar{\gamma})) = 0,$$

tj. $m_c(1/\bar{\gamma}) = 1/(b^2\bar{c})$, inaczej

$$\gamma = c\frac{1+b^2}{1+b^2|c|^2} = m_{-c}(b^2c).$$

Ponadto, istnieje odwzorowanie unitarne $\widetilde{U}$ i punkt $\widetilde{w} \in \mathbb{B}_2$ spełniający

$$\widetilde{U}(am_c(\lambda), bm_c(\lambda)^2) = \chi_{\widetilde{w}}(\alpha\lambda, \beta\lambda m_\gamma(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

skąd $0 = \chi_{\widetilde{w}}(\alpha c, \beta c m_\gamma(c))$ oraz $\widetilde{U}(-ac, bc^2) = \chi_{\widetilde{w}}(0)$. To implikuje

$$a^2|c|^2 + b^2|c|^4 = \alpha^2|c|^2 + \beta^2|c|^2|m_\gamma(c)|^2,$$

równoważnie (korzystając z równości $|m_\gamma(c)| = |m_c(\gamma)| = b^2|c|$)

$$1 - b^2 + b^2|c|^2 = \alpha^2 + (1-\alpha^2)b^4|c|^2.$$

Zatem

$$\alpha^2 = \frac{(1-b^2)(1+b^2|c|^2)}{1-b^4|c|^2}, \quad \beta^2 = \frac{b^2 - b^2|c|^2}{1-b^4|c|^2} = -m_{b^2}(b^2|c|^2).$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy stwierdzić, że odwzorowanie

$$h : (0,1) \times \mathbb{D}_* \ni (b,c) \longmapsto (-m_{b^2}(b^2|c|^2), m_{-c}(b^2c)) \in (0,1) \times \mathbb{D}_*$$

jest "na". Jest to równoważne suriektywności

$$(0,1)^2 \ni (b,c) \longmapsto h(b,c) \in (0,1)^2.$$

Ustalmy dowolne $(p,q) \in (0,1)^2$. Kładąc

$$F(\lambda) := m_q(\lambda) - \lambda m_p(\lambda m_q(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

widzimy, że $F(-1,1) \subset \mathbb{R}$, $F(0) = -q < 0$ i $F(q) = pq > 0$. Istnieje więc $c \in (0,q)$ takie, że $F(c) = 0$. Zauważmy, że $-c < m_q(c) < 0$. Niech $b \in (0,1)$ spełnia $-b^2 = m_q(c)/c$. Wtedy $m_c(q) = b^2c$, tzn. $q = m_{-c}(b^2c)$. Co więcej,

$$m_{-b^2}(-p) = -m_{-p}(-b^2) = -m_{-p}\left(\frac{m_q(c)}{c}\right) = -cm_q(c) = b^2c^2,$$

zatem $p = -m_{b^2}(b^2c^2)$. $\square$

W Propozycjach 2.4.16 i 2.4.17 badana była pewna m-geodezyjność odwzorowań postaci $(a_1B_1, \ldots, a_nB_n)$, gdzie $a \in \partial\mathcal{E}(p)$ i $B_1, \ldots, B_n$ są skończonymi iloczynami Blaschkego. Dodajemy jeszcze jeden pozytywny wynik.

Propozycja 2.5.9. *Niech $m \geqslant 3$, $0 < b \leqslant \frac{1}{m-1}$ i $a := \sqrt{1-b^2}$. Wtedy odwzorowanie $f(\lambda) := (a\lambda, b\lambda^m)$ jest $(m+1)$-geodezyjną w $\mathbb{B}_2$.*

Dowód. Rozważmy ogólniejszą sytuację $f(\lambda) = (a\lambda^k, b\lambda^m)$, $k \geqslant 1$, $m \geqslant 3$, i użyjmy mnożników Lagrange'a do funkcji zmiennych rzeczywistych $F(x,y) := cx^m + dy^k$ oraz $G(x,y) := x^2 + y^2 - 1$ ($c, d > 0$ podane później). Chcemy, by F miała globalne (słabe) maksimum równe 1 na zbiorze $\{G = 0\}$ w punkcie (a,b). Oznaczmy $H := F - tG$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ jest ustalone. Z warunku koniecznego na lokalne ekstremum mamy

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = mcx^{m-1} - 2tx,\\
0 &= \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = kdy^{k-1} - 2ty,\\
1 &= x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Wyłączając na moment przypadki $(1,0)$ i $(0,1)$, znajdujemy (pamiętając, że $1 = ca^m + db^k$)

$$c = \frac{k}{(ka^2 + mb^2)a^{m-2}}, \quad d = \frac{m}{(ka^2 + mb^2)b^{k-2}}$$

(formalnie, definiujemy c, d tymi wzorami). Przestrzenią styczną w punkcie (a,b) jest $\mathbb{R}(b,-a)$, więc (a,b) jest lokalnym maksimum, jeżeli

$$\begin{aligned}
0 &> \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(a,b)b^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(a,b)a^2 \qquad (2.5.4)\\
&= (m(m-1)ca^{m-2} - 2t)b^2 + (k(k-1)db^{k-2} - 2t)a^2\\
&= 2t(m-2)b^2 + 2t(k-2)a^2.
\end{aligned}$$

Skoro $t > 0$, widzimy dlaczego tylko $k = 1$ może działać; odtąd zakładamy, że $k = 1$. W tej sytuacji (2.5.4) jest równoważne $b^2 < \frac{1}{m-1}$, co jest prawdą.

Pozostaje sprawdzić, że $F(x,y) \leqslant 1$ dla każdych x, y spełniających warunek konieczny. Najpierw pokażemy, że $F(1,0)$, $F(0,1) \leqslant 1$, tj. $c, d \leqslant 1$. Nierówność

$d \leqslant 1$ jest równoważna $b \leqslant \frac{1}{m-1}$. Dla warunku $c \leqslant 1$ potrzebujemy, by

$$1 \leqslant (a^2 + m(1-a^2))a^{m-2} = ma^{m-2} - (m-1)a^m,$$

zatem rozważmy funkcję $g(s) := ms^{m-2} - (m-1)s^m$. Maleje ona na przedziale $\left[\sqrt{1-\frac{1}{m-1}}, 1\right] \ni a$, więc $g(a) > g(1) = 1$.

Teraz niech $x, y \neq 0$ spełniają warunek konieczny. Wtedy $mcx^{m-2} = 2t = d/y$, tzn.

$$yx^{m-2} = \frac{d}{mc} = ba^{m-2}.$$

Kładziemy $h(s) := s\sqrt{1-s^2}^{m-2}$. Wówczas $h(y) = h(b)$ oraz h rośnie na przedziale $\left[0, \sqrt{\frac{1}{m-1}}\right] \ni b$, skąd $y \geqslant b$. Naszym celem jest pokazanie, że $cx^m + dy \leqslant 1$, równoważnie

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{a^{m-2}} + mby &\leqslant a^2 + mb^2, \\ \frac{x^m b}{yx^{m-2}} + mby &\leqslant 1 + (m-1)b^2, \\ b(1-y^2) + mby^2 &\leqslant y + (m-1)b^2 y, \\ 0 &\leqslant ((m-1)by - 1)(b-y). \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi, gdyż $(m-1)by - 1 \leqslant y - 1 < 0$. □

Przypadek $\frac{1}{m-1} < b < 1$ pozostaje nierozstrzygnięty (**P10**).

2.6. Własności brzegowe

W tej sekcji omawiamy (prawie) właściwość słabych m-ekstremalnych. Dzięki prawie właściwości wnioskujemy ich jednoznaczność w ograniczonych obszarach ściśle wypukłych.

Definicja 2.6.1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ odwzorowaniem holomorficznym. Mówimy, że f jest *prawie właściwe*, jeżeli $f^*(\zeta) \in \partial D$ dla prawie wszystkich $\zeta \in \mathbb{T}$ względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$. Standardowo, $f^*(\zeta) := \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta)$ jest *niestyczną wartością brzegową* f w punkcie ζ, która istnieje dla prawie wszystkich $\zeta \in \mathbb{T}$, zob. [**Koo98**].

Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest nazywany *słabym obszarem Rungego*, gdy jest ograniczony oraz istnieje obszar $G \supset \overline{D}$ taki, że dla każdego ograniczonego odwzorowania holomorficznego $f : \mathbb{D} \longrightarrow G$ o własności $f^*(\mathbb{T}) \subset\subset D$, mamy $f(\mathbb{D}) \subset\subset D$.

Uwaga 2.6.2 ([**EK09**], Remark 2)**.** (a) Ograniczony obszar Rungego jest słabym obszarem Rungego.

(b) Niech $G \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i $u \in \mathcal{PSH}(G)$. Załóżmy, że

$$D := \{z \in G : u(z) < 0\} \subset\subset G.$$

Wtedy każda składowa D jest słabym obszarem Rungego.

Propozycja 2.6.3 (por. [**EK09**], Theorem 1)**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie słabym obszarem Rungego, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ słabą m-ekstremalną taką, że dla pewnego $\gamma > 0$ mamy*

$$\operatorname{dist}(f(\lambda), \partial D) \geqslant \gamma(1 - |\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Wówczas dla dowolnych $\alpha > 0$ i $\beta < 1$ zbiór

$$Q(\alpha, \beta) := \{\zeta \in \mathbb{T} : \operatorname{dist}(f(t\zeta), \partial D) \geqslant \alpha(1-t)^\beta \text{ dla każdego } t \in (0,1)\}$$

ma miarę Lebesgue'a zero na $\mathbb{T}$. W szczególności, f jest prawie właściwe.

Dowód. Jest to lekka modyfikacja dowodu [**EK09**, Theorem 1] (pierwsza i ostatnia część są w większości skopiowane).

Zauważmy, że dla $\beta_1 < \beta_2$ zachodzi $Q(\alpha, \beta_1) \subset Q(\alpha, \beta_2)$. Bez straty ogólności załóżmy, że dla pewnych $\alpha > 0$ i $\beta \in (0,1)$ zbiór $P := Q(\alpha, \beta)$ jest miary dodatniej. Można przyjąć, że

$$0 < \frac{1}{2\pi} \int_{\{t \in (0,2\pi) : e^{it} \in P\}} dt < 1$$

(w przeciwnym razie bierzemy jako P dowolny podzbiór $Q(\alpha, \beta)$ miary dodatniej). Kładziemy

$$\varphi(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{\{t \in (0,2\pi) : e^{it} \in P\}} \frac{e^{it} + \lambda}{e^{it} - \lambda} \, dt, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

i sprawdzamy, że $\operatorname{Re} \varphi(\lambda) > 0$ i $\operatorname{Re}(1 - \varphi(\lambda)) > 0$. W szczególności, φ^* istnieje prawie wszędzie [**Koo98**, Chapter III, Section C].

Nie tracąc ogólności załóżmy, że f jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, 0$. Dla $t \in (0,1)$ zdefiniujmy

$$h_t(\lambda) := f(t\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \left(e^{\gamma_t(\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_j))} \frac{\lambda}{\lambda_j} \prod_{k \neq j} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right) (f(\lambda_j) - f(t\lambda_j)), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

z $\gamma_t \in \mathbb{R}$ określonym później. Wtedy $h_t(\lambda_l) = f(\lambda_l)$ dla każdego l i $h_t(0) = f(0)$. Naszym celem jest pokazanie, że dla wszystkich $t \in (0,1)$ dostatecznie bliskich 1 można wybrać γ_t w taki sposób by $h_t(\mathbb{D}) \subset\subset D$, co przeczy słabej m-ekstremalności f. Udowodnimy najpierw, że $h_t^*(\mathbb{T}) \subset\subset D$.

Wystarczy mieć dla t bliskich 1

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{\gamma_t(\operatorname{Re}\varphi^*(\zeta) - \operatorname{Re}\varphi(\lambda_j))} c_j \left| \frac{f(\lambda_j) - f(t\lambda_j)}{\lambda_j} \right| \leqslant \begin{cases} \frac{\alpha}{2}(1-t)^\beta, & \zeta \in P \\ \frac{\gamma}{2}(1-t), & \zeta \in \mathbb{T} \setminus P. \end{cases}$$

Ponieważ $c_j |f(\lambda_j) - f(t\lambda_j)| \leqslant \rho |\lambda_j| (1-t)$, wystarczy dostać

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{\gamma_t(1 - \operatorname{Re}\varphi(\lambda_j))} \rho \leqslant \frac{\alpha}{2}(1-t)^{\beta - 1} \tag{2.6.1}$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{-\gamma_t \operatorname{Re}\varphi(\lambda_j)} \rho \leqslant \frac{\gamma}{2}. \tag{2.6.2}$$

Weźmy γ_t takie, że zachodzi równość w (2.6.1). Wówczas dla t bliskich 1 mamy też nierówność (2.6.2). Co więcej,

$$\|h_t - f(t\cdot)\|_{\mathbb{D}} \to 0, \quad t \to 1.$$

Skoro D słabym obszarem Rungego, $h_t(\mathbb{D}) \subset\subset D$ dla t bliskich 1.

Aby zakończyć dowód, przypuśćmy, że istnieje zbiór $P \subset \mathbb{T}$ miary dodatniej taki, że dla $\zeta \in P$ zachodzi $\operatorname{dist}(f^*(\zeta), \partial D) > \varepsilon > 0$. Połóżmy

$$P_k := \{\zeta \in \mathbb{T} : \operatorname{dist}(f(t\zeta), \partial D) > \varepsilon \text{ dla każdego } t \in (1 - 1/k, 1)\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wówczas $P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Stąd, dla pewnego k zbiór P_k jest miary dodatniej, sprzeczność. $\square$

Wniosek 2.6.4. *Dowolna słaba m-ekstremalna ograniczonego obszaru wypukłego $D \subset \mathbb{C}^n$ jest prawie właściwa.*

Dowód. Rzecz jasna, D jest słabym obszarem Rungego, a dalej wystarczy skorzystać z lematu Hopfa w kole jednostkowym (Dodatek). Istotnie, funkcja $-\operatorname{dist}(\cdot, \partial D)$ jest wypukła w D, więc każdy dysk analityczny $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ spełnia $-\operatorname{dist}(f(\lambda), \partial D) \leqslant -\gamma(1-|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{D}$, dla pewnej stałej $\gamma > 0$ (zależnej od f). $\square$

Do kolejnego wniosku potrzebujemy następującego pojęcia.

Definicja 2.6.5. Obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ jest *ściśle wypukły*, jeśli

$$a, b \in \overline{\Omega},\ a \neq b,\ t \in (0,1) \Longrightarrow ta + (1-t)b \in \Omega.$$

Uwaga 2.6.6. (a) Obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ jest ściśle wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest wypukły oraz

$$a, b, \frac{1}{2}(a+b) \in \partial\Omega \Longrightarrow a = b.$$

(b) Obszar ograniczony $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ jest ściśle wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a, b, \frac{1}{2}(a+b) \in \partial\Omega \Longrightarrow a = b.$$

Wniosek 2.6.7 (por. [**JP13**], Proposition 11.3.3)**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem ściśle wypukłym i niech $f, g : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będą słabymi m-ekstremalnymi dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Załóżmy, że $f(\lambda_j) = g(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$. Wtedy $f = g$.*

Dowód. Odwzorowanie $h := \frac{1}{2}(f+g) : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, zatem h jest prawie właściwe. Skoro $h^* = \frac{1}{2}(f^* + g^*)$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$, wynika stąd, że $f^* = g^*$ prawie wszędzie. Z zasady identyczności [**Koo98**, Chapter III, Section B] otrzymujemy $f = g$. $\square$

Uwaga 2.6.8. W przypadku kuli można dostać Wniosek 2.6.7 przez indukcję. Rzeczywiście, dla $m = 2$ to klasyczny wynik, zob. [**JP13**, Example 16.1.1]. Krok $m \Longrightarrow m+1$: możemy założyć, że $\lambda_{m+1} = 0$ i $f(0) = g(0) = 0$. Stąd $f(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$

i $g(\lambda) = \lambda\psi(\lambda)$, gdzie φ, ψ są m-ekstremalnymi w $\mathbb{B}_n$ lub stałymi leżącymi w $\partial\mathbb{B}_n$. Mamy $\varphi(\lambda_j) = \psi(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, skąd wynika teza.

Z drugiej strony, w każdej elipsoidzie zespolonej, równość na $m-1$ punktach nie wystarcza do stwierdzenia, że $f = g$. Przykładem są m-geodezyjne $f := (B, 0, \dots, 0) =: -g$, gdzie B jest iloczynem Blaschkego stopnia $m-1$, mającym wszystkie zera różne.

Omówmy jeszcze kwestię jednoznaczności innego typu.

Uwaga 2.6.9. Przypomnijmy, że dla 2-geodezyjnych f, g wypukłej elipsoidy zespolonej, warunek $f(\lambda_j) = g(\mu_j)$, $j = 1, 2$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$ są różne i $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{D}$ są różne, implikuje $f = g \circ a$ dla pewnego $a \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, zob. [**JP13**, Proposition 16.2.2].

Dla $m \geqslant 3$ nie ma analogicznej własności. Faktycznie, rozważmy 3-geodezyjne $f(\lambda) := (\lambda m_\alpha(\lambda), 0, \dots, 0)$ i $g(\lambda) := (\lambda m_\beta(\lambda), 0, \dots, 0)$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, $\alpha \neq \beta, -\beta$. Wtedy dla każdego $\lambda \in \mathbb{D}$ znajdziemy $\mu \in \mathbb{D}$ takie, że $f(\lambda) = g(\mu)$, jednak nie ma $a \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ spełniającego $f = g \circ a$ (rzecz jasna, odwzorowania f i g nie są równoważne w przypadku kuli).

Ogólniej, dla dowolnych skończonych niestałych iloczynów Blaschkego $B, \widetilde{B}$ mamy nieskończone zbiory różnych liczb λ i μ spełniających $(B(\lambda), 0, \dots, 0) = (\widetilde{B}(\mu), 0, \dots, 0)$. Może się jednak zdarzyć, że nie ma iloczynu Blaschkego B_1 takiego, że $B = \widetilde{B} \circ B_1$ lub $\widetilde{B} = B \circ B_1$, np. jeśli $\deg B$ nie dzieli $\deg \widetilde{B}$ i na odwrót (co więcej, $(B, 0, \dots, 0)$ i $(\widetilde{B}, 0, \dots, 0)$ nie są równoważne w kuli).

Przechodzimy do zagadnień związanych z właściwością.

Definicja 2.6.10. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^k$ będą obszarami, a $f : D \longrightarrow G$ odwzorowaniem holomorficznym. Określamy f mianem *właściwego*, gdy zbiór $f^{-1}(K)$ jest zwarty dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset G$.

Uwaga 2.6.11. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^k$ będą obszarami, a $f : D \longrightarrow G$ odwzorowaniem holomorficznym. Wówczas

(a) f jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $z_j \in D$ nie mającego granicy w D, ciąg $f(z_j)$ nie ma granicy w G.

(b) jeśli D i G są ograniczone, to f jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D \ni z_j \to \partial D \Longrightarrow f(z_j) \to \partial G.$$

(c) jeżeli $D = \mathbb{D}$, obszar G jest ograniczony, a f właściwe, to f jest prawie właściwe.

Uwaga 2.6.12. (a) Dowolna słaba m-ekstremalna nietrywialnego obszaru płaskiego nie jest właściwa ani prawie właściwa. Wynika to z Propozycji 2.2.5, nieskończoności nakrycia i zasady identyczności.

(b) Dowolna m-geodezyjna $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest właściwa. Istotnie, gdyby $f^{-1}(K)$ nie był zwarty dla pewnego zbioru zwartego $K \subset D$, to bylibyśmy w stanie znaleźć ciąg $\lambda_j \to \mathbb{T}$ taki, że $f(\lambda_j) \in K$. To implikowałoby $F(f(\lambda_j)) \in F(K) \subset\subset \mathbb{D}$, gdzie F jest m-lewą odwrotną f. Z drugiej strony, $F(f(\lambda_j)) \to \mathbb{T}$, sprzeczność.

Nie wiemy czy każda m-ekstremalna jest (prawie) właściwa (**P11**).

Naturalne jest pytanie o zachowanie (słabych) m-ekstremalnych i m-geodezyjnych po złożeniach z odwzorowaniami holomorficznymi właściwymi (z obu stron). Oczywiście, w jednym przypadku problem się trywializuje: jeśli bowiem f jest m-geodezyjną, a B skończonym niestałym iloczynem Blaschkego, to $f \circ B$ jest pewną k-geodezyjną. Mamy dwa proste rezultaty (por. (**P12**) i (**P13**)).

Propozycja 2.6.13. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem wypukłym, a f jego m-ekstremalną. Niech ponadto B będzie iloczynem Blaschkego stopnia $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $f \circ B : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest słabą mk-ekstremalną.*

Dowód. Niech $M := \{\lambda \in \mathbb{D} : B'(\lambda) = 0\}$, jest to zbiór skończony. Ustalmy różne $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{D} \setminus B(M)$. Pokażemy, że $f \circ B$ jest słabą mk-ekstremalną dla liczb z mk-elementowego zbioru $\Lambda := B^{-1}(\{\mu_1, \dots, \mu_m\})$ (wykorzystujemy strukturę odwzorowań holomorficznych właściwych, zob. [**Bed84**] i [**Rud08**, Chapter 15]). Przypuśćmy, że istnieje $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ spełniające warunki $h(\lambda) = f(B(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$, i $h(\mathbb{D}) \subset\subset D$. Dla dowolnego $\mu \in \mathbb{D} \setminus B(M)$ niech $B_{\mu,1}, \dots, B_{\mu,k}$ oznaczają lokalne odwrotne B w otoczeniu U_μ punktu μ. Wówczas

$$\frac{1}{k}(h \circ B_{\mu,1} + \ldots + h \circ B_{\mu,k}) = \frac{1}{k}(h \circ B_{\nu,1} + \ldots + h \circ B_{\nu,k}) \quad \text{na} \quad U_\mu \cap U_\nu$$

dla $\mu, \nu \in \mathbb{D} \setminus B(M)$. Sklejamy te odwzorowania do $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \setminus B(M), D)$. Wtedy $g(\mu_j) = f(\mu_j)$ dla każdego j i $g(\mathbb{D} \setminus B(M)) \subset\subset D$. Na mocy twierdzenia Riemanna o usuwaniu osobliwości, g rozszerza się holomorficznie na $\mathbb{D}$ i rozszerzenie ma względnie zwarty obraz w D, sprzeczność. □

Uwaga 2.6.14. Własność bycia pewną (słabą) m-ekstremalną (odp. m-geodezyjną) nie jest niezmiennikiem odwzorowań holomorficznych właściwych w różnych wymiarach. Istnieje bowiem funkcja u harmoniczna w $\mathbb{D}$, ciągła w $\overline{\mathbb{D}}$, taka, że jej sprzężona harmoniczna v nie jest ciągła na $\overline{\mathbb{D}}$. Podajemy przykład z [**Zyg02**, s. 253]

$$u(e^{it}) := \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\sin jt}{j \log j}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dodając stałą, można założyć, że $u < 0$ w $\overline{\mathbb{D}}$. Definiujemy $\widetilde{u} := 1/2 \log(1 - e^{2u})$ na $\mathbb{T}$, rozszerzamy harmonicznie na $\mathbb{D}$ i bierzemy $\widetilde{v}$ jako jej sprzężoną harmoniczną. Odwzorowanie $\Phi := (e^{u+iv}, e^{\widetilde{u+iv}}) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}_2$ jest właściwe, ale $\Phi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ nie rozszerza się na $\overline{\mathbb{D}}$, więc nie jest żadną słabą m-ekstremalną w $\mathbb{B}_2$.

Naśladując dowód [**EK09**, Proposition 9] dostajemy ostatni rezultat rozdziału.

Propozycja 2.6.15 (por. [**EK09**], Proposition 9)**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ odwzorowaniem holomorficznym takim, że dla pewnego $\gamma > 0$ zachodzi*

$$\operatorname{dist}(f(\lambda), \partial D) \geqslant \gamma(1 - |\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{D}. \tag{2.6.3}$$

Załóżmy, że f jest słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Wówczas $f'(\lambda_j) \neq 0$ dla przynajmniej dwóch j.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, niech $f'(\lambda_j) = 0$, $j = 1, \ldots, m-1$. Wtedy $g := f \circ m_{-\lambda_m}$ jest słabą m-ekstremalną dla pewnych $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}, 0$ i $g'(\mu_j) = 0$ dla $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Ponadto, warunek (2.6.3) dla g zachodzi z być może inną stałą.

Dla $t \in (0,1)$ rozważmy odwzorowanie

$$h_t(\lambda) := g(t\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda}{\mu_j} \prod_{k \neq j} \frac{\lambda - \mu_k}{\mu_j - \mu_k} \right) (g(\mu_j) - g(t\mu_j)), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Wtedy h_t interpoluje g w punktach $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}, 0$ oraz $\|\psi_t\|_{\mathbb{D}} \to 0$, gdy $t \to 1$, gdzie

$$\psi_t(\lambda) := \frac{h_t(\lambda) - g(t\lambda)}{1-t}.$$

Zatem, dla t dostatecznie bliskich 1, mamy $h_t(\mathbb{D}) \subset\subset D$. $\square$

2.7. Lista problemów

(P1) Czy istnieje 2-ekstremalna niebędąca 2-geodezyjną?
(P2) Czy istnieje m-ekstremalna niebędąca żadną k-geodezyjną?
(P3) Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie k-zbalansowanym obszarem pseudowypukłym, a f jego m-ekstremalną. Załóżmy, że $k_1, \ldots, k_n \leqslant 1$. Rozstrzygnąć, czy odwzorowanie $\psi(\lambda) := (\lambda^{k_1} f_1(\lambda), \ldots, \lambda^{k_n} f_n(\lambda))$ jest $(m+1)$-ekstremalną.
(P4) Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbalansowanym obszarem wypukłym, a f jego 4-geodezyjną. Załóżmy, że $f(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$, gdzie $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Czy wynika stąd, że φ jest 3-geodezyjną?
(P5) Czy istnieje $m \geqslant 3$, obszar wypukły i jego słaba m-ekstremalna niebędąca m-ekstremalną?
(P6) Rozstrzygnąć, czy każde niestałe odwzorowanie z [**Edi95**, Theorem 4] jest pewną (słabą) l-ekstremalną lub l-geodezyjną.
(P7) Rozstrzygnąć, czy każde niestałe odwzorowanie $(a_1B_1, \ldots, a_nB_n)$ ($a \in \partial\mathcal{E}(p)$, B_j skończone iloczyny Blaschkego) jest pewną (słabą) m-ekstremalną lub m-geodezyjną.
(P8) Czy każda m-ekstremalna w $\mathbb{B}_n$ jest równoważna pewnemu $(a_1B_1, \ldots, a_nB_n)$?
(P9) Czy każda m-ekstremalna w $\mathbb{B}_n$ jest pewną k-geodezyjną?
(P10) Niech $m \geqslant 3$, $\frac{1}{m-1} < b < 1$ i $a := \sqrt{1-b^2}$. Czy wynika stąd, że odwzorowanie $f(\lambda) := (a\lambda, b\lambda^m)$ jest $(m+1)$-geodezyjną w $\mathbb{B}_2$?
(P11) Rozstrzygnąć, czy każda m-ekstremalna jest (prawie) właściwa.

(P12) Niech f będzie (słabą) m-ekstremalną, a B skończonym niestałym iloczynem Blaschkego. Czy wynika stąd, że $f \circ B$ jest pewną (słabą) k-ekstremalną?

(P13) Czy własność bycia pewną (słabą) m-ekstremalną (odp. m-geodezyjną) jest niezmiennikiem odwzorowań holomorficznych właściwych w tym samym wymiarze?

ROZDZIAŁ 3

Twierdzenie Lemperta

3.1. Wprowadzenie

W Rozdziale 2 omówiliśmy najistotniejsze z naszego punktu widzenia własności funkcji Lemperta i pseudoodległości Carathéodory'ego. Definiujemy kolejne podstawowe obiekty teorii funkcji holomorficznie kontraktywnych.

Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i niech $z, w \in D$, $v \in \mathbb{C}^n$.

Definicja 3.1.1. *Pseudometryka Kobayashiego-Roydena* dana jest wzorem

$$\varkappa_D(z;v) := \inf\{\boldsymbol{\gamma}(\zeta)|\lambda|^{-1} : \lambda \in \mathbb{C}_*,\ \zeta \in \mathbb{D} \text{ i } \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(\zeta) = z,\ f'(\zeta) = \lambda v\}.$$

Jeśli $v \neq 0$ i istnieje odwzorowanie, dla którego infimum jest osiągnięte, to nazywamy je *$\varkappa_D$-ekstremalną* dla z, v. Będziemy często pomijać słowa "dla ...", por. Uwagę 2.1.6.

Odwzorowanie będące $\boldsymbol{\ell}_D$-ekstremalną lub $\varkappa_D$-ekstremalną nazywamy *ekstremalną*.

Podobnie jak dla funkcji Lemperta, $\varkappa_D$-ekstremalne nie muszą istnieć w ogólnym przypadku (istnieją dla obszarów taut). Mamy własność normalizacyjną

$$\varkappa_D(z;v) = \inf\{\lambda^{-1} : \lambda > 0 \text{ i } \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(0) = z,\ f'(0) = \lambda v\}.$$

Ponadto, geodezyjna $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest $\varkappa_D$-ekstremalną dla $f(\zeta), f'(\zeta)$, przy dowolnym $\zeta \in \mathbb{D}$.

Definicja 3.1.2. Odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ określamy mianem *jedynej* $\boldsymbol{\ell}_D$-ekstremalnej dla z, w (odp. $\varkappa_D$-ekstremalnej dla z, v), jeżeli każda $\boldsymbol{\ell}_D$-ekstremalna $g : \mathbb{D} \longrightarrow D$ dla z, w (odp. $\varkappa_D$-ekstremalna dla z, v) spełnia warunek $g = f \circ a$ dla pewnego $a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Funkcja $\boldsymbol{\ell}_D$ nie musi spełniać nierówności trójkąta — podajemy tu przykład L. Lemperta [**Lem81**]:

$$D_\alpha := \{z \in \mathbb{D}^2 : |z_1 z_2| < \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Dlatego modyfikuje się funkcję Lemperta tak, by otrzymać obiekt spełniający tą nierówność. Jest nim *pseudoodległość Kobayashiego*

$$\boldsymbol{k}_D(z, w) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\ell}_D(z_{j-1}, z_j) : N \in \mathbb{N},\ z_0 = z,\ z_1, \ldots, z_{N-1} \in D,\ z_N = w\right\}.$$

Funkcja $\boldsymbol{k}_D$ jest największą pseudoodległością na D (licząc nawet te, które nie są holomorficznie kontraktywne), nie przekraczającą $\boldsymbol{\ell}_D$. Mamy więc $\boldsymbol{c}_D \leqslant \boldsymbol{k}_D \leqslant \boldsymbol{\ell}_D$.

Definicja 3.1.3. Następnym pojęciem, którym się zajmujemy, jest *pseudometryka Carathéodory'ego-Reiffena*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_D(z;v) :&= \sup\{\boldsymbol{\gamma}(F(z))|F'(z)v| : F \in \mathcal{O}(D,\mathbb{D})\} \\ &= \sup\{|F'(z)v| : F \in \mathcal{O}(D,\mathbb{D}),\ F(z)=0\}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Uwaga 3.1.4 (por. [**JP13**], Proposition 11.1.7)**.** Odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\boldsymbol{\gamma}_D(f(\zeta); f'(\zeta)) = \boldsymbol{\gamma}(\zeta)$$

dla dowolnego (równoważnie, dla pewnego) $\zeta \in \mathbb{D}$. W tej sytuacji lewymi odwrotnymi f są dokładnie te funkcje F, które realizują supremum w (3.1.1) dla $z := f(\zeta)$, $v := f'(\zeta)$, gdzie $\zeta \in \mathbb{D}$.

Przypomnijmy, że $\boldsymbol{\gamma}_D \leqslant \varkappa_D$.

Niech $\langle z, w\rangle := z_1\overline{w}_1 + \ldots + z_n\overline{w}_n$ będzie *zespolonym iloczynem skalarnym* w $\mathbb{C}^n$ (mimo że iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^m$ również oznaczamy $\langle \cdot\,, -\rangle$, nie ma mowy o kolizji oznaczeń — zawsze określamy, w której przestrzeni działamy). Rzeczywisty iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$ jest równy $\mathrm{Re}\langle \cdot\,, -\rangle$. Połóżmy $z \bullet w := z_1w_1 + \ldots + z_nw_n$, $z, w \in \mathbb{C}^n$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, będzie obszarem klasy $\mathcal{C}^1$ (omówienie w Dodatku). Oznaczamy przez $\nu_\Omega(a)$ *zewnętrzny jednostkowy wektor normalny* do $\partial\Omega$ w punkcie $a \in \partial\Omega$, zdefiniowany formułą

$$\nu_\Omega(a) := \frac{\nabla r(a)}{|\nabla r(a)|},$$

gdzie r jest funkcją definiującą Ω. *Przestrzeń styczna* w punkcie $a \in \partial\Omega$ to zbiór

$$T_\Omega(a) := \{X \in \mathbb{R}^m : \langle \nu_\Omega(a), X\rangle = 0\} = \left\{X \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^m \frac{\partial r}{\partial x_j}(a)X_j = 0\right\}.$$

Dla funkcji u klasy $\mathcal{C}^1$ na podzbiorze $\mathbb{C}^n$, gradient ∇u jest naturalnie identyfikowany z wektorem $2(\partial u/\partial\overline{z}_1, \ldots, \partial u/\partial\overline{z}_n)$.

Gdy D jest obszarem klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{C}^n$, używamy symboli $T_D^{\mathbb{R}}(a)$, $T_D^{\mathbb{C}}(a)$ do oznaczenia *rzeczywistej* i *zespolonej przestrzeni stycznej* do ∂D w punkcie $a \in \partial D$, tj. zbiorów

$$T_D^{\mathbb{R}}(a) := \{X \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}\langle \nu_D(a), X\rangle = 0\} = \left\{X \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}(a)X_j = 0\right\},$$

$$T_D^{\mathbb{C}}(a) := \{X \in \mathbb{C}^n : \langle \nu_D(a), X\rangle = 0\} = \left\{X \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}(a)X_j = 0\right\},$$

gdzie r jest funkcją definiującą D. Jest jasne, że $T_D^{\mathbb{R}}(a) = T_D(a)$.

Niech $\mathcal{C}^k(\overline{\mathbb{D}})$, $k \in (0,\infty]$, oznacza klasę funkcji ciągłych w $\overline{\mathbb{D}}$, które są klasy $\mathcal{C}^k$ na $\mathbb{D}$ oraz

- gdy $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pochodne w $\mathbb{D}$ do rzędu k rozszerzają się w sposób ciągły na $\overline{\mathbb{D}}$,
- gdy $k - \lfloor k \rfloor =: \alpha \in (0,1)$, pochodne w $\mathbb{D}$ do rzędu $\lfloor k \rfloor$ rozszerzają się do funkcji α-hölderowskiej na $\overline{\mathbb{D}}$ (funkcja f jest *α-hölderowska*, jeśli istnieje stała C taka, że $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant C|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha$ dla wszelkich ζ_1, ζ_2 z dziedziny).

Przez $\mathcal{C}^\omega$ oznaczamy klasę funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych. Funkcja f będzie z definicji w klasie $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, $k \in (0,\infty] \cup \{\omega\}$, gdy funkcja $f(e^{it})$ zmiennej rzeczywistej t, należy do $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

Dla zbioru domkniętego $L \subset \mathbb{C}^n$ niech $\mathcal{O}(L)$ oznacza zbiór funkcji roszerzających się holomorficznie na otoczenie L (zakładamy, że wszystkie otoczenia są otwarte, natomiast przestrzenią docelową jest $\mathbb{C}^m$ wynikające z kontekstu).

Zauważmy, że $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}) = \mathcal{O}(\mathbb{T})$, a wynika to z naturalnego rozszerzania funkcji określonej na przedziale w $\mathbb{R}$ poprzez podstawienie zmiennej zespolonej (w połączeniu z zasadą identyczności).

Często spotkamy sytuację rozszerzania funkcji określonej na $\mathbb{T}$ do $\mathbb{D}$, albo rozszerzania funkcji zdefiniowanej na $\mathbb{D}$ do $\overline{\mathbb{D}}$ — chodzi wtedy o rozszerzenie w sposób ciągły.

Dla $a \in \mathbb{C}^n$ i $r > 0$ definiujemy *kulę* i *polidysk* o środku a i promieniu r

$$B_n(a,r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r\}$$
$$P_n(a,r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r,\ j = 1,\dots,n\}.$$

Ważną rolę odegrają obszary i funkcje silnie wypukłe, por. Dodatek.

Definicja 3.1.5. Obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, nazywamy *silnie wypukłym*, gdy

(a) Ω jest klasy $\mathcal{C}^2$,
(b) istnieje funkcja r definiująca Ω taka, że

$$\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k}(a) X_j X_k > 0, \quad a \in \partial\Omega,\ X \in T_\Omega(a)_*. \tag{3.1.2}$$

Punkt $a \in \partial\Omega$, dla którego istnieje funkcja definiująca r spełniająca (3.1.2), nazywamy *punktem silnej wypukłości* Ω.

Definicja 3.1.6. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ będzie obszarem. Funkcja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *silnie wypukła*, jeżeli

(a) u jest klasy $\mathcal{C}^2$,
(b)

$$\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(a) X_j X_k > 0, \quad a \in \Omega,\ X \in (\mathbb{R}^m)_*. \tag{3.1.3}$$

Nierówności (3.1.2) i (3.1.3) można interepretować w ten sposób, że małe perturbacje klasy $\mathcal{C}^2$ nadal są zbiorami i funkcjami wypukłymi.

Wypukłość i silna wypukłość są pojęciami rzeczywistymi. Ich odpowiednikami w przestrzeni zespolonej są liniowa wypukłość i silna liniowa wypukłość.

Definicja 3.1.7 (por. [**APS04**], [**Hör94**])**.** Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem.

Określamy D mianem *liniowo wypukłego* (odp. *słabo liniowo wypukłego*), jeśli przez dowolny punkt $a \in \mathbb{C}^n \setminus D$ (odp. $a \in \partial D$) przechodzi $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna zespolona rozłączna z D.

Obszar D jest *silnie liniowo wypukły*, gdy

(a) D jest klasy $\mathcal{C}^2$,

(b) istnieje funkcja r definiująca D taka, że

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) X_j \overline{X}_k > \left| \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(a) X_j X_k \right|, \quad a \in \partial D,\ X \in T_D^{\mathbb{C}}(a)_*. \tag{3.1.4}$$

Punkt $a \in \partial D$, dla którego istnieje funkcja definiująca r spełniająca (3.1.4), jest nazywany *punktem silnej liniowej wypukłości D.*

(Dla $n = 1$ warunek liniowej wypukłości i nierówność (3.1.4) są pusto spełnione. W [**APS04**] obszary silnie liniowo wypukłe nazywane są ściśle $\mathbb{C}$-wypukłymi.)

Uwaga 3.1.8. Nasuwa się pytanie, skąd taka postać nierówności (3.1.4). Niech $n \geqslant 2$, ustalmy $a \in \partial D$ i rozważmy funkcję zmiennej rzeczywistej $u_X(t) := r(a + tX)$, gdzie $X \in T_D^{\mathbb{C}}(a)_*$ jest parametrem. Jest ona określona w otoczeniu zera, a ponadto

$$u'_X(0) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}(a) X_j = 0,$$

$$u''_X(0) = 2 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) X_j \overline{X}_k + 2 \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(a) X_j X_k.$$

Załóżmy, że zachodzi (3.1.4). Wtedy u_X ma silne lokalne minimum w $t = 0$, tj. $r(a + tX) > 0$ dla $t \neq 0$ bliskich 0, a to z kolei oznacza, że $a + tX \notin D$. Wynika stąd, że $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna zespolona $a + T_D^{\mathbb{C}}(a)$ lokalnie omija $\overline{D}$ poza punktem a.

Na odwrót przyjmijmy, że $T_D^{\mathbb{C}}(a)$ lokalnie omija $\overline{D}$ poza punktem a. Znaczy to, że u_X ma silne lokalne minimum w $t = 0$, skąd $u''_X(0) > 0$. Ponieważ $\lambda X \in T_D^{\mathbb{C}}(a)_*$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$, możemy wstawić λX w miejsce X tak, by zminimalizować $\operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(a)(\lambda X_j)(\lambda X_k)$ do liczby $-\left|\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(a) X_j X_k\right|$. Dostajemy $u''_{\lambda X}(0) > 0$, czyli (3.1.4).

Podobnie się pokazuje, że w przypadku obszarów (funkcji) wypukłych, hiperpłaszczyzna styczna lokalnie omija obszar (nadwykres), co natychmiast implikuje globalne omijanie. W przypadku zespolonym jest to nietrywialny fakt. Precyzujemy to następująco.

Propozycja 3.1.9 (por. [**APS04**], Proposition 2.5.8, Proposition 2.5.9, Remark 2.5.11 i Theorem 2.5.18)**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem silnie liniowo wypukłym. Wówczas*

(a) *D jest liniowo wypukły.*
(b) *każda $(n-1)$-wymiarowa (dla $n = 1$ zdegenerowana do punktu) zespolona hiperpłaszczyzna styczna do ∂D w punkcie a przecina $\overline{D}$ w dokładnie jednym punkcie — jest nim a. Tą hiperpłaszczyzną jest zbiór $a + T_D^{\mathbb{C}}(a)$, zatem*

$$\overline{D} \cap (a + T_D^{\mathbb{C}}(a)) = \{a\}, \quad a \in \partial D.$$

(c) *równaniem tej hiperpłaszczyzny jest $\langle z - a, \nu_D(a)\rangle = 0$, w konsekwencji*

$$\langle z - a, \nu_D(a)\rangle \neq 0, \quad a \in \partial D,\ z \in \overline{D} \setminus \{a\}.$$

Wobec tego, analogicznie jak wcześniej można rozumieć warunek (3.1.4), tzn. że niewielkie $\mathcal{C}^2$-perturbacje nie wyprowadzają poza klasę obszarów liniowo wypukłych.

Uwaga 3.1.10. (a) Obszar silnie wypukły $D \subset \mathbb{C}^n$ jest ściśle wypukły i silnie liniowo wypukły.

(b) Zauważmy, że ograniczony obszar wypukły $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym jest ściśle wypukły. Rzeczywiście, jeśli Ω nie byłby ściśle wypukły, to bylibyśmy w stanie znaleźć różne punkty $a, b \in \partial\Omega$ takie, że odcinek $[a, b]$ leży w $\partial\Omega$. Z drugiej strony, zasada identyczności implikuje, że zbiór

$$T := \{t \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : sa + (1-s)b \in \partial\Omega \ \text{ o ile } \ |s - t| < \varepsilon\}$$

jest otwarto-domknięty w $\mathbb{R}$. Zatem $T = \emptyset$, sprzeczność.

W przypadku nieograniczonym, kontrprzykładem jest dowolna półprzestrzeń w $\mathbb{R}^m$.

Uwaga 3.1.11. Obszar

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1^p\}, \quad p = 4, 6, 8, \ldots,$$

jest ściśle wypukły, ale nie silnie wypukły.

Uwaga 3.1.12 ([**JP13**], Example 21.5.4)**.** Obszar

$$D := \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 + (\operatorname{Re} z_1^2)^2 < 1\}$$

jest silnie liniowo wypukły, ale nie wypukły.

Głównym celem jest prezentacja dowodu twierdzenia Lemperta.

Twierdzenie 3.1.13 (Twierdzenie Lemperta, por. [**Lem84**])**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym. Wówczas*

$$\boldsymbol{c}_D = \boldsymbol{\ell}_D, \quad \boldsymbol{\gamma}_D = \boldsymbol{\varkappa}_D.$$

Uwaga 3.1.14. Znanym faktem jest istnienie dla dowolnego obszaru wypukłego $D \subset \mathbb{C}^n$, ciągu D_j, $j \in \mathbb{N}$, ograniczonych obszarów silnie wypukłych z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi, spełniającego $D_j \nearrow D$ [**JP13**, Exercise 11.7.4]. Korzystając z Twierdzenia 3.1.13 i monotoniczności funkcji $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{\ell}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ (tj. własności $\boldsymbol{c}_{D_j} \searrow \boldsymbol{c}_D$, $\boldsymbol{\ell}_{D_j} \searrow \boldsymbol{\ell}_D$, $\boldsymbol{\gamma}_{D_j} \searrow \boldsymbol{\gamma}_D$, $\boldsymbol{\varkappa}_{D_j} \searrow \boldsymbol{\varkappa}_D$ [**JP13**, Propositions 2.7.1(a), 3.8.2(f)]), wnioskujemy, że **twierdzenie Lemperta zachodzi dla obszarów wypukłych**.

Definicja 3.1.15 (por. [**NR12**], Exercise 5.1.5)**.** Niech $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}_*$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas $\varphi(e^{it}) = |\varphi(e^{it})|e^{i\theta(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, dla pewnej funkcji ciągłej $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Liczbę całkowitą

$$\operatorname{wind}\varphi := \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}$$

nazywamy *liczbą nawinięć* (*winding number*) funkcji φ. Nie zależy ona od wyboru θ, gdyż każda inna funkcja $\widetilde{\theta}$ o powyższych własnościach jest przesunięciem θ o całkowitą wielokrotność 2π.

Intuicyjnie, liczba nawinięć stwierdza ile razy i w którą stronę krzywa $[0, 2\pi] \ni t \longmapsto \varphi(e^{it}) \in \mathbb{C}_*$ okrąża 0.

Uwaga 3.1.16. (a) $\operatorname{wind}\varphi = 0$, gdy $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}_*)$ i $\operatorname{Re}\varphi > 0$.

(b) $\operatorname{wind}(\varphi\psi) = \operatorname{wind}\varphi + \operatorname{wind}\psi$ dla $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}_*)$.

(c) Jeśli $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}_*) \ni \varphi_j \rightrightarrows \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}_*)$, to $\operatorname{wind}\varphi_j = \operatorname{wind}\varphi$ dla dostatecznie dużych j.

(d) Liczba nawinięć funkcji $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}, \mathbb{C}_*)$ jest indeksem φ w 0, tzn.

$$\operatorname{wind}\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi(\mathbb{T})} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{d}{dt}\varphi(e^{it})}{\varphi(e^{it})} dt.$$

Istotnie, oznaczmy $\eta(t) := |\varphi(e^{it})|$. Wtedy η i θ są klasy $\mathcal{C}^1$, skąd

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{d}{dt}\varphi(e^{it})}{\varphi(e^{it})} dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\eta'(t)e^{i\theta(t)} + \eta(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\eta(t)e^{i\theta(t)}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}[\log\eta + i\theta]_0^{2\pi} = \operatorname{wind}\varphi.\end{aligned}$$

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}_*)$ rozszerza się do funkcji $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, to $\operatorname{wind}\varphi$ jest liczbą zer $\widetilde{\varphi}$ liczonych z krotnościami. Weźmy bowiem $r_0 < 1$ takie, że wszystkie zera $\widetilde{\varphi}$ leżą w $r_0\mathbb{D}$. Stosując kolejno twierdzenie o liczeniu zer funkcji holomorficznej, własność (d), twierdzenie o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłej $((r, \zeta) \longmapsto \widetilde{\varphi}(r\zeta))$ na zbiorze zwartym $([0, 1] \times \overline{\mathbb{D}})$ i własność (c), dostajemy dla $r_0 < r < 1$ bliskich 1:

$$\begin{aligned}\text{liczba zer } \widetilde{\varphi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{r\mathbb{T}} \frac{\widetilde{\varphi}'(\zeta)}{\widetilde{\varphi}(\zeta)} d\zeta &= \operatorname{wind}\{\mathbb{T} \ni \zeta \longmapsto \widetilde{\varphi}(r\zeta) \in \mathbb{C}_*\} \\ &= \operatorname{wind}\{\mathbb{T} \ni \zeta \longmapsto \widetilde{\varphi}(\zeta) \in \mathbb{C}_*\} = \operatorname{wind}\varphi.\end{aligned}$$

Definicja 3.1.17. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem klasy $\mathcal{C}^1$. Odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ nazywamy *odwzorowaniem stacjonarnym*, jeżeli

(a) f rozszerza się do odwzorowania holomorficznego w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$ (oznaczanego tą samą literą),
(b) $f(\mathbb{T}) \subset \partial D$,
(c) istnieje funkcja $\mathbb{R}$-analityczna $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ taka, że odwzorowanie $\mathbb{T} \ni \zeta \longmapsto \zeta\rho(\zeta)\overline{\nu_D(f(\zeta))} \in \mathbb{C}^n$ rozszerza się do odwzorowania holomorficznego w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$, oznaczanego $\widetilde{f}$.

Dalej, odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest *słabym odwzorowaniem stacjonarnym*, gdy

(a') f rozszerza się do odwzorowania klasy $\mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$ (oznaczanego tą samą literą),
(b') $f(\mathbb{T}) \subset \partial D$,
(c') istnieje funkcja $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ klasy $\mathcal{C}^{1/2}$ taka, że odwzorowanie $\mathbb{T} \ni \zeta \longmapsto \zeta\rho(\zeta)\overline{\nu_D(f(\zeta))} \in \mathbb{C}^n$ rozszerza się do $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$.

Definicja (słabego) odwzorowania stacjonarnego $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ rozszerza się w naturalny sposób do przypadku, gdy ∂D jest $\mathbb{R}$-analityczny w otoczeniu $f(\mathbb{T})$.

Bezpośrednio z definicji odwzorowania stacjonarnego f wynika, że f i $\widetilde{f}$ rozszerzają się holomorficznie na pewne otoczenia $\overline{\mathbb{D}}$. Przez $\mathbb{D}_f$ oznaczamy ich przecięcie.

Definicja 3.1.18. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem silnie liniowo wypukłym. Odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest nazywane (*słabym*) E*-odwzorowaniem*, jeśli jest (słabym) odwzorowaniem stacjonarnym oraz

(d) kładąc $\varphi_z(\zeta) := \langle z - f(\zeta), \nu_D(f(\zeta))\rangle$, $\zeta \in \mathbb{T}$, mamy $\operatorname{wind}\varphi_z = 0$ dla pewnego $z \in D$.

Uwaga 3.1.19. (a) Silna liniowa wypukłość D implikuje $\varphi_z(\zeta) \neq 0$ dla każdego $z \in D$ i $\zeta \in \mathbb{T}$. Zatem $\operatorname{wind}\varphi_z$ nie zależy od wyboru z.
(b) Jeśli dodatkowo D jest wypukły, to dowolne (słabe) odwzorowanie stacjonarne w D jest (słabym) E-odwzorowaniem (jako że $\operatorname{Re}\varphi_z < 0$).

Udowodnimy, że w klasie niepłaskich ograniczonych obszarów silnie liniowo wypukłych z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi, słabe odwzorowania stacjonarne są odwzorowaniami stacjonarnymi, a zatem nie ma różnicy między E-odwzorowaniami i słabymi E-odwzorowaniami.

Następujący wynik opisuje odwzorowania ekstremalne.

Twierdzenie 3.1.20 (por. [**Lem84**]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym. Wówczas*

(a) *odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabym E-odwzorowaniem.*
(b) *jeśli D ma brzeg $\mathbb{R}$-analityczny, to odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest ekstremalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest E-odwzorowaniem.*

(c) *gdy D jest klasy $\mathcal{C}^k$, $k = 3, 4, \dots, \infty$, każde słabe E-odwzorowanie $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ i stowarzyszone odwzorowania $\widetilde{f}, \rho$ są klasy $\mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}$, przy dowolnym $\varepsilon \in (0, 1)$.*

Idea dowodu twierdzenia Lemperta jest następująca. Najpierw stwierdzimy, że (słabe) E-odwzorowania są geodezyjnymi. Następnie dowiedziemy, że w przypadku $\mathbb{R}$-analitycznym dla dowolnych różnych $z, w \in D$ (odp. $z \in D$, $v \in (\mathbb{C}^n)_*$) istnieje E-odwzorowanie przechodzące przez z, w (odp. takie, że $f(0) = z$, $f'(0) = \lambda v$ dla pewnego $\lambda > 0$). To da równość między funkcją Lemperta a pseudoodległością Carathéodory'ego. W ogólnym przypadku, wyczerpiemy obszar $\mathcal{C}^2$-gładki przez silnie liniowo wypukłe obszary klasy $\mathcal{C}^\omega$.

Dla dowodu Twierdzenia 3.1.20, zauważymy, że (słabe) E-odwzorowania są jedynymi ekstremalnymi.

3.2. W klasie $\mathcal{C}^\omega$ słaba stacjonarność to stacjonarność

Propozycja 3.2.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym. Wówczas dowolne słabe odwzorowanie stacjonarne w D jest stacjonarne w D z tymi samymi odwzorowaniami stowarzyszonymi.*

Dowód. Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie słabym odwzorowaniem stacjonarnym. Naszym celem jest pokazanie, że $f, \widetilde{f} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ oraz $\rho \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T})$.

Weźmy dowolne $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Skoro $\widetilde{f}(\zeta_0) \neq 0$, możemy przyjąć, że $\widetilde{f}_1 \neq 0$ w $\overline{\mathbb{D}} \cap U_0$, gdzie U_0 jest otoczeniem ζ_0. Zatem $\nu_{D,1}(f(\zeta_0)) \neq 0$, skąd $\nu_{D,1}$ nie znika na pewnym zbiorze $V_0 \subset \partial D$, otwartym w ∂D, zawierającym $f(\zeta_0)$. Zmniejszając U_0 w razie potrzeby, można założyć, że $f(\mathbb{T} \cap U_0) \subset V_0$.

Definiujemy $\psi : V_0 \longrightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ jako

$$\psi(z) = \left(z_1, \dots, z_n, \overline{\left(\frac{\nu_{D,2}(z)}{\nu_{D,1}(z)}\right)}, \dots, \overline{\left(\frac{\nu_{D,n}(z)}{\nu_{D,1}(z)}\right)}\right).$$

Zbiór $M := \psi(V_0)$ jest wykresem funkcji klasy $\mathcal{C}^\omega$ zdefiniowanej na lokalnej podrozmaitości V_0 klasy $\mathcal{C}^\omega$, więc jest lokalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^\omega$ w $\mathbb{C}^{2n-1}$ wymiaru rzeczywistego $2n - 1$. Załóżmy na chwilę, że M jest całkowicie rzeczywista.

Niech

$$g(\zeta) := \left(f_1(\zeta), \dots, f_n(\zeta), \frac{\widetilde{f}_2(\zeta)}{\widetilde{f}_1(\zeta)}, \dots, \frac{\widetilde{f}_n(\zeta)}{\widetilde{f}_1(\zeta)}\right), \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}} \cap U_0.$$

Gdy $\zeta \in \mathbb{T} \cap U_0$, mamy $\widetilde{f}_k(\zeta)\widetilde{f}_1(\zeta)^{-1} = \overline{\nu_{D,k}(f(\zeta))}\ \overline{\nu_{D,1}(f(\zeta))}^{-1}$, skąd $g(\zeta) = \psi(f(\zeta))$. Wobec tego, $g(\mathbb{T} \cap U_0) \subset M$. Z zasady odbicia (Dodatek), g rozszerza się holomorficznie przez $\mathbb{T} \cap U_0$, więc f rozszerza się holomorficznie na otoczenie ζ_0.

Odwzorowanie $\overline{\nu_D \circ f}$ jest $\mathbb{R}$-analityczne na $\mathbb{T}$, więc rozszerza się do h holomorficznego w otoczeniu W zbioru $\mathbb{T}$. Mamy

$$\frac{\zeta h_1(\zeta)}{\widetilde{f}_1(\zeta)} = \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{T} \cap U_0.$$

Funkcja po lewej stronie jest holomorficzna na $\mathbb{D} \cap U_0 \cap W$ i ciągła w $\overline{\mathbb{D}} \cap U_0 \cap W$. Ponieważ przyjmuje wartości rzeczywiste na $\mathbb{T} \cap U_0$, zasada odbicia implikuje, że rozszerza się holomorficznie w otoczeniu $\mathbb{T} \cap U_0$. Stąd ρ i $\widetilde{f}$ są holomorficzne na otoczeniu ζ_0.

Pozostaje dowieść, że M jest całkowicie rzeczywista. Niech r będzie funkcją definiującą D. Przypomnijmy, że dla $z \in V_0$

$$\overline{\left(\frac{\nu_{D,k}(z)}{\nu_{D,1}(z)}\right)} = \frac{\partial r}{\partial z_k}(z) \left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z)\right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Rozważmy odwzorowanie $S = (S_1, \ldots, S_n) : V_0 \times \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$ dane wzorem

$$S(z, w) := \left(r(z), \frac{\partial r}{\partial z_2}(z) - w_1 \frac{\partial r}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial r}{\partial z_n}(z) - w_{n-1} \frac{\partial r}{\partial z_1}(z)\right).$$

Rzecz jasna, $M = S^{-1}(\{0\})$. Zatem

$$T_M^{\mathbb{R}}(z, w) \subset \ker \nabla S(z, w), \quad (z, w) \in M, \tag{3.2.1}$$

gdzie $\nabla S := (\nabla S_1, \ldots, \nabla S_n)$.

Ustalmy $(z, w) \in M$. Chcemy pokazać, że $T_M^{\mathbb{C}}(z, w) = \{0\}$. Weźmy $(X, Y) = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) \in T_M^{\mathbb{C}}(z, w)$. Z (3.2.1) dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_k}(z) X_k = 0,$$

tj. $X \in T_D^{\mathbb{C}}(z)$. Oznaczając $v := (z, w)$, $V := (X, Y)$ i znów korzystając z (3.2.1), wnosimy, że

$$0 = \nabla S_k(v)(V) = \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\partial S_k}{\partial v_j}(v) V_j + \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\partial S_k}{\partial \overline{v}_j}(v) \overline{V}_j$$

dla $k = 2, \ldots, n$. Ale $V \in T_M^{\mathbb{C}}(v)$, więc $iV \in T_M^{\mathbb{C}}(v)$. Dlatego

$$0 = \nabla S_k(v)(iV) = i \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\partial S_k}{\partial v_j}(v) V_j - i \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\partial S_k}{\partial \overline{v}_j}(v) \overline{V}_j.$$

W szczególności,

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\partial S_k}{\partial \overline{v}_j}(v) \overline{V}_j &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S_k}{\partial \overline{z}_j}(z, w) \overline{X}_j + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial S_k}{\partial \overline{w}_j}(z, w) \overline{Y}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_k \partial \overline{z}_j}(z) \overline{X}_j - w_{k-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial \overline{z}_j}(z) \overline{X}_j. \end{aligned}$$

Równość $M = S^{-1}(\{0\})$ daje

$$w_{k-1} = \frac{\partial r}{\partial z_k}(z)\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z)\right)^{-1},$$

a stąd

$$\frac{\partial r}{\partial z_1}(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_k \partial \overline{z}_j}(z)\overline{X}_j = \frac{\partial r}{\partial z_k}(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial \overline{z}_j}(z)\overline{X}_j, \quad k = 2, \dots, n.$$

Ostatnia równość zachodzi też dla $k = 1$. Wobec tego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial z_1}(z)\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_k \partial \overline{z}_j}(z)\overline{X}_j X_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial z_k}(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial \overline{z}_j}(z)\overline{X}_j X_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial z_k}(z)X_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial \overline{z}_j}(z)\overline{X}_j\right) = 0.\end{aligned}$$

Stąd $X = 0$. To pociąga za sobą $Y = 0$, gdyż

$$0 = \nabla S_k(z,w)(0,Y) = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial S_k}{\partial w_j}(v)Y_j + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial S_k}{\partial \overline{w}_j}(v)\overline{Y}_j = -\frac{\partial r}{\partial z_1}(z)Y_{k-1}$$

dla $k = 2, \dots, n$. □

3.3. (Słabe) E-odwzorowania, ekstremalne i geodezyjne

Udowodnimy ważne własności (słabych) E-odwzorowań. W szczególności, pokażemy, że są one geodezyjnymi oraz jedynymi ekstremalnymi. Wszystkie wyniki otrzymujemy przy założeniu, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, **jest ograniczony i silnie liniowo wypukły**.

3.3.1. Słabe E-odwzorowania są geodezyjnymi i jedynymi ekstremalnymi. Dla słabego E-odwzorowania f kładziemy

$$G(z,\zeta) := (z - f(\zeta)) \bullet \widetilde{f}(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}^n,\ \zeta \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Gdy f jest E-odwzorowaniem, definicja jest poprawna dla $\zeta \in \mathbb{D}_f$.

Mamy

$$G(z,\zeta) = (z - f(\zeta)) \bullet \zeta\rho(\zeta)\overline{\nu_D(f(\zeta))} = \zeta\rho(\zeta)\varphi_z(\zeta). \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{3.3.1}$$

Propozycja 3.3.1.1. *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie słabym E-odwzorowaniem. Wówczas istnieje zbiór otwarty $W \supset \overline{D} \setminus f(\mathbb{T})$ i funkcja $F \in \mathcal{O}(W, \mathbb{D})$ taka, że dla każdego $z \in W$ liczba $F(z)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $G(z,\zeta) = 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$. W szczególności, $F \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.*

W Propozycji 3.3.2.4 wzmacniamy powyższe dla E-odwzorowań.

Dowód. Definiujemy $A := \overline{D} \setminus f(\mathbb{T})$. Z założeń o D wynika, że φ_z nie znika na $\mathbb{T}$ dla dowolnego $z \in A$, a zatem z ciągłości warunek (d) Definicji 3.1.18 zachodzi dla z w pewnym otwartym zbiorze $W \supset A$. Z (3.3.1) wnosimy, że $\operatorname{wind} G(z, \cdot\,) = 1 + 0 + 0 = 1$ dla dowolnego $z \in W$. Skoro $G(z, \cdot\,) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, funkcja ta ma w $\mathbb{D}$ dokładnie jeden pierwiastek $F(z)$. Stąd $G(z, F(z)) = 0$ i $\frac{\partial G}{\partial \zeta}(z, F(z)) \neq 0$. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej, F jest holomorficzne na W. Równość $F(f(\zeta)) = \zeta$ dla $\zeta \in \mathbb{D}$ jest jasna. $\square$

Wniosek 3.3.1.2. *Słabe E-odwzorowanie $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest geodezyjną. W szczególności,*

$$\boldsymbol{c}_D(f(\zeta), f(\xi)) = \boldsymbol{\ell}_D(f(\zeta), f(\xi)), \quad \boldsymbol{\gamma}_D(f(\zeta); f'(\zeta)) = \boldsymbol{\varkappa}_D(f(\zeta); f'(\zeta))$$

dla $\zeta, \xi \in \mathbb{D}$.

Używając lewych odwrotnych słabych E-odwzorowań dowodzimy jednoznaczności ekstremalnych.

Propozycja 3.3.1.3. *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie słabym E-odwzorowaniem. Wtedy dla dowolnego $\xi \in (0, 1)$ odwzorowanie f jest jedyną $\boldsymbol{\ell}_D$-ekstremalną dla $z := f(0)$, $w := f(\xi)$ (odp. jedyną $\boldsymbol{\varkappa}_D$-ekstremalną dla $z := f(0)$, $v := f'(0)$).*

Dowód. Przypuśćmy, że g jest $\boldsymbol{\ell}_D$-ekstremalną dla z, w (odp. $\boldsymbol{\varkappa}_D$-ekstremalną dla z, v) taką, że $g(0) = z$, $g(\xi) = w$ (odp. $g(0) = z$, $g'(0) = v$). Naszym celem jest pokazanie, że $f = g$. Propozycja 2.4.3 dostarcza nam odwzorowanie F, które jest lewą odwrotną f. Z lematu Schwarza wynika, że F jest też lewą odwrotną dla g, tj. $F \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Twierdzimy, że $\lim_{\mathbb{D} \ni \zeta \to \zeta_0} g(\zeta) = f(\zeta_0)$ dla $\zeta_0 \in \mathbb{T}$.

Załóżmy przeciwnie. Wówczas znajdzie się punkt $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ i ciąg $\mathbb{D} \ni \zeta_m \to \zeta_0$ taki, że granica $Z := \lim_{m \to \infty} g(\zeta_m) \in \overline{D}$ istnieje, ale nie jest równa $f(\zeta_0)$. Mamy $G(x, F(x)) = 0$, $x \in W$, więc kładąc $x := g(\zeta_m)$ wnosimy, że

$$0 = (g(\zeta_m) - f(F(g(\zeta_m)))) \bullet \widetilde{f}(F(g(\zeta_m))) = (g(\zeta_m) - f(\zeta_m)) \bullet \widetilde{f}(\zeta_m).$$

Po przejściu z m do nieskończoności dostajemy

$$0 = (Z - f(\zeta_0)) \bullet \widetilde{f}(\zeta_0) = \zeta_0 \rho(\zeta_0) \langle Z - f(\zeta_0), \nu_D(f(\zeta_0)) \rangle.$$

Oznacza to, że $Z - f(\zeta_0) \in T_D^{\mathbb{C}}(f(\zeta_0))$. Wynika stąd, że $Z = f(\zeta_0)$, sprzeczność.

Wobec tego, g rozszerza się na $\overline{\mathbb{D}}$, a z zasady maksimum mamy $g = f$. $\square$

Propozycja 3.3.1.4. *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie słabym E-odwzorowaniem oraz $a \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Wówczas $f \circ a$ jest słabym E-odwzorowaniem w D.*

Dowód. Niech $g := f \circ a$. Warunki (a') i (b') Definicji 3.1.17 są spełnione przez g. Aby pokazać, że g spełnia warunek (d) Definicji 3.1.18, ustalmy punkt $z \in D$. Niech $\varphi_{z,f}$, $\varphi_{z,g}$ będą funkcjami pojawiającymi się w warunku (d) dla f, g. Wtedy $\varphi_{z,g} = \varphi_{z,f} \circ a$. Skoro a przekształca $\mathbb{T}$ na $\mathbb{T}$ dyfeomorficznie, mamy $\operatorname{wind} \varphi_{z,g} = \pm \operatorname{wind} \varphi_{z,f} = 0$.

Pozostało pokazać, że warunek (c') Definicji 3.1.17 zachodzi dla g. Twierdzimy, że funkcja $\widetilde{a}(\zeta) := \zeta/a(\zeta)$ posiada holomorficzną gałąź logarytmu w otoczeniu $\mathbb{T}$. Wystarczy udowodnić, że $\widetilde{a}(\mathbb{T}) \neq \mathbb{T}$. Rozwińmy a jako

$$a(\zeta) = e^{it}\frac{\zeta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\zeta}$$

z pewnymi $\alpha \in \mathbb{D}$, $t \in \mathbb{R}$ i zauważmy, że $\widetilde{a}$ nie przyjmuje wartości $-e^{-it}$. Jeśli bowiem byłoby $\zeta/a(\zeta) = -e^{-it}$ dla pewnego $\zeta \in \mathbb{T}$, to otrzymalibyśmy

$$\frac{1 - \overline{\alpha}\zeta}{1 - \alpha\overline{\zeta}} = -1,$$

skąd $2 = 2\operatorname{Re}(\alpha\overline{\zeta}) \leqslant 2|\alpha|$, co jest niemożliwe.

Istnieje zatem funkcja v holomorficzna w otoczeniu $\mathbb{T}$ taka, że

$$\frac{\zeta}{a(\zeta)} = e^{iv(\zeta)}.$$

Mamy $v(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}$. Rozwijając v w szereg Laurenta

$$v(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\zeta^k, \quad \zeta \text{ w otoczeniu } \mathbb{T},$$

wnosimy, że $a_{-k} = \overline{a}_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$v(\zeta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}(a_k\zeta^k) = \operatorname{Re}\left(a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\zeta^k\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Istnieje funkcja h holomorficzna w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$ taka, że $v = \operatorname{Im} h$. Niech $u := h - iv$. Wtedy $u \in \mathcal{O}(\mathbb{T})$ i $u(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}$.

Weźmy pod uwagę ρ jak w warunku (c') Definicji 3.1.17 dla f i połóżmy

$$r(\zeta) := \rho(a(\zeta))e^{u(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Zachodzą równości

$$\begin{aligned}\zeta r(\zeta)\overline{\nu_D(g(\zeta))} &= \zeta u^{u(\zeta)}\rho(a(\zeta))\overline{\nu_D(f(a(\zeta)))} \\ &= a(\zeta)h(\zeta)\rho(a(\zeta))\overline{\nu_D(f(a(\zeta)))} = h(\zeta)\widetilde{f}(a(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{T}.\end{aligned}$$

Stąd $\mathbb{T} \ni \zeta \longmapsto \zeta r(\zeta)\overline{\nu_D(g(\zeta))} \in \mathbb{C}^n$ rozszerza się do odwzorowania klasy $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$. □

Wniosek 3.3.1.5. *Słabe E-odwzorowanie $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest jedyną $\boldsymbol{\ell}_D$-extremalną dla $f(\zeta), f(\xi)$ (odp. jedyną $\varkappa_D$-extremalną dla $f(\zeta), f'(\zeta)$), gdzie $\zeta, \xi \in \mathbb{D}$, $\zeta \neq \xi$.*

3.3.2. Uogólnienie Propozycji 3.3.1.1. Rezultaty uzyskane w tej podsekcji odegrają ważną rolę w dalszym ciągu. Zajmujemy się E-odwzorowaniami.

Propozycja 3.3.2.1. *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie E-odwzorowaniem. Wtedy funkcja $f' \bullet \widetilde{f}$ jest stałą dodatnią.*

Dowód. Rozważmy krzywą

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(e^{it}) \in \partial D.$$

Jej wektor styczny $ie^{it}f'(e^{it})$ należy do $T_D^{\mathbb{R}}(f(e^{it}))$, tzn.

$$\operatorname{Re}\langle ie^{it}f'(e^{it}), \nu_D(f(e^{it}))\rangle = 0.$$

Dlatego dla $\zeta \in \mathbb{T}$ mamy

$$0 = \rho(\zeta)\operatorname{Re}\langle i\zeta f'(\zeta), \nu_D(f(\zeta))\rangle = -\operatorname{Im} f'(\zeta) \bullet \widetilde{f}(\zeta),$$

więc funkcja holomorficzna $f' \bullet \widetilde{f}$ jest rzeczywistą stałą C.

Definiujemy krzywą

$$[0, 1+\varepsilon) \ni t \longmapsto f(t) \in \mathbb{C}^n$$

dla małych $\varepsilon > 0$. Skoro $f([0,1)) \subset D$ i $f(1) \in \partial D$, widzimy, że pochodna funkcji $r \circ f$ w punkcie $t = 1$, gdzie r funkcją definiującą D, jest nieujemna. Zatem

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\langle f'(1), \nu_D(f(1))\rangle = \frac{1}{\rho(1)}\operatorname{Re}(f'(1) \bullet \widetilde{f}(1)) = \frac{C}{\rho(1)},$$

tj. $C \geqslant 0$. Dla $\zeta \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\frac{f(\zeta) - f(0)}{\zeta} \bullet \widetilde{f}(\zeta) = \rho(\zeta)\langle f(\zeta) - f(0), \nu_D(f(\zeta))\rangle.$$

Ta funkcja ma liczbę nawinięć 0. Wobec tego, funkcja

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(0)}{\zeta} \bullet \widetilde{f}(\zeta),$$

holomorficzna w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$, nie znika w $\mathbb{D}$. W szczególności, $C = g(0) \neq 0$. □

Funkcja ρ jest określona z dokładnością do stałego czynnika. Wybieramy ρ tak, by $f' \bullet \widetilde{f} \equiv 1$, tzn.

$$\rho(\zeta)^{-1} = \langle \zeta f'(\zeta), \nu_D(f(\zeta))\rangle, \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{3.3.2}$$

W ten sposób $\widetilde{f}$ i ρ są jednoznacznie wyznaczone przez f.

Propozycja 3.3.2.2. *E-odwzorowanie $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest różnowartościowe w $\overline{\mathbb{D}}$.*

Dowód. Funkcja f ma lewą odwrotną w $\mathbb{D}$, więc wystarczy sprawdzić iniektywność na $\mathbb{T}$. Przypuśćmy, że $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$ dla pewnych $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$, i rozważmy krzywe

$$\gamma_j : [0,1] \ni t \longmapsto f(t\zeta_j) \in \overline{D}, \quad j = 1, 2.$$

Ponieważ

$$\operatorname{Re}\langle \gamma_j'(1), \nu_D(f(\zeta_j))\rangle = \operatorname{Re}\langle \zeta_j f'(\zeta_j), \nu_D(f(\zeta_j))\rangle = \rho(\zeta_j)^{-1} \neq 0, \tag{3.3.3}$$

krzywe γ_j przecinają ∂D transwersalnie we wspólnym punkcie $f(\zeta_1)$. Twierdzimy, że jest $C > 0$ takie, że dla $t \in (0,1)$ bliskich 1 istnieje $s_t \in (0,1)$ spełniające $\boldsymbol{\ell}_D(f(t\zeta_1), f(s_t\zeta_2)) < C$. Zakończy to dowód, gdyż

$$\boldsymbol{\ell}_D(f(t\zeta_1), f(s_t\zeta_2)) = \boldsymbol{p}(t\zeta_1, s_t\zeta_2) \to \infty, \quad t \to 1.$$

Można założyć, że $f(\zeta_1) = 0$ i $\nu_D(0) = (1, 0, \dots, 0) =: e_1$. Istnieje kula $B \subset D$ styczna do ∂D w 0. Korzystając w razie potrzeby z jednokładności, możemy przyjąć, że $B = \mathbb{B}_n - e_1$. Dzięki transwersalności γ_1, γ_2 do ∂D, istnieje stożek

$$A := \{z \in \mathbb{C}^n : -\operatorname{Re} z_1 > k|z|\}, \quad k > 0,$$

taki, że $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in A \cap B$, gdy $t \in (0,1)$ jest blisko 1. Dla $z \in A$ niech $k_z > k$ będzie liczbą dodatnią spełniającą

$$|z| = \frac{-\operatorname{Re} z_1}{k_z}.$$

Dla każdego $a \in \gamma_1((0,1))$ bliskiego 0 można znaleźć $b \in \gamma_2((0,1)) \cap A \cap B$ takie, że $\operatorname{Re} b_1 = \operatorname{Re} a_1$. Aby uzyskać sprzeczność, wystarczy stwierdzić, że $\boldsymbol{\ell}_D(a,b)$ jest ograniczone z góry przez stałą niezależną od a i b.

Mamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell}_D(a,b) \leqslant \boldsymbol{\ell}_{\mathbb{B}_n - e_1}(a,b) &= \boldsymbol{\ell}_{\mathbb{B}_n}(a+e_1, b+e_1)\\ &= \operatorname{tgh}^{-1}\sqrt{1 - \frac{(1-|a+e_1|^2)(1-|b+e_1|^2)}{|1-\langle a+e_1, b+e_1\rangle|^2}}.\end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie jest ograniczone z góry wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{(1-|a+e_1|^2)(1-|b+e_1|^2)}{|1-\langle a+e_1, b+e_1\rangle|^2}$$

jest ograniczone z dołu przez stałą dodatnią. Szacujemy

$$\frac{(1-|a+e_1|^2)(1-|b+e_1|^2)}{|1-\langle a+e_1, b+e_1\rangle|^2} = \frac{(2\operatorname{Re} a_1 + |a|^2)(2\operatorname{Re} b_1 + |b|^2)}{|\langle a,b\rangle + a_1 + \bar{b}_1|^2}$$

$$= \frac{\left(2\operatorname{Re} a_1 + \frac{(\operatorname{Re} a_1)^2}{k_a^2}\right)\left(2\operatorname{Re} a_1 + \frac{(\operatorname{Re} a_1)^2}{k_b^2}\right)}{|\langle a,b\rangle + 2\operatorname{Re} a_1 + i\operatorname{Im} a_1 - i\operatorname{Im} b_1|^2} \geqslant \frac{(\operatorname{Re} a_1)^2\left(2 + \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_a^2}\right)\left(2 + \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_b^2}\right)}{2|\langle a,b\rangle + i\operatorname{Im} a_1 - i\operatorname{Im} b_1|^2 + 2|2\operatorname{Re} a_1|^2}$$

$$\geqslant \frac{(\operatorname{Re} a_1)^2\left(2 + \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_a^2}\right)\left(2 + \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_b^2}\right)}{2(|a||b| + |a| + |b|)^2 + 8(\operatorname{Re} a_1)^2} = \frac{(\operatorname{Re} a_1)^2\left(2 + \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_a^2}\right)\left(2 + \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_b^2}\right)}{2\left(\frac{(-\operatorname{Re} a_1)^2}{k_a^2 k_b^2} - \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_a} - \frac{\operatorname{Re} a_1}{k_b}\right)^2 + 8(\operatorname{Re} a_1)^2}$$

$$= \frac{\left(2+\frac{\operatorname{Re} a_1}{k_a^2}\right)\left(2+\frac{\operatorname{Re} a_1}{k_b^2}\right)}{2\left(\frac{-\operatorname{Re} a_1}{k_a^2 k_b^2}+\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_b}\right)^2+8} > \frac{1}{2(1+2/k)^2+8}.$$

To kończy dowód. □

Załóżmy, że mamy oznaczenia jak w Propozycji 3.3.1.1, przy czym f jest E-odwzorowaniem. Naszym celem jest zastąpić W otoczeniem $\overline{D}$.

Uwaga 3.3.2.3. Dla $\zeta_0 \in \mathbb{D}_f$ mamy $G(f(\zeta_0), \zeta_0) = 0$ i $\frac{\partial G}{\partial \zeta}(f(\zeta_0), \zeta_0) = -1$. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej istnieją otoczenia $U_{f(\zeta_0)}, V_{\zeta_0}$ punktów $f(\zeta_0), \zeta_0$ i funkcja holomorficzna $F_{\zeta_0} : U_{f(\zeta_0)} \longrightarrow V_{\zeta_0}$ taka że dla każdego $z \in U_{\zeta_0}$ punkt $F_{\zeta_0}(\zeta)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $G(z, \zeta) = 0$, $\zeta \in V_{\zeta_0}$.

W szczególności, jeśli $\zeta_0 \in \mathbb{D}$ to $F_{\zeta_0} = F$ w otoczeniu $f(\zeta_0)$.

Propozycja 3.3.2.4. *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie E-odwzorowaniem. Wówczas istnieją dowolnie małe otoczenia U, V zbiorów $\overline{D}, \overline{\mathbb{D}}$ odpowiednio, takie, że dla każdego $z \in U$ równanie $G(z, \zeta) = 0$, $\zeta \in V$, ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Dowód. Ze względu na Propozycję 2.4.3 i Uwagę 3.3.2.3, wystarczy dowieść, że istnieją otoczenia U, V zbiorów $\overline{D}$, $\overline{\mathbb{D}}$ odpowiednio, takie że dla dowolnego $z \in U$ równanie $G(z, \cdot\,) = 0$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie $\zeta \in V$.

Załóżmy przeciwnie. Wtedy dla dowolnych otoczeń $U \supset \overline{D}$ i $V \supset \overline{\mathbb{D}}$ są $z \in U$, $\zeta_1, \zeta_2 \in V$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$ takie, że $G(z, \zeta_1) = G(z, \zeta_2) = 0$. Dla $m \in \mathbb{N}$ niech

$$U_m := \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{dist}(z, D) < 1/m\},$$
$$V_m := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(\zeta, \mathbb{D}) < 1/m\}.$$

Istnieją punkty $z_m \in U_m$, $\zeta_{m,1}, \zeta_{m,2} \in V_m$, $\zeta_{m,1} \neq \zeta_{m,2}$ spełniające $G(z_m, \zeta_{m,1}) = G(z_m, \zeta_{m,2}) = 0$. Przechodząc do podciągu można założyć, że $z_m \to z_0 \in \overline{D}$. Analogicznie możemy przyjąć, że $\zeta_{m,1} \to \zeta_1 \in \overline{\mathbb{D}}$ i $\zeta_{m,2} \to \zeta_2 \in \overline{\mathbb{D}}$. Oczywiście $G(z_0, \zeta_1) = G(z_0, \zeta_2) = 0$. Rozważmy możliwe przypadki.

Jeśli $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$, to $G(z_0, \zeta_j) = 0$ jest równoważne

$$\langle z_0 - f(\zeta_j), \nu_D(f(\zeta_j))\rangle = 0, \quad j = 1, 2,$$

w konsekwencji $z_0 - f(\zeta_j) \in T_D^{\mathbb{C}}(f(\zeta_j))$. Przez silną liniową wypukłość D dostajemy $z_0 = f(\zeta_j)$. Ale f jest różnowartościowa w $\overline{\mathbb{D}}$, więc $\zeta_1 = \zeta_2 =: \zeta_0$. Z Uwagi 3.3.2.3 wynika, że w dostatecznie małym otoczeniu (z_0, ζ_0) wszystkie rozwiązania równania $G(z, \zeta) = 0$ są postaci $(z, F_{\zeta_0}(z))$. Punkty $(z_m, \zeta_{m,1})$ i $(z_m, \zeta_{m,2})$ należą do tego otoczenia dla dużych m, co daje sprzeczność.

Gdy $\zeta_1 \in \mathbb{T}$ i $\zeta_2 \in \mathbb{D}$, analogicznie jak wyżej wnioskujemy, że $z_0 = f(\zeta_1)$. Weźmy dowolny ciąg $\{\eta_m\} \subset \mathbb{D}$ zbieżny do ζ_1. Wtedy $f(\eta_m) \in D$ i $f(\eta_m) \to z_0$, skąd ciąg $G(f(\eta_m), \cdot\,)$ zbiega do $G(z_0, \cdot\,)$ jednostajnie na $\mathbb{D}$. Skoro $G(z_0, \cdot\,) \not\equiv 0$, $G(z_0, \zeta_2) = 0$ oraz $\zeta_2 \in \mathbb{D}$, dostajemy z twierdzenia Hurwitza, że dla dużych m funkcje $G(f(\eta_m), \cdot\,)$ mają pierwiastki $\theta_m \in \mathbb{D}$ takie, że $\theta_m \to \zeta_2$. Stąd $G(f(\eta_m), \theta_m) = 0$, więc z jednoznaczności rozwiązań w $D \times \mathbb{D}$ (Propozycja 3.3.1.1) mamy

$$\theta_m = F(f(\eta_m)) = \eta_m.$$

Lewa strona dąży do ζ_2, a prawa do ζ_1, sprzeczność.

Pozostał przypadek $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{D}$. Jeśli $z_0 \in \overline{D} \setminus f(\mathbb{T})$, to $z_0 \in W$. Na $W \times \mathbb{D}$ wszystkie rozwiązania równania $G = 0$ są postaci $(z, F(z))$, $z \in W$. Jednakże, dla dużych m, punkty $(z_m, \zeta_{m,1})$, $(z_m, \zeta_{m,2})$ należą do $W \times \mathbb{D}$, co kłóci się z jednoznacznością.

Rozpatrzmy ostatnią możliwość $z_0 \in f(\mathbb{T})$, czyli $z_0 = f(\zeta_0)$ dla pewnego $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Mamy $G(f(\zeta_0), \zeta_0) = 0$, skąd $G(z_0, \zeta_0) = G(z_0, \zeta_1) = 0$ oraz $\zeta_0 \in \mathbb{T}$, $\zeta_1 \in \mathbb{D}$. Jest to jeden z rozważonych już przypadków. □

Wniosek 3.3.2.5. *Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie E-odwzorowaniem. Wówczas istnieją otoczenia U, V zbiorów $\overline{D}, \overline{\mathbb{D}}$ odpowiednio takie, że*

(*a*) *$V \subset\subset \mathbb{D}_f$,*

(*b*) *F rozszerza się holomorficznie na U,*

(*c*) *wszystkie rozwiązania równania $G|_{U \times V} = 0$ są postaci $(z, F(z))$, $z \in U$.*

W szczególności, $F \circ f = \mathrm{id}_V$.

3.4. Oszacowania hölderowskie

Definicja 3.4.1. Dla danego $c > 0$ rodzina $\mathcal{D}(c)$ składa się z par (D, z), gdzie $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, jest ograniczonym obszarem silnie pseudowypukłym i $z \in D$, spełniających

(*a*) $\mathrm{dist}(z, \partial D) \geqslant 1/c$,

(*b*) średnica D jest niewiększa niż c oraz D spełnia warunek kuli wewnętrznej o promieniu $1/c$,

(*c*) dla każdych $x, y \in D$ istnieje $m \leqslant 8c^2$ i otwarte kule $B_0, \ldots, B_m \subset D$ o promieniach $1/(2c)$ takie, że $x \in B_0$, $y \in B_m$ oraz odległość między środkami kul B_j, B_{j+1} nie przekracza $1/(4c)$ dla $j = 0, \ldots, m-1$,

(*d*) dla dowolnej otwartej kuli $B \subset \mathbb{C}^n$ o promieniu niewiększym niż $1/c$, przecinającej ∂D, istnieje odwzorowanie $\Phi \in \mathcal{O}(\overline{D}, \mathbb{C}^n)$ takie, że

  (*i*) D spełnia *warunek kuli zewnętrznej* o promieniu c, tzn. dla każdego $w \in \Phi(B \cap \partial D)$ istnieje kula o promieniu c zawierająca $\Phi(D)$ i styczna do $\partial\Phi(D)$ w punkcie w,

  (*ii*) Φ jest biholomorficzne w otoczeniu $\overline{B}$ i $\Phi^{-1}(\Phi(B)) = B$,

  (*iii*) wyrazy wszystkich macierzy Φ' na $B \cap \overline{D}$ oraz $(\Phi^{-1})'$ na $\Phi(B \cap \overline{D})$ są ograniczone na moduł przez c,

  (*iv*) $\mathrm{dist}(\Phi(z), \partial\Phi(D)) \geqslant 1/c$,

(*e*) wektor ν_D jest lipschitzowski ze stałą $2c$, tj.

$$|\nu_D(a) - \nu_D(b)| \leqslant 2c|a - b|, \quad a, b \in \partial D,$$

(*f*) ε-otoczka zbioru D, tzn. zbiór $D_\varepsilon := \{w \in \mathbb{C}^n : \mathrm{dist}(w, D) < \varepsilon\}$, jest obszarem silnie pseudowypukłym dla $\varepsilon \in (0, 1/c]$.

Przypomnijmy, że *warunek kuli wewnętrznej* o promieniu $r > 0$ oznacza, że dla dowolnego punktu $a \in \partial D$ istnieje kula $B_n(a', r) \subset D$ styczna do ∂D w a. Równoważnie
$$D = \bigcup_{a' \in A} B_n(a', r)$$
dla pewnego zbioru $A \subset D$.

Można pokazać, że warunki (b) i (e) wyrażają się przez ograniczoność krzywizny normalnej, ograniczoność obszaru i warunek (c). Jednak leży to poza zakresem naszych rozważań i wymaga bardzo technicznych środków, więc pomijamy dowód. Powodem do użycia (b) w takiej formie jest związek z warunkiem (c) (pozwala to uprościć dowód w pewnych miejscach).

Uwaga 3.4.2. Obszar wypukły spełniający (a)-...-(d) spełnia również (e) i (f).

Istotnie, z (b) wynika, że dla każdego $a \in \partial D$ istnieje kula $B_n(a', 1/c) \subset D$ styczna do ∂D w a. Wtedy
$$\nu_D(a) = \frac{a' - a}{|a' - a|} = c(a' - a).$$
Stąd
$$|\nu_D(a) - \nu_D(b)| = c|a' - a - b' + b| \leqslant c|a' - b'| + c|a - b|.$$
Skoro D jest wypukły, zachodzi $|a' - b'| \leqslant |a - b|$, co daje (e).

Warunek (f) jest jasny — ε-otoczka obszaru silnie wypukłego również jest silnie wypukła.

Uwaga 3.4.3. Dla obszaru wypukłego D, warunek (c) sprowadza się do (b).

Faktycznie, dla $x, y \in D$ rozważmy kule o promieniach $1/(2c)$ zawierające je i zawarte w D. Podzielmy odcinek między środkami kul na $[4c^2] + 1$ równych części i weźmy kule o środkach w punktach podziału i promieniach $1/(2c)$.

Zauważmy, że jeżeli obszar silnie wypukły spełnia warunek kuli wewnętrznej o promieniu $1/c$ i zewnętrznej o promieniu c, to można przyjąć $\Phi := \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$.

Uwaga 3.4.4. Dla obszaru silnie pseudowypukłego D, liczby $c' > 0$ i $z \in D$ takich, że $\operatorname{dist}(z, \partial D) > 1/c'$, istnieje $c = c(c') > 0$ spełniające $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$.

Jedynie warunek (d) jest nietrywialny. Konstrukcja odwzorowania Φ sprowadza się do konstrukcji funkcji szczytowych Fornæssa. Stosujemy [**For76**, Proposition 1] do każdego punktu brzegowego D. To daje pokrycie ∂D skończoną liczbą kul B_j, odwzorowania $\Phi_j \in \mathcal{O}(\overline{D}, \mathbb{C}^n)$ oraz silnie wypukłe $\mathcal{C}^\infty$-gładkie obszary C_j, $j = 1, \dots, N$, takie, że

- $\Phi_j(D) \subset C_j$,
- $\Phi_j(\overline{D}) \subset \overline{C}_j$,
- $\Phi_j(B_j \setminus \overline{D}) \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{C}_j$,
- $\Phi_j^{-1}(\Phi_j(B_j)) = B_j$,
- $\Phi_j|_{B_j} : B_j \longrightarrow \Phi_j(B_j)$ jest biholomorficzne.

Można zatem wybrać $c > 0$ takie, że każde C_j spełnia warunek kuli zewnętrznej z c, dowolna kula o promieniu $1/c$ przecinająca ∂D zawiera się w pewnym B_j, a warunki (iii), (iv) są również spełnione z $\Phi := \Phi_j$.

W tej sekcji używamy słów "jednostajny", "jednostajnie", gdy $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$. Oznacza to, że oszacowania będą zależeć tylko od c, natomiast będą niezależne od D i z, jeżeli $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$ oraz od E-odwzorowań w D posyłających 0 w z (co oznaczamy $f : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (D, z)$).

Wracamy teraz do sytuacji, w której $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, jest **ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym**.

Propozycja 3.4.5. *Niech $f : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (D, z)$ będzie E-odwzorowaniem. Wtedy*

$$\operatorname{dist}(f(\zeta), \partial D) \leqslant C(1 - |\zeta|), \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}},$$

z $C > 0$ jednostajnym, gdy $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$.

Dowód. Istnieje jednostajne C_1 takie, że

$$\operatorname{dist}(w, \partial D) \geqslant 1/c \Longrightarrow \boldsymbol{k}_D(w, z) < C_1.$$

Rzeczywiście, niech $\operatorname{dist}(w, \partial D) \geqslant 1/c$ i kule $B_0, \ldots, B_m$ o środkach $b_0, \ldots, b_m$ będą wybrane dla punktów w, z jak w warunku (c). Wówczas

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_D(w, z) &\leqslant \boldsymbol{k}_D(w, b_0) + \sum_{j=0}^{m-1} \boldsymbol{k}_D(b_j, b_{j+1}) + \boldsymbol{k}_D(b_m, z) \\
&\leqslant \boldsymbol{k}_{B_n(w,1/c)}(w, b_0) + \sum_{j=0}^{m-1} \boldsymbol{k}_{B_j}(b_j, b_{j+1}) + \boldsymbol{k}_{B_n(z,1/c)}(b_m, z) \\
&= \boldsymbol{p}\left(0, \frac{|w - b_0|}{1/c}\right) + \sum_{j=0}^{m-1} \boldsymbol{p}\left(0, \frac{|b_j - b_{j+1}|}{1/(2c)}\right) + \boldsymbol{p}\left(0, \frac{|b_m - z|}{1/c}\right) \\
&\leqslant (m + 2)\boldsymbol{p}\left(0, \frac{1}{2}\right) \leqslant (8c^2 + 2)\boldsymbol{p}\left(0, \frac{1}{2}\right) =: C_1.
\end{aligned}$$

Jeśli $\zeta \in \mathbb{D}$ jest takie, że $\operatorname{dist}(f(\zeta), \partial D) \geqslant 1/c$, to

$$\boldsymbol{k}_D(f(0), f(\zeta)) \leqslant C_2 - \frac{1}{2} \log \operatorname{dist}(f(\zeta), \partial D)$$

z jednostajnym $C_2 := C_1 + \frac{1}{2} \log c$.

W przeciwnym przypadku, gdy $\operatorname{dist}(f(\zeta), \partial D) < 1/c$, oznaczmy przez $\eta(\zeta)$ najbliższy do $f(\zeta)$ punkt leżący w ∂D. Niech $w \in D$ będzie środkiem kuli B

o promieniu $1/c$ stycznej do ∂D w $\eta(\zeta)$. Z warunku (b) mamy $B \subset D$. Stąd

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_D(f(0), f(\zeta)) &\leqslant \boldsymbol{k}_D(f(0), w) + \boldsymbol{k}_D(w, f(\zeta)) \\ &\leqslant C_1 + \boldsymbol{k}_B(w, f(\zeta)) \\ &\leqslant C_1 + \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{|f(\zeta) - w|}{1/c}\right) \\ &= C_1 + \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log(c\,\mathrm{dist}(f(\zeta), \partial B)) \\ &= C_3 - \frac{1}{2}\log \mathrm{dist}(f(\zeta), \partial D)\end{aligned}$$

z jednostajnym $C_3 := C_1 + \frac{1}{2}\log\frac{2}{c}$.

Otrzymaliśmy szacowania tego samego typu w obu przypadkach. Z drugiej strony, z Wniosku 3.3.1.2

$$\boldsymbol{k}_D(f(0), f(\zeta)) = \boldsymbol{p}(0, \zeta) \geqslant -\frac{1}{2}\log(1 - |\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

co kończy dowód. $\square$

Przypomnijmy, że założyliśmy, iż ρ jest postaci (3.3.2).

Propozycja 3.4.6. *Niech $f : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (D, z)$ będzie E-odwzorowaniem. Wówczas*

$$C_1 < \rho(\zeta)^{-1} < C_2, \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

gdzie C_1, C_2 są jednostajne, gdy $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$.

Dowód. Dla dowodu górnego oszacowania ustalmy $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Kładziemy $B := B_n(f(\zeta_0), 1/c)$ i niech $\Phi \in \mathcal{O}(\overline{D}, \mathbb{C}^n)$ będzie jak w warunku (d) dla B. Można założyć, że $f(\zeta_0) = \Phi(f(\zeta_0)) = 0$ i $\nu_D(0) = \nu_{\Phi(D)}(0) = (1, 0, \ldots, 0)$. Wtedy $\Phi(D)$ zawiera się w półpłaszczyźnie $\{w \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}\, w_1 < 0\}$. Dla $h := \Phi \circ f$ mamy

$$h_1(\mathbb{D}) \subset \{w_1 \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w_1 < 0\}.$$

Z uwagi na lemat Schwarza na półpłaszczyźnie, dostajemy

$$|h_1'(t\zeta_0)| \leqslant \frac{-2\,\mathrm{Re}\, h_1(t\zeta_0)}{1 - |t\zeta_0|^2}. \tag{3.4.1}$$

Niech δ będzie znakowaną odległością do $\partial\Phi(D)$, tj.

$$\delta(x) := \begin{cases} -\,\mathrm{dist}(x, \partial\Phi(D)), & x \in \Phi(D) \\ \ \ \mathrm{dist}(x, \partial\Phi(D)), & x \notin \Phi(D). \end{cases}$$

Jest to funkcja definiująca $\Phi(D)$ w otoczeniu 0 ([**JP00**, Proposition 2.2.3(d)], pamiętamy też, że $\Phi^{-1}(\Phi(B)) = B$). Mamy

$$\delta(x) = \delta(0) + \mathrm{Re}\langle\nabla\delta(0), x\rangle + O(|x|^2) = \mathrm{Re}\, x_1 + O(|x|^2).$$

Jeśli $\Phi(D) \ni x \to 0$ transwersalnie, to kąt między wektorem x a hiperpłaszczyzną $\{w \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_1 = 0\}$ jest oddzielony od 0, tzn. jego sinus $(-\operatorname{Re} x_1)/|x|$ jest większy niż pewien $\varepsilon > 0$ niezależny od x. Dlatego

$$\frac{\delta(x)}{\operatorname{Re} x_1} = 1 + O(|x|), \quad x \to 0 \text{ transwersalnie.}$$

W konsekwencji

$$-\operatorname{Re} x_1 \leqslant 2 \operatorname{dist}(x, \partial\Phi(D)), \quad x \to 0 \text{ transwersalnie.} \tag{3.4.2}$$

Wiemy z (3.3.3), że $t \longmapsto f(t\zeta_0)$ przecina ∂D transwersalnie. Wykażemy, że $t \longmapsto h(t\zeta_0)$ przecina $\partial\Phi(D)$ transwersalnie. Mamy

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt} h(t\zeta_0)\bigg|_{t=1}, \nu_{\Phi(D)}(h(\zeta_0)) \right\rangle &= \left\langle \Phi'(0) f'(\zeta_0)\zeta_0, \frac{(\Phi^{-1})'(0)^* \nabla r(0)}{|(\Phi^{-1})'(0)^* \nabla r(0)|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \zeta_0 f'(\zeta_0), \nabla r(0)\rangle}{|(\Phi'(0)^{-1})^* \overline{\nabla r(0)}|} = \frac{\langle \zeta_0 f'(\zeta_0), \nu_D(f(\zeta_0))|\nabla r(0)|\rangle}{|(\Phi'(0)^{-1})^* \overline{\nabla r(0)}|}.\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

gdzie r jest funkcją definiującą D. W szczególności,

$$\operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} h(t\zeta_0)\bigg|_{t=1}, \nu_{\Phi(D)}(h(\zeta_0)) \right\rangle = \frac{\rho(\zeta_0)^{-1} |\nabla r(0)|}{|(\Phi'(0)^{-1})^* \overline{\nabla r(0)}|} \neq 0.$$

To dowodzi, że $t \longmapsto h(t\zeta_0)$ przecina $\partial\Phi(D)$ transwersalnie.

Wobec tego, możemy wstawić $x := h(t\zeta_0)$ do (3.4.2) aby otrzymać

$$\frac{-2 \operatorname{Re} h_1(t\zeta_0)}{1 - |t\zeta_0|^2} \leqslant \frac{4 \operatorname{dist}(h(t\zeta_0), \partial\Phi(D))}{1 - |t\zeta_0|^2}, \quad t \to 1. \tag{3.4.4}$$

Ale Φ jest biholomorfizmem blisko 0, więc

$$\frac{4 \operatorname{dist}(h(t\zeta_0), \partial\Phi(D))}{1 - |t\zeta_0|^2} \leqslant C_3 \frac{\operatorname{dist}(f(t\zeta_0), \partial D)}{1 - |t\zeta_0|}, \quad t \to 1, \tag{3.4.5}$$

gdzie C_3 jest jednostajne dzięki $(d)(iii)$. Z Propozycji 3.4.5, wyrażenie po prawej stronie (3.4.5) nie przekracza stałej jednostajnej.

Z (3.4.3) wynika, że

$$\begin{aligned}\rho(\zeta_0)^{-1} = |\langle f'(\zeta_0)\zeta_0, \nu_D(f(\zeta_0))\rangle| &\leqslant C_4 |\langle h'(\zeta_0), \nu_{\Phi(D)}(h(\zeta_0))\rangle| \\ &= C_4 |h_1'(\zeta_0)| = \lim_{t\to 1} C_4 |h_1'(t\zeta_0)|\end{aligned}$$

z jednostajnym C_4 (używamy tu też $(d)(iii)$). Łącząc (3.4.1), (3.4.4) i (3.4.5), dostajemy górne szacowanie dla $\rho(\zeta_0)^{-1}$.

Przechodzimy do dolnej nierówności. Niech r będzie znakowaną odległością do ∂D. Dla $\varepsilon := 1/c$ funkcja

$$\varrho(w) := -\log(\varepsilon - r(w)) + \log \varepsilon, \quad w \in D_\varepsilon,$$

gdzie D_ε jest ε-otoczką D, jest plurisubharmoniczna i definiująca D. Mamy bowiem

$$-\log(\varepsilon - r(w)) = -\log \operatorname{dist}(w, \partial D_\varepsilon), \quad w \in D_\varepsilon,$$

a D_ε jest pseudowypukły.

Funkcja
$$v := \varrho \circ f : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow (-\infty, 0]$$
jest subharmoniczna w $\mathbb{D}$. Ponadto, skoro f odwzorowuje $\mathbb{T}$ w ∂D, wnosimy, że $v = 0$ na $\mathbb{T}$. Ponieważ $|f(\lambda) - z| < c$ dla $\lambda \in \mathbb{D}$, mamy
$$|f(\lambda) - z| < \frac{1}{2c}, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{2c^2}.$$
Zatem dla ustalonego $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ zachodzi
$$M_{\zeta_0}(x) := \max_{t \in [0,2\pi]} v(\zeta_0 e^{x+it}) \leqslant -\log\left(1 + \frac{1}{2c\varepsilon}\right) =: -C_5, \quad x \leqslant -\log(2c^2).$$
Skoro M_{ζ_0} jest wypukła dla $x \leqslant 0$ i $M_{\zeta_0}(0) = 0$, otrzymujemy
$$v(\zeta_0 e^x) \leqslant M_{\zeta_0}(x) \leqslant \frac{C_5 x}{\log(2c^2)}, \quad -\log(2c^2) \leqslant x \leqslant 0.$$
Stąd (pamiętając, że $v(\zeta_0) = 0$)
$$\begin{aligned}\frac{C_5}{\log(2c^2)} \leqslant \frac{d}{dx} v(\zeta_0 e^x)\bigg|_{x=0} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(f(\zeta_0)) f_j'(\zeta_0)\zeta_0 \\ &= \langle \zeta_0 f'(\zeta_0), \nabla\varrho(f(\zeta_0))\rangle = \rho(\zeta_0)^{-1}|\nabla\varrho(f(\zeta_0))|. \quad (3.4.6)\end{aligned}$$
Co więcej,
$$\begin{aligned}|\nabla\varrho(f(\zeta_0))| &= \left\langle \nabla\varrho(f(\zeta_0)), \frac{\nabla\varrho(f(\zeta_0))}{|\nabla\varrho(f(\zeta_0))|}\right\rangle = \operatorname{Re}\langle \nabla\varrho(f(\zeta_0)), \nu_D(f(\zeta_0))\rangle \\ &= \frac{\partial\varrho}{\partial\nu_D}(f(\zeta_0)) = \lim_{t\to 0} \frac{\varrho(f(\zeta_0) + t\nu_D(f(\zeta_0))) - \varrho(f(\zeta_0))}{t} = \frac{1}{\varepsilon} = c,\end{aligned}$$
gdyż $r(a + t\nu(a)) = t$, jeśli $a \in \partial D$ oraz $t \in \mathbb{R}$ jest blisko 0. To, razem z (3.4.6), kończy dowód. $\square$

Propozycja 3.4.7. *Niech $f : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (D, z)$ będzie E-odwzorowaniem. Wtedy*
$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant C\sqrt{|\zeta_1 - \zeta_2|}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\mathbb{D}},$$
gdzie C jest jednostajne, gdy $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$.

Dowód. Niech $\zeta_0 \in \mathbb{D}$ będzie takie, że $1 - |\zeta_0| < 1/(cC)$, gdzie C jest jak w Propozycji 3.4.5. Wtedy kula $B := B_n(f(\zeta_0), 1/c)$ przecina ∂D. Weźmy Φ dla B z warunku (d). Niech w oznacza najbliższy punkt do $\Phi(f(\zeta_0))$ leżący na $\partial\Phi(D)$. Z $(d)(ii)$ i $(d)(iii)$ istnieje stała jednostajna $r < 1$ taka, że w nalezy do $\Phi(B \cap \partial D)$, o ile $|\zeta_0| \geqslant r$.

Dzięki $(d)(i)$, dostajemy istnienie w_0 takiego, że $\Phi(D) \subset B_n(w_0, c)$ i kula $B_n(w_0, c)$ jest styczna do $\partial\Phi(D)$ w punkcie w. Niech
$$h(\zeta) := (\Phi \circ f)\left(\frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \overline{\zeta_0}\zeta}\right), \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Wówczas h jest holomorficzne, $h(\mathbb{D}) \subset B_n(w_0, c)$ i $h(0) = \Phi(f(\zeta_0))$. Z lematu Schwarza dla kuli (Dodatek), mamy

$$\begin{aligned}|h'(0)| \leqslant \sqrt{c^2 - |h(0) - w_0|^2} &\leqslant \sqrt{2c(c - |\Phi(f(\zeta_0)) - w_0|)}\\ &= \sqrt{2c(|w_0 - w| - |\Phi(f(\zeta_0)) - w_0|)}\\ &\leqslant \sqrt{2c}\sqrt{|\Phi(f(\zeta_0)) - w|}\\ &= \sqrt{2c}\sqrt{\operatorname{dist}(\Phi(f(\zeta_0)), \partial\Phi(D))}.\end{aligned}$$

Ponieważ

$$h'(0) = \Phi'(f(\zeta_0))f'(\zeta_0)\left.\frac{d}{d\zeta}\frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \overline{\zeta_0}\zeta}\right|_{\zeta=0},$$

dostajemy z warunku $(d)(iii)$

$$|h'(0)| \geqslant C_1|f'(\zeta_0)|(1 - |\zeta_0|^2)$$

z jednostajnym C_1. Dalej,

$$|f'(\zeta_0)| \leqslant \frac{|h'(0)|}{C_1(1 - |\zeta_0|^2)} \leqslant \frac{\sqrt{2c}}{C_1}\frac{\sqrt{\operatorname{dist}(\Phi(f(\zeta_0)), \partial\Phi(D))}}{1 - |\zeta_0|^2} \leqslant C_2\frac{\sqrt{\operatorname{dist}(f(\zeta_0), \partial D)}}{1 - |\zeta_0|^2},$$

gdzie C_2 jest jednostajne. W połączeniu z Propozycją 3.4.5 mamy

$$|f'(\zeta_0)| \leqslant C_3\frac{\sqrt{1 - |\zeta_0|}}{1 - |\zeta_0|^2} = \frac{C_3}{\sqrt{1 - |\zeta_0|}}, \tag{3.4.7}$$

gdzie C_3 jest jednostajne.

Wykazaliśmy, że (3.4.7) zachodzi dla $r \leqslant |\zeta_0| < 1$ z jednostajnym $r < 1$. Dla $|\zeta_0| < r$ szacujemy w następujący sposób

$$|f'(\zeta_0)| \leqslant \max_{|\zeta|=r}|f'(\zeta)| \leqslant \frac{C_3}{\sqrt{1 - r}} \leqslant \frac{C_4}{\sqrt{1 - |\zeta_0|}}$$

z jednostajnym $C_4 := C_3/\sqrt{1 - r}$.

Zastosowanie twierdzeń Hardy'ego-Littlewooda (Dodatek) kończy dowód. □

Propozycja 3.4.8. *Niech $f : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (D, z)$ będzie E-odwzorowaniem. Wówczas*

$$|\rho(\zeta_1) - \rho(\zeta_2)| \leqslant C\sqrt{|\zeta_1 - \zeta_2|}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T},$$

gdzie C jest jednostajne, gdy $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$.

Dowód. Wystarczy dowieść, że istnieją jednostajne $C, C_1 > 0$ takie, że

$$|\rho(\zeta_1) - \rho(\zeta_2)| \leqslant C\sqrt{|\zeta_1 - \zeta_2|}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T},\ |\zeta_1 - \zeta_2| < C_1.$$

Ustalmy $\zeta_1 \in \mathbb{T}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\nu_{D,1}(f(\zeta_1)) = 1$. Niech $0 < C_1 \leqslant 1/4$ będzie jednostajne takie, że

$$|\nu_{D,1}(f(\zeta)) - 1| < 1/2, \quad \zeta \in \mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, 3C_1).$$

Jest to możliwe, gdyż z Propozycji 3.4.7

$$|\nu_D(f(\zeta)) - \nu_D(f(\zeta'))| \leqslant 2c|f(\zeta) - f(\zeta')| \leqslant C'\sqrt{|\zeta - \zeta'|}, \quad \zeta, \zeta' \in \mathbb{T},$$

z jednostajnym $C' > 0$.

Istnieje funkcja $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}, [0,1])$ taka, że $\psi = 1$ na $\mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, 2C_1)$ i $\psi = 0$ na $\mathbb{T} \setminus B_1(\zeta_1, 3C_1)$. Wtedy funkcja $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ określona jako

$$\varphi := (\overline{\nu_{D,1} \circ f} - 1)\psi + 1$$

spełnia warunki

- $\varphi(\zeta) = \overline{\nu_{D,1}(f(\zeta))}$, $\zeta \in \mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, 2C_1)$,
- $|\varphi(\zeta) - 1| < 1/2$, $\zeta \in \mathbb{T}$,
- φ jest jednostajnie 1/2-hölderowska na $\mathbb{T}$, tj. 1/2-hölderowska z jednostajną stałą (pamiętamy, że ψ wybrano jednostajnie).

Po pierwsze, stwierdzamy, że $\log\varphi$ jest dobrze określony. Wnioskujemy ponadto, że $\log\varphi$ i $\operatorname{Im}\log\varphi$ są jednostajnie 1/2-hölderowskie na $\mathbb{T}$. Funkcja $\operatorname{Im}\log\varphi$ rozszerza się do $v : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$, harmonicznej w $\mathbb{D}$. Istnieje funkcja $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ taka, że $v = \operatorname{Im} h$ w $\mathbb{D}$. Biorąc $h - \operatorname{Re} h(0)$ zamiast h, można przyjąć, że $\operatorname{Re} h(0) = 0$. Z twierdzenia Privalova (Dodatek) zastosowanego do ih, mamy rozszerzenie h na $\overline{\mathbb{D}}$ oraz jednostajną 1/2-hölderowskość h w $\overline{\mathbb{D}}$. Zatem funkcja $u := \operatorname{Re} h : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie 1/2-hölderowska na $\overline{\mathbb{D}}$ ze stałą C_2. Dalej, u jest jednostajnie ograniczona na $\overline{\mathbb{D}}$, gdyż

$$|u(\zeta)| = |u(\zeta) - u(0)| \leqslant C_2\sqrt{|\zeta|}, \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Niech $g(\zeta) := \widetilde{f}_1(\zeta)e^{-h(\zeta)}$ i $G(\zeta) := g(\zeta)/\zeta$. Wtedy $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ i $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_*) \cap \mathcal{C}((\overline{\mathbb{D}})_*)$. Dla $\zeta \in \mathbb{T}$

$$|g(\zeta)| = |\zeta\rho(\zeta)\overline{\nu_{D,1}(f(\zeta))}e^{-h(\zeta)}| \leqslant \rho(\zeta)e^{-u(\zeta)},$$

co, razem z Propozycją 3.4.6, jednostajnym ograniczeniem u i zasadą maksimum, daje jednostajne ograniczenie g w $\overline{\mathbb{D}}$. Funkcja G jest jednostajnie ograniczona na $\overline{\mathbb{D}} \cap B_1(\zeta_1, 2C_1)$. Ponadto, dla $\zeta \in \mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, 2C_1)$

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= \rho(\zeta)\overline{\nu_{D,1}(f(\zeta))}e^{-u(\zeta) - i\operatorname{Im}\log\varphi(\zeta)} \\ &= \rho(\zeta)\overline{\nu_{D,1}(f(\zeta))}e^{-u(\zeta) + \operatorname{Re}\log\varphi(\zeta)}e^{-\log\varphi(\zeta)} = \rho(\zeta)e^{-u(\zeta)+\operatorname{Re}\log\varphi(\zeta)} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Z zasady odbicia G rozszerza się holomorficznie przez $\mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, 2C_1)$ do funkcji (oznaczanej tą samą literą) jednostajnie ograniczonej na $B_1(\zeta_1, 2C_2)$, gdzie C_2 jest jednostajne. Zatem, na mocy wzoru Cauchy'ego, G jest jednostajnie lipschitzowskie w $B_1(\zeta_1, C_2)$, w konsekwencji jednostajnie 1/2-hölderowskie na $B_1(\zeta_1, C_2)$.

Ostatecznie, funkcje G, h i $\nu_{D,1} \circ f$ są jednostajnie 1/2-hölderowskie na $\mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, C_2)$ oraz $|\nu_{D,1} \circ f| > 1/2$ w $\mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, C_2)$, skąd wynika, że funkcja $\rho = Ge^h/\overline{\nu_{D,1} \circ f}$ jest jednostajnie 1/2-hölderowska na $\mathbb{T} \cap B_1(\zeta_1, C_2)$. □

Propozycja 3.4.9. *Niech $f : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (D, z)$ będzie E-odwzorowaniem. Wtedy*

$$|\widetilde{f}(\zeta_1) - \widetilde{f}(\zeta_2)| \leqslant C\sqrt{|\zeta_1 - \zeta_2|}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\mathbb{D}},$$

gdzie C jest jednostajne, gdy $(D, z) \in \mathcal{D}(c)$.

Dowód. Z Propozycji 3.4.7 i 3.4.8 mamy żądaną nierówność dla $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$. Twierdzenie Hardy'ego-Littlewooda (Dodatek) kończy dowód. □

3.5. Otwartość zbioru E-odwzorowań w klasie $\mathcal{C}^\omega$

Dowiedziemy, że po małej perturbacji obszaru mającego E-odwzorowanie dostajemy obszar posiadający E-odwzorowanie będące blisko danego.

3.5.1. Wyniki wstępne.

Propozycja 3.5.1.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym, a f jego E-odwzorowaniem. Wówczas istnieją obszary $G, \widetilde{D}, \widetilde{G} \subset \mathbb{C}^n$ i biholomorfizm $\Phi : \widetilde{D} \longrightarrow \widetilde{G}$ taki, że*

(a) $\widetilde{D}, \widetilde{G}$ są otoczeniami zbiorów $\overline{D}, \overline{G}$ odpowiednio,
(b) $\Phi(D) = G$,
(c) $g(\zeta) := \Phi(f(\zeta)) = (\zeta, 0, \ldots, 0)$, $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$,
(d) $\nu_G(g(\zeta)) = (\zeta, 0, \ldots, 0)$, $\zeta \in \mathbb{T}$,
(e) $g(\zeta)$ jest punktem silnej liniowej wypukłości G dla każdego $\zeta \in \mathbb{T}$.

Dowód. Niech U, V będą zbiorami z Propozycji 3.3.2.4. Twierdzimy, że po liniowej zmianie zmiennych można założyć, że $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ nie mają wspólnych zer na V.

Skoro $f' \bullet \widetilde{f} = 1$, przynajmniej jedna z funkcji $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n$, powiedzmy $\widetilde{f}_1$, nie jest identycznie równa 0. Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ będą wszystkimi zerami $\widetilde{f}_1$ na V. Znajdzie się $\alpha \in \mathbb{C}^n$ takie, że

$$(\alpha_1 \widetilde{f}_1 + \ldots + \alpha_n \widetilde{f}_n)(\lambda_j) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

W przeciwnym razie, dla każdego $\alpha \in \mathbb{C}^n$ istniałoby $j \in \{1, \ldots, m\}$ takie, że $\alpha \bullet \widetilde{f}(\lambda_j) = 0$, a stąd

$$\mathbb{C}^n = \bigcup_{j=1}^{m} \{\alpha \in \mathbb{C}^n : \ \alpha \bullet \widetilde{f}(\lambda_j) = 0\}.$$

Zbiory $\{\alpha \in \mathbb{C}^n : \alpha \bullet \widetilde{f}(\lambda_j) = 0\}$, $j = 1, \ldots, m$, są $(n-1)$-wymiarowymi hiperpłaszczyznami zespolonymi, więc ich skończona suma nie może być przestrzenią $\mathbb{C}^n$.

Oczywiście, przynajmniej jedna z liczb $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, powiedzmy α_2, jest niezerowa. Kładziemy

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad B := (A^T)^{-1}.$$

Twierdzimy, że B jest szukaną zmianą zmiennych. Jeśli r jest funkcją definiującą D, to $r \circ B^{-1}$ jest funkcją definiującą $B(D)$, więc $B(D)$ jest ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym. Sprawdzimy, że Bf jest E-odwzorowaniem w $B(D)$ ze stowarzyszonymi odwzorowaniami

$$A\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}), \quad \rho \frac{|A\overline{\nabla r \circ f}|}{|\nabla r \circ f|} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}). \tag{3.5.1}$$

Warunki (a) i (b) Definicji 3.1.17 są jasne. Dla $\zeta \in \mathbb{T}$ mamy

$$\overline{\nu_{B(D)}(Bf(\zeta))} = \frac{\overline{\nabla(r \circ B^{-1})(Bf(\zeta))}}{|\nabla(r \circ B^{-1})(Bf(\zeta))|} = \frac{(B^{-1})^T \overline{\nabla r(f(\zeta))}}{|(B^{-1})^T \overline{\nabla r(f(\zeta))}|} = \frac{A\overline{\nabla r(f(\zeta))}}{|A\overline{\nabla r(f(\zeta))}|}, \tag{3.5.2}$$

więc

$$\zeta\rho(\zeta) \frac{|A\overline{\nabla r(f(\zeta))}|}{|\nabla r(f(\zeta))|} \overline{\nu_{B(D)}(Bf(\zeta))} = \zeta\rho(\zeta) A\overline{\nu_D(f(\zeta))} = A\widetilde{f}(\zeta). \tag{3.5.3}$$

Ponadto, dla $\zeta \in \mathbb{T}$, $z \in D$

$$\begin{aligned} \langle Bz - Bf(\zeta), \nu_{B(D)}(Bf(\zeta))\rangle &= \overline{\nu_{B(D)}(Bf(\zeta))}^T (Bz - Bf(\zeta)) \\ &= \frac{\overline{\nabla r(f(\zeta))}^T B^{-1} B(z - f(\zeta))}{|(B^{-1})^T \overline{\nabla r(f(\zeta))}|} \\ &= \frac{|\nabla r(f(\zeta))|}{|(B^{-1})^T \overline{\nabla r(f(\zeta))}|} \overline{\nu_D(f(\zeta))}^T (z - f(\zeta)) \\ &= \frac{|\nabla r(f(\zeta))|}{|(B^{-1})^T \overline{\nabla r(f(\zeta))}|} \langle z - f(\zeta), \nu_D(f(\zeta))\rangle. \end{aligned}$$

Stąd B jest żądaną zmianą zmiennych.

W razie konieczności zmniejszamy zbiory U, V przypisane odwzorowaniu f do zbiorów stowarzyszonych z Bf. Istnieją funkcje holomorficzne $h_1, h_2 : V \longrightarrow \mathbb{C}$ takie, że

$$h_1 \widetilde{f}_1 + h_2 \widetilde{f}_2 = 1 \text{ na } V.$$

Faktycznie, gdy $\widetilde{f}_1 \equiv 0$ lub $\widetilde{f}_2 \equiv 0$, jest to oczywiste. W przeciwnym wypadku, niech $\widetilde{f}_j = F_j P_j$, $j = 1, 2$, gdzie F_j są holomorficzne, niezerowe na V, natomiast

P_j są wielomianami ze wszystkimi zerami w V. Wtedy P_j są względnie pierwsze, zatem istnieją wielomiany Q_1, Q_2 takie, że

$$Q_1P_1 + Q_2P_2 \equiv 1.$$

Mamy więc

$$\frac{Q_1}{F_1}\widetilde{f}_1 + \frac{Q_2}{F_2}\widetilde{f}_2 = 1 \text{ na } V.$$

Rozważmy odwzorowanie $\Psi : V \times \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ określone jako

$$\Psi_1(Z) := f_1(Z_1) - Z_2\widetilde{f}_2(Z_1) - h_1(Z_1)\sum_{j=3}^n Z_j\widetilde{f}_j(Z_1), \tag{3.5.4}$$

$$\Psi_2(Z) := f_2(Z_1) + Z_2\widetilde{f}_1(Z_1) - h_2(Z_1)\sum_{j=3}^n Z_j\widetilde{f}_j(Z_1), \tag{3.5.5}$$

$$\Psi_j(Z) := f_j(Z_1) + Z_j, \quad j = 3, \dots, n. \tag{3.5.6}$$

Pokażemy, że Ψ jest biholomorficzne na $\Psi^{-1}(U)$. Po pierwsze, zauważmy, że $\Psi^{-1}(\{z\}) \neq \emptyset$ dla $z \in U$. Rzeczywiście, z Propozycji 3.3.2.4 istnieje (dokładnie jedno) $Z_1 \in V$ takie, że

$$(z - f(Z_1)) \bullet \widetilde{f}(Z_1) = 0. \tag{3.5.7}$$

Liczby $Z_j \in \mathbb{C}$, $j = 3, \dots, n$, są jednoznacznie wyznaczone przez równania

$$Z_j = z_j - f_j(Z_1).$$

Przynajmniej jedna z liczb $\widetilde{f}_1(Z_1), \widetilde{f}_2(Z_1)$, powiedzmy $\widetilde{f}_1(Z_1)$, jest niezerowa. Połóżmy

$$Z_2 := \frac{z_2 - f_2(Z_1) + h_2(Z_1)\sum_{j=3}^n Z_j\widetilde{f}_j(Z_1)}{\widetilde{f}_1(Z_1)}.$$

Wówczas stwierdzamy, że równość

$$z_1 = f_1(Z_1) - Z_2\widetilde{f}_2(Z_1) - h_1(Z_1)\sum_{j=3}^n Z_j\widetilde{f}_j(Z_1)$$

jest równoważna (3.5.7).

Do zakończenia dowodu biholomorficzności Ψ na $\Psi^{-1}(U)$ potrzeba sprawdzenia, że Ψ jest różnowartościowe na $\Psi^{-1}(U)$. Niech punkty Z, W będą takie, że $\Psi(Z) = \Psi(W) =: z \in U$. Obliczamy bezpośrednio, że $Z_1, W_1 \in V$ rozwiązują względem ζ równanie $(z - f(\zeta)) \bullet \widetilde{f}(\zeta) = 0$. Z Propozycji 3.3.2.4 wiemy, że ma dokładnie jedno rozwiązanie, więc $Z_1 = W_1$. Dzięki (3.5.6) mamy $Z_j = W_j$ dla $j = 3, \dots, n$. Ostatecznie, $Z_2 = W_2$ wynika z dowolnego z równań (3.5.4), (3.5.5).

Niech $G := \Psi^{-1}(D)$, $\widetilde{D} := U$, $\widetilde{G} := \Psi^{-1}(U)$, $\Phi := \Psi^{-1}$. Mamy

$$\Psi_j(\zeta, 0, \dots, 0) = f_j(\zeta), \quad j = 1, \dots, n,$$

skąd

$$g(\zeta) := \Phi(f(\zeta)) = (\zeta, 0, \dots, 0), \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Wyrazami macierzy $\Psi'(g(\zeta))$ są

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial Z_1}(g(\zeta)) = f_1'(\zeta), \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial Z_2}(g(\zeta)) = -\widetilde{f}_2(\zeta), \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial Z_j}(g(\zeta)) = -h_1(\zeta)\widetilde{f}_j(\zeta), \quad j \geqslant 3, \tag{3.5.8}$$

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial Z_1}(g(\zeta)) = f_2'(\zeta), \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial Z_2}(g(\zeta)) = \widetilde{f}_1(\zeta), \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial Z_j}(g(\zeta)) = -h_2(\zeta)\widetilde{f}_j(\zeta), \quad j \geqslant 3, \tag{3.5.9}$$

$$\frac{\partial\Psi_k}{\partial Z_1}(g(\zeta)) = f_k'(\zeta), \quad \frac{\partial\Psi_k}{\partial Z_2}(g(\zeta)) = 0, \quad \frac{\partial\Psi_k}{\partial Z_j}(g(\zeta)) = \delta_j^k, \quad j,k \geqslant 3, \tag{3.5.10}$$

gdzie δ_j^k jest deltą Kroneckera. Dlatego

$$\Psi'(g(\zeta))^T\widetilde{f}(\zeta) = (1,0,\ldots,0), \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Weźmy pod uwagę funkcję r definiującą D. Wtedy $r\circ\Psi$ jest funkcją definiującą G. Wobec tego,

$$\begin{aligned}\nu_G(g(\zeta)) = \frac{\nabla(r\circ\Psi)(g(\zeta))}{|\nabla(r\circ\Psi)(g(\zeta))|} &= \frac{\overline{\Psi'(g(\zeta))}^T\nabla r(f(\zeta))}{|\overline{\Psi'(g(\zeta))}^T\nabla r(f(\zeta))|}\\ &= \frac{\overline{\Psi'(g(\zeta))}^T\overline{\frac{\widetilde{f}(\zeta)}{\zeta\rho(\zeta)}}|\nabla r(f(\zeta))|}{\left|\overline{\Psi'(g(\zeta))}^T\overline{\frac{\widetilde{f}(\zeta)}{\zeta\rho(\zeta)}}|\nabla r(f(\zeta))|\right|} = g(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T}.\end{aligned}$$

Pozostało udowodnić ostatni warunek. Mamy pokazać, że

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2(r\circ\Psi)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(g(\zeta))X_j\overline{X}_k > \left|\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2(r\circ\Psi)}{\partial z_j\partial z_k}(g(\zeta))X_jX_k\right| \tag{3.5.11}$$

dla $\zeta \in \mathbb{T}$, $X \in (\mathbb{C}^n)_*$ takich, że

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(r\circ\Psi)}{\partial z_j}(g(\zeta))X_j = 0,$$

tj. $X_1 = 0$. Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2(r\circ\Psi)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(g(\zeta))X_j\overline{X}_k &= \sum_{j,k,s,t=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_s\partial\overline{z}_t}(f(\zeta))\frac{\partial\Psi_s}{\partial z_j}(g(\zeta))\overline{\frac{\partial\Psi_t}{\partial z_k}(g(\zeta))}X_j\overline{X}_k\\ &= \sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_s\partial\overline{z}_t}(f(\zeta))Y_s\overline{Y}_t,\end{aligned}$$

gdzie

$$Y := \Psi'(g(\zeta))X \neq 0.$$

Zauważmy, że

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_s}(f(\zeta))Y_s = \sum_{j,s=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_s}(f(\zeta))\frac{\partial \Psi_s}{\partial z_j}(g(\zeta))X_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (r\circ\Psi)}{\partial z_j}(g(\zeta))X_j = 0.$$

Wobec tego,

$$\sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_s \partial \overline{z}_t}(f(\zeta))Y_s\overline{Y}_t > \left|\sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_s \partial z_t}(f(\zeta))Y_sY_t\right|.$$

Aby zakończyć dowód, liczymy

$$\left|\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (r\circ\Psi)}{\partial z_j \partial z_k}(g(\zeta))X_jX_k\right|$$

$$= \left|\sum_{j,k,s,t=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_s \partial z_t}(f(\zeta))\frac{\partial \Psi_s}{\partial z_j}(g(\zeta))\frac{\partial \Psi_t}{\partial z_k}(g(\zeta))X_jX_k + \sum_{j,k,s=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_s}(f(\zeta))\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial z_j \partial z_k}(g(\zeta))X_jX_k\right|$$

$$= \left|\sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_s \partial z_t}(f(\zeta))Y_sY_t + \sum_{j,k=2}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_s}(f(\zeta))\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial z_j \partial z_k}(g(\zeta))X_jX_k\right|$$

oraz

$$\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial z_j \partial z_k}(g(\zeta)) = 0, \quad j,k \geqslant 2,\ s \geqslant 1,$$

co daje (3.5.11). □

Lemat 3.5.1.2. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym, a $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ (słabym) odwzorowaniem stacjonarnym takim, że ∂D jest $\mathbb{R}$-analityczny w otoczeniu $f(\mathbb{T})$. Załóżmy, że U jest otoczeniem $f(\overline{\mathbb{D}})$, odwzorowanie $\Theta : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ biholomorfizmem na obraz i zbiór $D \cap U$ jest spójny. Wtedy $\Theta \circ f$ jest (słabym) odwzorowaniem stacjonarnym w $G := \Theta(D \cap U)$.*

W szczególności, jeżeli U_1, U_2 są otoczeniami domknięć obszarów D_1, D_2 z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi, a $\Theta : U_1 \longrightarrow U_2$ biholomorfizmem takim, że $\Theta(D_1) = D_2$, to Θ przekształca (słabe) odwzorowania stacjonarne w D_1 w (słabe) odwzorowania stacjonarne w D_2.

Dowód. Jest oczywiste, że pierwsze dwa warunki z definicji (słabego) odwzorowania stacjonarnego są zachowane przez Θ. Aby pokazać trzeci, postępujemy podobnie jak w równaniach (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3). Niech $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ będzie (słabym) odwzorowaniem stacjonarnym. Kandydatami na odwzorowania w warunku (c) (odp. (c′)) Definicji 3.1.17 dla $\Theta \circ f$ w obszarze G są

$$((\Theta' \circ f)^{-1})^T \widetilde{f}, \quad \rho\frac{|((\Theta' \circ f)^{-1})^T \overline{\nabla r \circ f}|}{|\nabla r \circ f|}.$$

Faktycznie, dla $\zeta \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\overline{\nu_G(\Theta(f(\zeta)))} = \frac{\overline{\nabla(r\circ\Theta^{-1})(\Theta(f(\zeta)))}}{|\nabla(r\circ\Theta^{-1})(\Theta(f(\zeta)))|} = \frac{[(\Theta^{-1})'(\Theta(f(\zeta)))]^T\overline{\nabla r(f(\zeta))}}{|[(\Theta^{-1})'(\Theta(f(\zeta)))]^T\overline{\nabla r(f(\zeta))}|}$$
$$= \frac{(\Theta'(f(\zeta))^{-1})^T\overline{\nabla r(f(\zeta))}}{|(\Theta'(f(\zeta))^{-1})^T\overline{\nabla r(f(\zeta))}|}.$$

Stąd

$$\zeta\rho(\zeta)\frac{|(\Theta'(f(\zeta))^{-1})^T\overline{\nabla r(f(\zeta))}|}{|\nabla r(f(\zeta))|}\overline{\nu_G(\Theta(f(\zeta)))}$$
$$= \zeta\rho(\zeta)(\Theta'(f(\zeta))^{-1})^T\overline{\nu_D(f(\zeta))} = (\Theta'(f(\zeta))^{-1})^T\widetilde{f}(\zeta).$$

□

3.5.2. Sytuacja (†). Rozważmy następującą sytuację, oznaczoną (†) (z danymi D_0 i U_0):

- D_0 jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$,
- $f_0 : \overline{\mathbb{D}} \ni \zeta \longmapsto (\zeta, 0, \dots, 0) \in \overline{D}_0$,
- $f_0(\mathbb{D}) \subset D_0$,
- $f_0(\mathbb{T}) \subset \partial D_0$,
- $\nu_{D_0}(f_0(\zeta)) = (\zeta, 0, \dots, 0)$, $\zeta \in \mathbb{T}$,
- $f_0(\zeta)$ jest punktem silnej liniowej wypukłości D_0, $\zeta \in \mathbb{T}$,
- ∂D_0 jest $\mathbb{R}$-analityczny w otoczeniu U_0 zbioru $f_0(\mathbb{T})$ z funkcją r_0,
- $|\nabla r_0| = 1$ na $f_0(\mathbb{T})$ (w szczególności, $r_{0z}(f_0(\zeta)) = (\overline{\zeta}/2, 0, \dots, 0)$, $\zeta \in \mathbb{T}$).

Skoro r_0 jest $\mathbb{R}$-analityczne na $U_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$, rozszerza się w naturalny sposób do funkcji holomorficznej w otoczeniu $U_0^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{2n}$ zbioru U_0. Bez straty ogólności możemy założyć, że r_0 jest ograniczone na $U_0^{\mathbb{C}}$. Kładziemy

$$X_0 = X_0(U_0, U_0^{\mathbb{C}}) := \{r \in \mathcal{O}(U_0^{\mathbb{C}}) : r(U_0) \subset \mathbb{R} \text{ i } r \text{ jest ograniczone}\},$$

co wyposażone w normę supremum jest rzeczywistą przestrzenią Banacha.

L. Lempert rozważał przypadek, gdy U_0 jest otoczeniem brzegu ograniczonego obszaru D_0 z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym. My dostaniemy ogólniejsze wyniki, dzięki którym udowodnimy lokalizację.

3.5.3. Ogólne lematy. Zachowujemy notację z Podsekcji 3.5.2 i zakładamy sytuację (†).

Wprowadzimy dodatkowe obiekty, którymi będziemy się zajmować i pokażemy ogólniejsze lematy (ich ogólność przyda się z następnej sekcji).

Rozważmy przestrzeń Sobolewa $W^{2,2}(\mathbb{T}) = W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ odwzorowań $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^m$, których pierwsze dwie pochodne w sensie dystrybucyjnym są w $L^2(\mathbb{T})$. Norma $W^{2,2}$ jest oznaczana $\|\cdot\|_W$. Podstawowe własności $W^{2,2}(\mathbb{T})$ opisano w Dodatku.

Połóżmy

$$B := \{f \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n) : f \text{ rozszerza się holomorficznie na } \mathbb{D} \text{ i } f(0) = 0\},$$

$$B_0 := \{f \in B : f(\mathbb{T}) \subset U_0\}, \qquad B^* := \{\overline{f} : f \in B\},$$
$$Q := \{q \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) : q(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}\}, \quad Q_0 := \{q \in Q : q(1) = 0\}.$$

Jest jasne, że B, B^*, Q i Q_0 wyposażone w normę $\|\cdot\|_W$ są rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, natomiast B_0 jest otoczeniem f_0. Odtąd utożsamiamy $f \in B$ z jego jedynym holomorficznym rozszerzeniem na $\mathbb{D}$.

Definiujemy rzutowanie

$$\pi : W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n) \ni f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k \longmapsto \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \zeta^k \in B^*.$$

Zauważmy, że $f \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$ rozszerza się holomorficznie na $\mathbb{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi(f) = 0$ (i w tej sytuacji rozszerzenie jest klasy $\mathcal{C}^{1/2}$ na $\mathbb{T}$). Rzeczywiscie, wystarczy stwierdzić, że $g(\zeta) := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \zeta^k$, $\zeta \in \mathbb{T}$, rozszerza się holomorficznie na $\mathbb{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = 0$ dla $k < 0$. Wynika to z faktu, że odwzorowanie $\mathbb{T} \ni \zeta \longmapsto g(\overline{\zeta}) \in \mathbb{C}^n$ rozszerza się holomorficznie na $\mathbb{D}$.

Weźmy pod uwagę odwzorowanie $\Xi : X_0 \times \mathbb{C}^n \times B_0 \times Q_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow Q \times B^* \times \mathbb{C}^n$ określone wzorem

$$\Xi(r, v, f, q, \lambda) := (r \circ f, \pi(\zeta(1 + q)(r_z \circ f)), f'(0) - \lambda v),$$

gdzie ζ jest traktowane jako funkcja identycznościowa na $\mathbb{T}$.

Lemat 3.5.3.1. *Istnieje otoczenie V_0 punktu $(r_0, f_0'(0))$ w $X_0 \times \mathbb{C}^n$ i odwzorowanie $\mathbb{R}$-analityczne $\Upsilon : V_0 \longrightarrow B_0 \times Q_0 \times \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $(r, v) \in V_0$ zachodzi $\Xi(r, v, \Upsilon(r, v)) = 0$.*

Definiujemy też $\widetilde{\Xi} : X_0 \times \mathbb{C}^n \times B_0 \times Q_0 \times (0, 1) \longrightarrow Q \times B^* \times \mathbb{C}^n$ jako

$$\widetilde{\Xi}(r, w, f, q, \xi) := (r \circ f, \pi(\zeta(1 + q)(r_z \circ f)), f(\xi) - w).$$

Analogicznie mamy

Lemat 3.5.3.2. *Niech $\xi_0 \in (0, 1)$. Wtedy istnieje otoczenie W_0 punktu $(r_0, f_0(\xi_0))$ w $X_0 \times D_0$ i odwzorowanie $\mathbb{R}$-analityczne $\widetilde{\Upsilon} : W_0 \longrightarrow B_0 \times Q_0 \times (0, 1)$ takie, że dla dowolnego $(r, w) \in W_0$ mamy $\widetilde{\Xi}(r, w, \widetilde{\Upsilon}(r, w)) = 0$.*

Dowód Lematów 3.5.3.1 i 3.5.3.2. Udowodnimy pierwszy lemat, a następnie stwierdzimy, że dowód drugiego sprowadza się do poprzedniego dowodu.

Twierdzimy, że Ξ jest $\mathbb{R}$-analityczne. Jedynym problemem jest pokazanie, że odwzorowanie

$$T : X_0 \times B_0 \ni (r, f) \longmapsto r \circ f \in Q$$

jest $\mathbb{R}$-analityczne (wynikłaby stąd $\mathbb{R}$-analityczność odwzorowania $X_0 \times B_0 \ni (r, f) \longmapsto r_z \circ f \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$).

Ustalmy $r \in X_0$, $f \in B_0$ i dobierzmy $\varepsilon > 0$ taki, że $P_{2n}(f(\zeta), \varepsilon) \subset U_0^{\mathbb{C}}$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Wtedy dowolna funkcja $\widetilde{r} \in X_0$ jest holomorficzna w $U_0^{\mathbb{C}}$, więc rozwija się w holomorficzny szereg potęgowy zbieżny w $P_{2n}(f(\zeta), \varepsilon)$. Nie tracąc ogólności można założyć, że $P_n(f(\zeta),\varepsilon) \subset U_0$, $\zeta \in \mathbb{T}$. To daje rozwinięcie funkcji $\widetilde{r}$ w każdym punkcie $f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$, w szereg

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}\widetilde{r}}{\partial x^\alpha}(f(\zeta))x^\alpha$$

zbieżny do $\widetilde{r}(f(\zeta)+x)$, o ile $x=(x_1,\ldots,x_{2n}) \in P_n(0,\varepsilon)$. Stąd

$$T(r+\varrho, f+h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|}r}{\partial x^\alpha} \circ f \right) h^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|}\varrho}{\partial x^\alpha} \circ f \right) h^\alpha \tag{3.5.12}$$

punktowo dla $\varrho \in X_0$ i $h \in W^{2,2}(\mathbb{T},\mathbb{C}^n)$ takich, że $\|h\|_{\mathbb{T}} < \varepsilon$.

Połóżmy $P := \bigcup_{\zeta \in \mathbb{T}} P_{2n}(f(\zeta),\varepsilon)$. Niech $\widetilde{r} \in X_0$ będzie równe r albo ϱ, gdzie ϱ leży w otoczeniu 0 w X_0. Z nierówności Cauchy'ego mamy

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}\widetilde{r}}{\partial x^\alpha}(f(\zeta)) \right| \leqslant \frac{\alpha!\|\widetilde{r}\|_P}{\varepsilon^{|\alpha|}}, \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{3.5.13}$$

Wobec tego,

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|}\widetilde{r}}{\partial x^\alpha} \circ f \right\|_W \leqslant C_1 \frac{\alpha!\|\widetilde{r}\|_P}{\varepsilon^{|\alpha|}}$$

dla pewnego $C_1 > 0$.

Znajdziemy $C_2 > 0$ takie, że

$$\|gh^\alpha\|_W \leqslant C_2^{|\alpha|+1}\|g\|_W \|h_1\|_W^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \|h_{2n}\|_W^{\alpha_{2n}}$$

dla $g \in W^{2,2}(\mathbb{T},\mathbb{C})$, $h \in W^{2,2}(\mathbb{T},\mathbb{C}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}$ (zob. Dodatek). Używając powyższych nierówności wnosimy, że

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}} \left\| \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|}\widetilde{r}}{\partial x^\alpha} \circ f \right) h^\alpha \right\|_W$$

jest zbieżny, gdy h jest małe w normie $\|\cdot\|_W$. Zatem szereg (3.5.12) jest bezwzględnie zbieżny w $\|\cdot\|_W$, skąd T jest $\mathbb{R}$-analityczne.

Aby pokazać istnienie V_0 i Υ skorzystamy z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Precyzyjnie mówiąc, pokażemy, że pochodna cząstkowa

$$\Xi_{(f,q,\lambda)}(r_0, f_0'(0), f_0, 0, 1) : B \times Q_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow Q \times B^* \times \mathbb{C}^n$$

jest izomorfizmem. Dla $(\widetilde{f},\widetilde{q},\widetilde{\lambda}) \in B \times Q_0 \times \mathbb{R}$ mamy

$$\Xi_{(f,q,\lambda)}(r_0, f_0'(0), f_0, 0, 1)(\widetilde{f},\widetilde{q},\widetilde{\lambda}) = \frac{d}{dt}\Xi(r_0, f_0'(0), f_0 + t\widetilde{f}, t\widetilde{q}, 1+t\widetilde{\lambda})\Big|_{t=0}$$
$$= ((r_{0z}\circ f_0)\widetilde{f} + (r_{0\overline{z}}\circ f_0)\overline{\widetilde{f}}, \pi(\zeta\widetilde{q}r_{0z}\circ f_0 + \zeta(r_{0zz}\circ f_0)\widetilde{f} + \zeta(r_{0z\overline{z}}\circ f_0)\overline{\widetilde{f}}), \widetilde{f}'(0) - \widetilde{\lambda}f_0'(0)),$$

gdzie traktujemy $r_{0z}, r_{0\overline{z}}$ jako wektory poziome, $\widetilde{f}, \overline{\widetilde{f}}$ jako wektory pionowe, a $r_{0zz} = \left[\frac{\partial^2 r_0}{\partial z_j \partial z_k}\right]_{j,k=1}^n$, $r_{0z\overline{z}} = \left[\frac{\partial^2 r_0}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right]_{j,k=1}^n$ jako macierze $n \times n$.

Na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej, wystarczy dowieść, że odwzorowanie $\Xi_{(f,q,\lambda)}(r_0, f_0'(0), f_0, 0, 1)$ jest bijekcją, tzn. dla każdego $(\eta, \varphi, v) \in Q \times B^* \times \mathbb{C}^n$ istnieje dokładnie jedno $(\widetilde{f}, \widetilde{q}, \widetilde{\lambda}) \in B \times Q_0 \times \mathbb{R}$ spełniające

$$(r_{0z} \circ f_0)\widetilde{f} + (r_{0\overline{z}} \circ f_0)\overline{\widetilde{f}} = \eta, \tag{3.5.14}$$

$$\pi(\zeta\widetilde{q}r_{0z} \circ f_0 + \zeta(r_{0zz} \circ f_0)\widetilde{f} + \zeta(r_{0z\overline{z}} \circ f_0)\overline{\widetilde{f}}) = \varphi, \tag{3.5.15}$$

$$\widetilde{f}'(0) - \widetilde{\lambda}f_0'(0) = v. \tag{3.5.16}$$

Po pierwsze, pokażemy, że $\widetilde{\lambda}$ i $\widetilde{f}_1$ są jednoznacznie wyznaczone. Zauważmy, że dzięki założeniom, (3.5.14) przekształca się na

$$\frac{1}{2}\overline{\zeta}\widetilde{f}_1 + \frac{1}{2}\zeta\overline{\widetilde{f}_1} = \eta,$$

czyli

$$\operatorname{Re}(\widetilde{f}_1/\zeta) = \eta. \tag{3.5.17}$$

Równanie (3.5.17) wyznacza $\widetilde{f}_1/\zeta \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ z dokładnością do urojonej stałej addytywnej, co można przeliczyć używając (3.5.16). Faktycznie, $\eta = \operatorname{Re} G$ na $\mathbb{T}$ dla pewnej funkcji $G \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Aby to zobaczyć, rozwijamy $\eta(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\zeta^k$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Z równości $\eta(\zeta) = \overline{\eta(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbb{T}$, otrzymujemy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\zeta^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a}_k\zeta^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a}_{-k}\zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{T}, \tag{3.5.18}$$

więc $a_{-k} = \overline{a}_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dalej,

$$\eta(\zeta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}(a_k\zeta^k) = \operatorname{Re}\left(a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\zeta^k\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Kładziemy

$$G(\zeta) := a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Szereg jest zbieżny dla $\zeta \in \mathbb{D}$, a stąd $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Ponadto, G rozszerza się na $\overline{\mathbb{D}}$ (do funkcji oznaczanej tą samą literą) i leży w $W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Mamy $\eta = \operatorname{Re} G$ na $\mathbb{T}$.

Poszukujemy $C \in \mathbb{R}$ takiego, że funkcje $\widetilde{f}_1 := \zeta(G + iC)$ oraz $\theta := \operatorname{Im}(\widetilde{f}_1/\zeta)$ spełniają

$$\eta(0) + i\theta(0) = \widetilde{f}_1'(0),$$

$$\eta(0) + i\theta(0) - \widetilde{\lambda}\operatorname{Re} f_{01}'(0) - i\widetilde{\lambda}\operatorname{Im} f_{01}'(0) = \operatorname{Re} v_1 + i\operatorname{Im} v_1.$$

Stąd

$$\eta(0) - \widetilde{\lambda}\operatorname{Re} f_{01}'(0) = \operatorname{Re} v_1,$$

co wyznacza $\widetilde{\lambda}$, a następnie $\theta(0)$, w konsekwencji C. Mając $\widetilde{\lambda}$ i ponownie korzystając z (3.5.16), znajdujemy jednoznacznie wyznaczone $\widetilde{f}_2'(0), \ldots, \widetilde{f}_n'(0)$.

Wobec tego, równania (3.5.14) i (3.5.16) zachodzą dla jednoznacznie wyznaczonych $\widetilde{f}_1$, $\widetilde{\lambda}$ oraz $\widetilde{f}_2'(0), \ldots, \widetilde{f}_n'(0)$.

Rozważmy (3.5.15), co jest układem n równań z niewiadomymi $\widetilde{q}, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_n$. Zauważmy, że $\widetilde{q}$ pojawia się tylko w pierwszym z równań, natomiast pozostałe znaczą dokładnie, że odwzorowanie

$$\zeta(r_{0\widehat{z}\widehat{z}} \circ f_0)\widehat{\widetilde{f}} + \zeta(r_{0\widehat{z}\overline{\widehat{z}}} \circ f_0)\overline{\widehat{\widetilde{f}}} - \psi \tag{3.5.19}$$

rozszerza się holomorficznie na $\mathbb{D}$, gdzie $\widehat{z} := (z_2, \ldots, z_n)$, $z \in \mathbb{C}^n$, a odwzorowanie $\psi \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1})$ można dostać z φ i $\widetilde{f}_1$. Rzeczywiście, napiszmy (3.5.15) w postaci

$$\pi(F_1 + \zeta F_2 + \zeta F_3) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
F_1 &:= (\widetilde{q}, 0, \ldots, 0),\\
F_2 &:= (A_j)_{j=1}^n, \quad A_j := \sum_{k=1}^n (r_{0z_jz_k} \circ f_0)\widetilde{f}_k,\\
F_3 &:= (B_j)_{j=1}^n, \quad B_j := \sum_{k=1}^n (r_{0z_j\overline{z}_k} \circ f_0)\overline{\widetilde{f}_k}.
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\widetilde{q} + \zeta A_1 + \zeta B_1 - \varphi_1$$

oraz

$$\zeta A_j + \zeta B_j - \varphi_j, \quad j = 2, \ldots, n,$$

mają się rozszerzać holomorficznie na $\mathbb{D}$, natomiast

$$\psi := \left(\varphi_j - \zeta(r_{0z_jz_1} \circ f_0)\widetilde{f}_1 - \zeta(r_{0z_j\overline{z}_1} \circ f_0)\overline{\widetilde{f}_1}\right)_{j=2}^n.$$

Połóżmy

$$g(\zeta) := \widehat{\widetilde{f}}(\zeta)/\zeta, \quad \alpha(\zeta) := \zeta^2 r_{0\widehat{z}\widehat{z}}(f_0(\zeta)), \quad \beta(\zeta) := r_{0\widehat{z}\overline{\widehat{z}}}(f_0(\zeta)).$$

Łatwo zaobserwować, że $\alpha(\zeta)$ i $\beta(\zeta)$ są macierzami $(n-1) \times (n-1)$ zależącymi $\mathbb{R}$-analitycznie od ζ, natomiast $g(\zeta)$ jest pionowym wektorem w $\mathbb{C}^{n-1}$. To pozwala nam sprowadzić (3.5.19) do następującego problemu: mamy znaleźć jedyne $g \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ takie, że

$$\alpha g + \beta\overline{g} - \psi \text{ rozszerza się holomorficznie na } \mathbb{D} \text{ i } g(0) = \widehat{\widetilde{f}}'(0). \tag{3.5.20}$$

Fakt, że $f_0(\zeta)$ jest punktem silnej liniowej wypukłości D_0, może być przeformułowany jako

$$|X^T\alpha(\zeta)X| < X^T\beta(\zeta)\overline{X}, \quad \zeta \in \mathbb{T},\ X \in (\mathbb{C}^{n-1})_*. \tag{3.5.21}$$

Zauważmy, że $\beta(\zeta)$ jest samosprzężone i silnie dodatnie, więc z Propozycji 4.6.3 dostajemy odwzorowanie $H \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)})$ takie, że $\det H \neq 0$ na $\overline{\mathbb{D}}$ oraz $HH^* = \beta$ na $\mathbb{T}$. Wobec tego, (3.5.20) jest równoważne własności

$$H^{-1}\alpha g + H^*\overline{g} - H^{-1}\psi \text{ rozszerza się holomorficznie na } \mathbb{D} \tag{3.5.22}$$

lub, jeśli oznaczymy $h := H^T g$, $\gamma := H^{-1}\alpha(H^T)^{-1}$,

$$\gamma h + \overline{h} - H^{-1}\psi \text{ rozszerza się holomorficznie na } \mathbb{D}. \tag{3.5.23}$$

Oszacujemy normę operatorową macierzy symetrycznej $\gamma(\zeta)$. Z (3.5.21) mamy dla $\zeta \in \mathbb{T}$ i jednostkowego wektora $X \in \mathbb{C}^{n-1}$

$$\begin{aligned}|X^T\gamma(\zeta)X| &= |X^T H(\zeta)^{-1}\alpha(\zeta)(H(\zeta)^T)^{-1}X| \\ &< X^T H(\zeta)^{-1}\beta(\zeta)\overline{(H(\zeta)^T)^{-1}X} \\ &= X^T H(\zeta)^{-1}H(\zeta)H(\zeta)^*\overline{(H(\zeta)^T)^{-1}X} \\ &= |X|^2 = 1,\end{aligned}$$

skąd wynika, że $|X^T\gamma(\zeta)X| \leqslant 1 - \widetilde{\varepsilon}$ dla pewnego $\widetilde{\varepsilon} > 0$ niezależnego od ζ i X. Na mocy Propozycji 4.6.5 (Dodatek) otrzymujemy

$$\|\gamma(\zeta)\| \leqslant 1 - \widetilde{\varepsilon}, \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{3.5.24}$$

Mamy udowodnić, że istnieje jedyne $h \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ spełniające (3.5.23) takie, że $h(0) = a$ z danym $a \in \mathbb{C}^{n-1}$. Definiujemy operator

$$P : W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \ni \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\zeta^k \longmapsto \overline{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k\zeta^k} \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}),$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}^{n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pokażemy, że $h \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ spełnia (3.5.23) i $h(0) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest punktem stałym odwzorowania

$$K : W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \ni h \longmapsto P(H^{-1}\psi - \gamma h) + a \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}).$$

Rozwińmy

$$\begin{aligned}h &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\zeta^k + h(0), \\ \overline{h} &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_k\zeta^{-k} + \overline{h(0)}, \\ P(\overline{h}) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\zeta^k = h - h(0).\end{aligned}$$

Ponadto, $K(\cdot)(0) = a$. Wobec tego, warunek (3.5.23) i $h(0) = a$ jest równoważny kolejno warunkom

$$\begin{aligned}&K(h)(0) = h(0), \quad P(\gamma h + \overline{h} - H^{-1}\psi) = 0; \\ &K(h)(0) = h(0), \quad P(H^{-1}\psi - \gamma h) = P(\overline{h}) = h - h(0); \\ &K(h)(0) = h(0), \quad K(h) = h - h(0) + K(h)(0); \\ &K(h) = h.\end{aligned}$$

Skorzystamy z twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Aby to uczynić, rozważmy przestrzeń $W^{2,2}(\mathbb{T},\mathbb{C}^{n-1})$ wyposażoną w normę

$$\|h\|_{\varepsilon} := \|h\|_L + \varepsilon\|h'\|_L + \varepsilon^2\|h''\|_L,$$

gdzie $\varepsilon > 0$ i $\|\cdot\|_L$ jest normą L^2 (jest to rzeczywista przestrzeń Banacha). Dowiedziemy, że K jest kontrakcją względem $\|\cdot\|_{\varepsilon}$ dla małych $\varepsilon > 0$. Faktycznie, mamy dla dowolnych $h_1, h_2 \in W^{2,2}(\mathbb{T},\mathbb{C}^{n-1})$ (dzięki (3.5.24))

$$\|K(h_1) - K(h_2)\|_L = \|P(\gamma(h_2 - h_1))\|_L \leqslant \|\gamma(h_2 - h_1)\|_L \leqslant (1 - \widetilde{\varepsilon})\|h_2 - h_1\|_L, \tag{3.5.25}$$

$$\begin{aligned}\|K(h_1)' - K(h_2)'\|_L &= \|P(\gamma h_2)' - P(\gamma h_1)'\|_L \\ &\leqslant \|(\gamma h_2)' - (\gamma h_1)'\|_L = \|\gamma'(h_2 - h_1) + \gamma(h_2' - h_1')\|_L,\end{aligned} \tag{3.5.26}$$

$$\|K(h_1)'' - K(h_2)''\|_L \leqslant \|\gamma''(h_2 - h_1)\|_L + 2\|\gamma'(h_2' - h_1')\|_L + \|\gamma(h_1'' - h_2'')\|_L. \tag{3.5.27}$$

Używając skończoności $\|\gamma'\|$, $\|\gamma''\|$ i składając razem (3.5.25), (3.5.26), (3.5.27), dostajemy żądaną kontraktywność.

Znaleźliśmy $\widetilde{f}$ i $\widetilde{\lambda}$ spełniające (3.5.14) i (3.5.16). Zachodzi też $n-1$ ostatnich równań z (3.5.15). Pozostało do pokazania, że istnieje dokładnie jedno $\widetilde{q} \in Q_0$ takie, że $\widetilde{q} + \zeta A_1 + \zeta B_1 - \varphi_1$ rozszerza się holomorficznie na $\mathbb{D}$.

Porównując współczynniki, widzimy, że jeżeli

$$\pi(\zeta A_1 + \zeta B_1 - \varphi_1) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k\zeta^k,$$

to $\widetilde{q}$ musi być równe

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k\zeta^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^k$$

z $b_k := \overline{a}_{-k}$ dla $k \geqslant 1$ i $b_0 \in \mathbb{R}$ jednoznacznie wyznaczonym przez $\widetilde{q}(1) = 0$.

Pokażemy teraz, że dowód drugiego lematu wynika z dowodu pierwszego. Ponieważ $\widetilde{\Xi}$ jest $\mathbb{R}$-analityczne, wystarczy dowieść, że pochodna

$$\widetilde{\Xi}_{(f,q,\xi)}(r_0, f_0(\xi_0), f_0, 0, \xi_0) : B \times Q_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow Q \times B^* \times \mathbb{C}^n$$

jest odwracalna. Dla $(\widetilde{f}, \widetilde{q}, \widetilde{\xi}) \in B \times Q_0 \times \mathbb{R}$ dostajemy

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Xi}_{(f,q,\xi)}(r_0, f_0(\xi_0), f_0, 0, \xi_0)(\widetilde{f}, \widetilde{q}, \widetilde{\xi}) = \frac{d}{dt}\widetilde{\Xi}(r_0, f_0(\xi_0), f_0 + t\widetilde{f}, t\widetilde{q}, \xi_0 + t\widetilde{\xi})\Big|_{t=0} \\ &= ((r_{0z}\circ f_0)\widetilde{f} + (r_{0\overline{z}}\circ f_0)\overline{\widetilde{f}}, \pi(\zeta\widetilde{q}r_{0z}\circ f_0 + \zeta(r_{0zz}\circ f_0)\widetilde{f} + \zeta(r_{0z\overline{z}}\circ f_0)\overline{\widetilde{f}}), \widetilde{f}(\xi_0) + \widetilde{\xi}f_0'(\xi_0)).\end{aligned}$$

Mamy udowodnić, że dla każdego $(\eta, \varphi, w) \in Q \times B^* \times \mathbb{C}^n$ istnieje dokładnie jedno $(\widetilde{f}, \widetilde{q}, \widetilde{\xi}) \in B \times Q_0 \times \mathbb{R}$ takie, że

$$(r_{0z} \circ f_0)\widetilde{f} + (r_{0\bar{z}} \circ f_0)\overline{\widetilde{f}} = \eta, \tag{3.5.28}$$

$$\pi(\zeta\widetilde{q}r_{0z} \circ f_0 + \zeta(r_{0zz} \circ f_0)\widetilde{f} + \zeta(r_{0z\bar{z}} \circ f_0)\overline{\widetilde{f}}) = \varphi, \tag{3.5.29}$$

$$\widetilde{f}(\xi_0) + \widetilde{\xi} f_0'(\xi_0) = w. \tag{3.5.30}$$

Równanie (3.5.28) to tak jak wcześniej

$$\mathrm{Re}(\widetilde{f}_1/\zeta) = \eta. \tag{3.5.31}$$

Wyznacza ono $\widetilde{f}_1/\zeta \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ z dokładnością do urojonej stałej addytywnej, co można obliczyć używając (3.5.30). Istnieje bowiem $G \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ takie, że $\eta = \mathrm{Re}\, G$ na $\mathbb{T}$. Szukamy $C \in \mathbb{R}$ takiego, że funkcje $\widetilde{f}_1 := \zeta(G + iC)$ i $\theta := \mathrm{Im}(\widetilde{f}_1/\zeta)$ spełniają

$$\xi_0\eta(\xi_0) + i\xi_0\theta(\xi_0) = \widetilde{f}_1(\xi_0),$$

$$\xi_0(\eta(\xi_0) + i\theta(\xi_0)) + \widetilde{\xi}\,\mathrm{Re}\, f_{01}'(\xi_0) + i\widetilde{\xi}\,\mathrm{Im}\, f_{01}'(\xi_0) = \mathrm{Re}\, w_1 + i\,\mathrm{Im}\, w_1.$$

Sprowadza się to do równania

$$\xi_0\eta(\xi_0) + \widetilde{\xi}\,\mathrm{Re}\, f_{01}'(\xi_0) = \mathrm{Re}\, w_1,$$

które wyznacza $\widetilde{\xi}$, $\theta(\xi_0)$ i C. Mając $\widetilde{\xi}$ i znów używając (3.5.30), znajdujemy jednoznacznie wyznaczone $\widetilde{f}_2(\xi_0), \dots, \widetilde{f}_n(\xi_0)$.

Zatem równania (3.5.28) i (3.5.30) są spełnione przez jednoznacznie wyznaczone $\widetilde{f}_1$, $\widetilde{\xi}$ oraz $\widetilde{f}_2(\xi_0), \dots, \widetilde{f}_n(\xi_0)$.

W pozostałej części dowodu zmieniamy drugi warunek w (3.5.20) na

$$g(\xi_0) = \widetilde{\widetilde{f}}(\xi_0)/\xi_0.$$

Mamy dowieść, że istnieje jedyne $h \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ spełniające (3.5.23), takie, że $h(\xi_0) = a$ dla danego $a \in \mathbb{C}^{n-1}$. Niech $\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$ spełnia $\tau(0) = \xi_0$, a odwzorowania P i K będą jak wcześniej. Wówczas odwzorowanie $h \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ spełnia (3.5.23) i $h(\xi_0) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h \circ \tau \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ spełnia (3.5.23) i $(h \circ \tau)(0) = a$. Wiemy już, że istnieje dokładnie jedno $\widetilde{h} \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{n-1}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ spełniające (3.5.23) i $\widetilde{h}(0) = a$. Kładąc $h := \widetilde{h} \circ \tau^{-1}$, otrzymujemy tezę. $\square$

3.5.4. Topologia w zbiorze obszarów. Wprowadzamy pojęcie obszaru będącego blisko pewnego innego obszaru. Niech $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym. Wówczas znajdzie się otoczenie U_0 zbioru ∂D_0 i funkcja $\mathbb{R}$-analityczna $r_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiująca D_0.

Definicja 3.5.4.1. Mówimy, że obszary D dążą do D_0, jeżeli można wybrać ich funkcje definiujące r tak, że funkcje r zbiegają do r_0 w X_0.

Uwaga 3.5.4.2. Jeśli $r \in X_0$ jest blisko r_0 względem topologii w X_0, to zbiór $\{z \in U_0 : r(z) = 0\}$ jest zwartą hiperpowierzchnią $\mathbb{R}$-analityczną, która wyznacza obszar ograniczony. Oznaczamy go D^r.

Ponadto, gdy D^{r_0} jest ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym, to D^r też taki jest, o ile r jest blisko r_0.

3.5.5. Główne wyniki tej sekcji. Potrzebujemy jeszcze dwóch lematów.

Lemat 3.5.5.1. *Niech D^r będzie obszarem silnie liniowo wypukłym, ograniczonym przez $\mathbb{R}$-analityczną hiperpowierzchnię $\{z \in U_0 : r(z) = 0\}$. Ustalmy $\xi \in (0,1)$ i $w \in (\mathbb{C}^n)_*$. Wówczas odwzorowanie $f \in B_0$ spełnia warunki*

$$f \text{ jest słabym odwzorowaniem stacjonarnym w } D^r,\ f(0) = 0,\ f(\xi) = w$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $q \in Q_0$ takie, że $q > -1$ i $\widetilde{\Xi}(r, w, f, q, \xi) = 0$.

Lemat 3.5.5.2. *Niech D^r będzie obszarem silnie liniowo wypukłym, ograniczonym przez $\mathbb{R}$-analityczną hiperpowierzchnię $\{z \in U_0 : r(z) = 0\}$. Ustalmy $v \in (\mathbb{C}^n)_*$ i $\lambda > 0$. Wówczas odwzorowanie $f \in B_0$ spełnia warunki*

$$f \text{ jest słabym odwzorowaniem stacjonarnym w } D^r,\ f(0) = 0,\ f'(0) = \lambda v$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $q \in Q_0$ takie, że $q > -1$ i $\Xi(r, v, f, q, \lambda) = 0$.

Dowód Lematów 3.5.5.1 i 3.5.5.2. Z równania $\widetilde{\Xi}(r, w, f, q, \xi) = 0$ (odp. $\Xi(r, v, f, q, \lambda) = 0$) wnosimy, że $r \circ f = 0$ na $\mathbb{T}$, $f(\xi) = w$ (odp. $f'(0) = \lambda v$) oraz $\pi(\zeta(1 + q)(r_z \circ f)) = 0$. Pierwsza równość daje $f(\mathbb{T}) \subset \partial D^r$. Z trzeciej wynika, że warunek (c') Definicji 3.1.17 jest spełniony z $\rho := (1 + q)|r_z \circ f|$.

Twierdzimy, że zbiór $\overline{D^r}$ jest *wielomianowo wypukły*. Oznacza to, że $\widehat{\overline{D^r}} = \overline{D^r}$, gdzie

$$\widehat{K} := \{z \in \mathbb{C}^k : |P(z)| \leqslant \|P\|_K \text{ dla każdego wielomianu } P \in \mathbb{C}[z]\}$$

jest *otoczką wielomianową* zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}^k$. Istotnie, z liniowej wypukłości i gładkości obszaru D^r wynika, że jest on $\mathbb{C}$-*wypukły* [**APS04**, Corollary 2.5.6], tzn. przecięcia D^r z prostymi zespolonymi są spójne i jednospójne. Wobec tego, jego domknięcie również jest $\mathbb{C}$-wypukłe. Wynika stąd wielomianowa wypukłość zbioru $\overline{D^r}$ [**APS04**, Proposition 2.1.9, Theorem 2.3.9, por. s. 78].

W szczególności,

$$f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \widehat{f(\mathbb{T})} \subset \widehat{\overline{D^r}} = \overline{D^r}.$$

Skoro D^r jest silnie pseudowypukły, zbiór ∂D^r nie zawiera niestałych dysków analitycznych. W konsekwencji, $f(\mathbb{D}) \subset D^r$.

Przeciwna implikacja jest jasna. $\square$

Możemy teraz sformułować i udowodnić zapowiedziane rezultaty.

Propozycja 3.5.5.3. *Niech $D_0 \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym, a f_0 jego E-odwzorowaniem. Ustalmy $\xi_0 \in (0,1)$. Wówczas istnieje otoczenie W_0 punktu $(r_0, f_0(\xi_0))$ w $X_0 \times D_0$ i odwzorowanie $\mathbb{R}$-analityczne*

$$\Lambda : W_0 \longrightarrow \mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}}), \quad \Omega : W_0 \longrightarrow (0,1)$$

takie, że

$$\Lambda(r_0, f_0(\xi_0)) = f_0, \quad \Omega(r_0, f_0(\xi_0)) = \xi_0$$

oraz dla dowolnego punktu $(r, w) \in W_0$, odwzorowanie $f := \Lambda(r, w) : \mathbb{D} \longrightarrow D^r$ jest E-odwzorowaniem spełniającym

$$f(0) = f_0(0), \quad f(\Omega(r, w)) = w.$$

Propozycja 3.5.5.4. *Niech $D_0 \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym, a f_0 jego E-odwzorowaniem. Wówczas istnieje otoczenie V_0 punktu $(r_0, f_0'(0))$ w $X_0 \times \mathbb{C}^n$ i odwzorowanie $\mathbb{R}$-analityczne*

$$\Gamma : V_0 \longrightarrow \mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$$

takie, że

$$\Gamma(r_0, f_0'(0)) = f_0$$

oraz dla dowolnego punktu $(r, v) \in V_0$, odwzorowanie $f := \Gamma(r, v) : \mathbb{D} \longrightarrow D^r$ jest E-odwzorowaniem spełniającym

$$f(0) = f_0(0), \quad f'(0) = \lambda v \text{ dla pewnego } \lambda > 0.$$

Dowód Propozycji 3.5.5.3 i 3.5.5.4. Propozycja 3.5.1.1 dostarcza odwzorowanie $g_0 = \Phi \circ f_0$ i obszar $G_0 := \Phi(D_0)$ stanowiące dane dla sytuacji (†) ($\partial D_0 \subset U_0$). Funkcja $\varrho_0 := r_0 \circ \Phi^{-1}$ jest definiująca dla G_0.

Korzystając z Lematów 3.5.3.1 i 3.5.3.2, dostajemy otoczenia V_0, W_0 punktów $(\varrho_0, g_0'(0))$, $(\varrho_0, g_0(\xi_0))$ odpowiednio oraz odwzorowania $\mathbb{R}$-analityczne Υ, $\widetilde{\Upsilon}$ takie, że $\Xi(\varrho, v, \Upsilon(\varrho, v)) = 0$ na V_0 i $\widetilde{\Xi}(\varrho, w, \widetilde{\Upsilon}(\varrho, w)) = 0$ na W_0. Definiujemy

$$\widehat{\Lambda} := \pi_B \circ \widetilde{\Upsilon}, \quad \Omega := \pi_{\mathbb{R}} \circ \widetilde{\Upsilon}, \quad \widehat{\Gamma} := \pi_B \circ \Upsilon,$$

gdzie

$$\pi_B : B \times Q_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow B, \quad \pi_{\mathbb{R}} : B \times Q_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

są rzutowaniami.

Gdy ϱ jest blisko ϱ_0, hiperpowierzchnia $\{\varrho = 0\}$ ogranicza obszar silnie liniowo wypukły z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym. Ponadto, $\widehat{\Lambda}(\varrho, w)$ i $\widehat{\Gamma}(\varrho, v)$ są słabymi odwzorowaniami stacjonarnymi w G^ϱ (Lematy 3.5.5.1 i 3.5.5.2).

Składając $\widehat{\Lambda}(\varrho, w)$ i $\widehat{\Gamma}(\varrho, v)$ z Φ^{-1}, a następnie korzystając z Lematu 3.5.1.2, dostajemy słabe odwzorowania stacjonarne w D^r, gdzie $r := \varrho \circ \Phi$. Aby pokazać, że są one E-odwzorowaniami, rozumujemy następująco. Jeśli D^r jest dostatecznie blisko D_0 (co zależy od tego, jak blisko są ϱ i ϱ_0), to D^r jest ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym, więc z Propozycji 3.2.1

$$\Lambda(r,w) := \Phi^{-1} \circ \widehat{\Lambda}(\varrho, w), \quad \Gamma(r,v) := \Phi^{-1} \circ \widehat{\Gamma}(\varrho, v)$$

są odwzorowaniami stacjonarnymi. Są one blisko f_0, gdy r jest blisko r_0. Zatem ich liczby nawinięć są równe. Dlatego $\Lambda(r,w)$ i $\Gamma(r,v)$ spełniają warunek (d) Definicji 3.1.18, tzn. są E-odwzorowaniami. $\square$

3.6. Lokalizacja

Propozycja 3.6.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie obszarem. Załóżmy, że $a \in \partial D$ jest takie, że ∂D jest $\mathbb{R}$-analityczny i silnie wypukły w otoczeniu a. Wówczas dla każdego dostatecznie małego otoczenia V_0 punktu a istnieje słabe odwzorowanie stacjonarne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D \cap V_0$ takie, że $f(\mathbb{T}) \subset \partial D$.*

W szczególności, f jest słabym odwzorowaniem stacjonarnym w D.

Dowód. Niech r będzie $\mathbb{R}$-analityczną funkcją definiującą D w otoczeniu a. Problem, którym się zajmujemy ma charakter lokalny, więc zastępując r przez $r \circ \Psi$, gdzie Ψ jest biholomorfizmemy blisko a, możem przyjąć, że $a = (0, \dots, 0, 1)$, natomiast funkcją definiującą D w otoczeniu a jest $r(z) = -1 + |z|^2 + h(z - a)$, gdzie h jest $\mathbb{R}$-analityczne w otoczeniu 0 oraz $h(z) = O(|z|^3)$, $z \to 0$ (por. [**Rud08**, s. 321]).

Naśladując [**Lem81**], rozważmy odwzorowania

$$A_t(z) := \left((1-t^2)^{1/2} \frac{z'}{1 + tz_n}, \frac{z_n + t}{1 + tz_n} \right), \quad z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{D},\ t \in (0,1),$$

które zawężone do $\mathbb{B}_n$ są automorfizmami. Niech

$$r_t(z) := \begin{cases} \frac{|1+tz_n|^2}{1-t^2} r(A_t(z)), & t \in (0,1), \\ -1 + |z|^2, & t = 1. \end{cases}$$

Jest jasne, że $f_{(1)}(\zeta) = (\zeta, 0, \dots, 0)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, jest odwzorowaniem stacjonarnym w $\mathbb{B}_n$. Chcemy mieć sytuację (†), co pozwoli nam użyć Lematu 3.5.3.1 (lub Lematu 3.5.3.2). Zauważmy, że r_t nie zbiega do r_1, gdy $t \to 1$. Jednakże, $r_t \to r_1$ w $X_0(U_0, U_0^{\mathbb{C}})$, gdzie

$$U_0 \subset H := \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_n > -1/2\}$$

jest otoczeniem $f_{(1)}(\mathbb{T})$, a $U_0^{\mathbb{C}}$ jest małe (pamiętamy, że $h(z) = O(|z|^3)$).

Dla t bliskich 1, znajdziemy odwzorowania stacjonarne $f_{(t)}$ w obszarach

$$D_t := \{z \in H : r_t(z) < 0\}$$

takie, że $f_{(t)} \to f_{(1)}$ w normie $W^{2,2}$ (więc też w normie supremum). Rzeczywiście, z Lematu 3.5.3.1 wynika, że możemy położyć $f_{(t)} := \pi_B \circ \Upsilon(r_t, f'_{(1)}(0))$. Argumentacja użyta w dowodzie Lematów 3.5.5.1 i 3.5.5.2 pokazuje, że $f_{(t)}$ spełnia warunki

(a'), (b'), (c') Definicji 3.1.17. Ponieważ niestała funkcja $r \circ A_t \circ f_{(t)}$ jest subharmoniczna w $\mathbb{D}$, ciągła na $\overline{\mathbb{D}}$ oraz $r \circ A_t \circ f_{(t)} = 0$ na $\mathbb{T}$, mamy $f_{(t)}(\mathbb{D}) \subset D_t$. Dowodzi to żądanej własności.

W szczególności,

$$f_{(t)}(\mathbb{D}) \subset 2\mathbb{B}_n \cap H,$$

o ile t jest blisko 1. Odwzorowania A_t mają własność

$$A_t(2\mathbb{B}_n \cap H) \to \{a\}, \quad t \to 1,$$

w sensie odległości Hausdorffa.

Wobec tego, na mocy Lematu 3.5.1.2, odwzorowania $g_{(t)} := A_t \circ f_{(t)}$ są stacjonarne w D dla t bliskich 1. Ponieważ $g_{(t)}$ odwzorowuje $\mathbb{D}$ w dowolnie małe otoczenie a, dostajemy tezę. $\square$

3.7. Dowody Twierdzeń 3.1.13 i 3.1.20

3.7.1. Przypadek $\mathbb{R}$-analityczny. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ będzie obszarem *gwiaździstym* względem 0, tzn. takim, że

$$tx \in \Omega, \quad \text{o ile } x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Definiujemy *funkcję Minkowskiego* obszaru Ω wzorem

$$\mu_\Omega(x) := \inf\left\{t > 0 : x/t \in \Omega\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Wówczas

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : \mu_\Omega(x) < 1\},$$
$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : \mu_\Omega(x) = 1\}$$

oraz

$$\mu_\Omega(tx) = t\mu_\Omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,\ t \geqslant 0.$$

Lemat 3.7.1.1. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, będzie obszarem silnie wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym, zawierającym 0. Wtedy*

(a) $\mu_\Omega - 1$ jest $\mathbb{R}$-analityczną poza 0, funkcją definiującą Ω.
(b) $\mu_\Omega^2 - 1$ jest $\mathbb{R}$-analityczną poza 0, silnie wypukłą poza 0, funkcją definiującą Ω.

Dowód. Kładziemy

$$q(x,t) := r(x/t), \quad (x,t) \in U_0 \times U_1,$$

gdzie r jest $\mathbb{R}$-analityczną funkcją definiującą Ω oraz $U_0 \subset \mathbb{R}^m$, $U_1 \subset \mathbb{R}$ są dostatecznie małymi otoczeniami $\partial\Omega$ i 1. Mamy

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{t^2}\left\langle \nabla r\left(\frac{x}{t}\right), x\right\rangle, \quad (x,t) \in U_0 \times U_1.$$

Stąd

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x, \mu_\Omega(x)) = \frac{\partial q}{\partial t}(x,1) = -\langle \nabla r(x), x\rangle \neq 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

co wynika z faktu, że wektor $-x$ zaczepiony w punkcie x jest wewnątrz Ω; w szczególności, nie jest prostopadły do wektora normalnego w x. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej dla równania $q = 0$, funkcja μ_Ω jest $\mathbb{R}$-analityczna w otoczeniu V_0 zbioru $\partial\Omega$. By zobaczyć, że μ_Ω jest $\mathbb{R}$-analityczna poza 0, ustalmy $x_0 \in (\mathbb{R}^m)_*$. Wtedy zbiór

$$W_0 := \left\{x \in \mathbb{R}^m : \frac{x}{\mu_\Omega(x_0)} \in V_0\right\}$$

jest otwarty i zawiera x_0. Skoro

$$\mu_\Omega(x) = \mu_\Omega(x_0)\mu_\Omega\left(\frac{x}{\mu_\Omega(x_0)}\right), \quad x \in W_0,$$

funkcja μ_Ω jest $\mathbb{R}$-analityczna na W_0.

Możemy więc wziąć d/dt w równaniu

$$\mu_\Omega(tx) = t\mu_\Omega(x), \quad x \neq 0,\ t > 0,$$

by otrzymać

$$\langle\nabla\mu_\Omega(x), x\rangle = \mu_\Omega(x), \quad x \neq 0,$$

skąd $\nabla\mu_\Omega \neq 0$ w $(\mathbb{R}^m)_*$.

Dalej, $\nabla\mu_\Omega^2 = 2\mu_\Omega\nabla\mu_\Omega$, więc $\mu_\Omega^2 - 1$ również jest definiująca dla Ω. Aby dowieść, że $u := \mu_\Omega^2$ jest silnie wypukła poza 0, pokażemy, że

$$X^T\mathcal{H}_aX > 0, \quad a \in \partial\Omega,\ X \in (\mathbb{R}^m)_*,$$

gdzie $\mathcal{H}_x := \mathcal{H}u(x)$ dla $x \in (\mathbb{R}^m)_*$. Biorąc $\partial/\partial x_j$ po obu stronach równości

$$u(tx) = t^2u(x), \quad x \neq 0,\ t > 0,$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(tx) = t\frac{\partial u}{\partial x_j}(x), \quad x \neq 0,\ t > 0, \tag{3.7.1}$$

a biorąc d/dt

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}(tx)x_k = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x), \quad x \neq 0,\ t > 0.$$

W szczególności,

$$x^T\mathcal{H}_xy = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}(x)x_ky_j = \langle\nabla u(x), y\rangle, \quad x \in (\mathbb{R}^m)_*,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Niech $a \in \partial\Omega$. Skoro $\langle\nabla\mu_\Omega(a), a\rangle = \mu_\Omega(a) = 1$, widzimy, że $a \notin T_\Omega(a)$. Dowolny wektor $X \in (\mathbb{R}^m)_*$ może być przedstawiony (jednoznacznie) jako $\alpha a + \beta Y$, gdzie $Y \in T_\Omega(a)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Wówczas

$$\begin{aligned}X^T\mathcal{H}_aX &= \alpha^2a^T\mathcal{H}_aa + 2\alpha\beta a^T\mathcal{H}_aY + \beta^2Y^T\mathcal{H}_aY\\ &= \alpha^2\langle\nabla u(a), a\rangle + 2\alpha\beta\langle\nabla u(a), Y\rangle + \beta^2Y^T\mathcal{H}_aY\\ &= \alpha^2 2\mu_\Omega(a)\langle\nabla\mu_\Omega(a), a\rangle + \beta^2Y^T\mathcal{H}_aY = 2\alpha^2 + \beta^2Y^T\mathcal{H}_aY.\end{aligned}$$

Ponieważ Ω jest silnie wypukły, hesjan dowolnej funkcji definiującej jest silnie dodatni na rzeczywistej przestrzeni stycznej, tzn. $Y^T\mathcal{H}_aY > 0$, gdy $Y \in T_\Omega(a)_*$. Stąd $X^T\mathcal{H}_aX \geqslant 0$. Zauważmy, że nie może być $X^T\mathcal{H}_aX = 0$, gdyż wtedy mielibyśmy $\alpha = 0$, w konsekwencji $\beta \neq 0$ oraz $Y^T\mathcal{H}_aY = 0$. Z drugiej strony $Y = X/\beta \neq 0$, sprzeczność.

Biorąc $\partial/\partial x_k$ w (3.7.1) dostajemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(tx) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x), \quad x \neq 0,\ t > 0,$$

skąd wynika, że

$$X^T\mathcal{H}_aX = X^T\mathcal{H}_{a/\mu_\Omega(a)}X > 0, \quad a, X \in (\mathbb{R}^m)_*.$$

□

Lemat 3.7.1.2. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym. Wówczas dla dowolnych różnych $z, w \in D$ (odp. dowolnych $z \in D$, $v \in (\mathbb{C}^n)_*$) istnieje E-odwzorowanie $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ takie, że $f(0) = z$, $f(\xi) = w$ dla pewnego $\xi \in (0, 1)$ (odp. $f(0) = z$, $f'(0) = \lambda v$ dla pewnego $\lambda > 0$).*

Dowód. Rozważmy najpierw przypadek, gdy D jest dodatkowo silnie wypukły. Można przyjąć, że $0 \in D \subset\subset \mathbb{B}_n$. Rozważmy zbiory

$$D_t := \{x \in \mathbb{C}^n : t\mu_D^2(x) + (1-t)\mu_{\mathbb{B}_n}^2(x) < 1\}, \quad t \in [0, 1].$$

Na podstawie Lematu 3.7.1.1, funkcje $t\mu_D^2 + (1-t)\mu_{\mathbb{B}_n}^2$ są $\mathbb{R}$-analityczne w $(\mathbb{C}^n)_*$ i silnie wypukłe w $(\mathbb{C}^n)_*$. Ponadto, $\mu_{D_t} = \sqrt{t\mu_D^2 + (1-t)\mu_{\mathbb{B}_n}^2}$, więc D_t są obszarami silnie wypukłymi z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi, spełniającymi zależności

$$D = D_1 \subset\subset D_{t_2} \subset\subset D_{t_1} \subset\subset D_0 = \mathbb{B}_n, \quad 0 < t_1 < t_2 < 1.$$

Dalej, gdy t_1 jest blisko t_2, to D_{t_1} jest blisko D_{t_2} względem topologii wprowadzonej w Sekcji 3.5. Chcemy pokazać, że D_t są w pewnej rodzinie $\mathcal{D}(c)$. Jedynie warunki kuli wewnętrznej i zewnętrznej wymagają sprawdzenia.

Istnieje $\delta > 0$ takie, że $\delta\mathbb{B}_n \subset\subset D$. Wiemy, że $\nabla\mu_{D_t}^2 \neq 0$ w $(\mathbb{R}^{2n})_*$. Kładziemy

$$M := \sup\left\{\frac{\mathcal{H}\mu_{D_t}^2(x; X)}{|\nabla\mu_{D_t}^2(y)|} : t \in [0, 1],\ x, y \in 2\overline{\mathbb{B}}_n \setminus \delta\mathbb{B}_n,\ X \in \mathbb{R}^{2n},\ |X| = 1\right\}.$$

To liczba dodatnia, jako że funkcje $\mu_{D_t}^2$ są silnie wypukłe na $(\mathbb{R}^{2n})_*$, a supremum dodatniej funkcji ciągłej jest wzięte po zbiorze zwartym. Niech

$$r := \min\left\{\frac{1}{2M}, \frac{\operatorname{dist}(\partial D, \delta\mathbb{B}_n)}{2}\right\}.$$

Dla ustalonych $t \in [0,1]$ i $a \in \partial D_t$ połóżmy $a' := a - r\nu_{D_t}(a)$. W szczególności, $\overline{B_n(a',r)} \subset 2\overline{\mathbb{B}}_n \setminus \delta\mathbb{B}_n$. Definiujemy

$$h(x) := \mu_{D_t}^2(x) - \frac{|\nabla\mu_{D_t}^2(a)|}{2|a-a'|}(|x-a'|^2 - r^2), \quad x \in 2\overline{\mathbb{B}}_n \setminus \delta\mathbb{B}_n.$$

Mamy $h(a) = 1$ i

$$\nabla h(x) = \nabla\mu_{D_t}^2(x) - \frac{|\nabla\mu_{D_t}^2(a)|}{|a-a'|}(x-a'),$$

skąd $\nabla h(a) = 0$. Co więcej, dla $|X| = 1$

$$\mathcal{H}h(x;X) = \mathcal{H}\mu_{D_t}^2(x;X) - \frac{|\nabla\mu_{D_t}^2(a)|}{r} \leqslant M|\nabla\mu_{D_t}^2(a)| - 2M|\nabla\mu_{D_t}^2(a)| < 0.$$

Wynika stąd, że $h \leqslant 1$ na każdym wypukłym zbiorze S takim, że $a \in S \subset 2\overline{\mathbb{B}}_n \setminus \delta\mathbb{B}_n$. Załóżmy bowiem przeciwnie. Wtedy jest $y \in S$ takie, że $h(y) > 1$. Połączmy punkty a, y odcinkiem i rozważmy funkcję

$$g : [0,1] \ni t \longmapsto h(ta + (1-t)y) \in \mathbb{R}.$$

Skoro a jest silnym maksimum lokalnym h, funkcja g przyjmuje lokalne minimum w pewnym $t_0 \in (0,1)$. Stąd

$$0 \leqslant g''(t_0) = \mathcal{H}h(t_0 a + (1-t_0)y; a-y),$$

co jest niemożliwe.

Kładąc $S := \overline{B_n(a',r)}$, otrzymujemy

$$\mu_{D_t}^2(x) \leqslant 1 + \frac{|\nabla\mu_{D_t}^2(a)|}{2|a-a'|}(|x-a'|^2 - r^2) < 1$$

dla $x \in B_n(a',r)$, tzn. $x \in D_t$.

Dowód warunku kuli zewnętrznej jest podobny. Niech

$$m := \inf\left\{\frac{\mathcal{H}\mu_{D_t}^2(x;X)}{|\nabla\mu_{D_t}^2(y)|} : t \in [0,1],\ x, y \in (\overline{\mathbb{B}}_n)_*,\ X \in \mathbb{R}^{2n},\ |X| = 1\right\}.$$

Mamy $m > 0$. Faktycznie, jednorodność μ_{D_t} pociąga za sobą $\mathcal{H}\mu_{D_t}^2(sx;X) = \mathcal{H}\mu_{D_t}^2(x;X)$ i $\nabla\mu_{D_t}^2(sx) = s\nabla\mu_{D_t}^2(x)$ dla $x \neq 0$, $X \in \mathbb{R}^{2n}$, $s > 0$. Zatem znajdziemy dodatnie stałe C_1, C_2 takie, że $C_1 \leqslant \mathcal{H}\mu_{D_t}^2(x;X)$ dla $x \neq 0$, $X \in \mathbb{R}^{2n}$, $|X| = 1$ oraz $|\nabla\mu_{D_t}^2(y)| \leqslant C_2$ dla $y \in \overline{\mathbb{B}}_n$. W szczególności, $m \geqslant C_1/C_2$.

Niech $R := 2/m$. Dla ustalonych $t \in [0,1]$ i $a \in \partial D_t$ kładziemy $a'' := a - R\nu_{D_t}(a)$. Zdefiniujmy

$$\widetilde{h}(x) := \mu_{D_t}^2(x) - \frac{|\nabla\mu_{D_t}^2(a)|}{2|a-a''|}(|x-a''|^2 - R^2),\ x \in \overline{\mathbb{B}}_n.$$

Mamy $\widetilde{h}(a) = 1$ oraz

$$\nabla\widetilde{h}(x) = \nabla\mu^2_{D_t}(x) - \frac{|\nabla\mu^2_{D_t}(a)|}{|a-a''|}(x-a''),$$

więc $\nabla\widetilde{h}(a) = 0$. Ponadto, dla $x \in (\overline{\mathbb{B}}_n)_*$ i $|X| = 1$

$$\mathcal{H}\widetilde{h}(x;X) = \mathcal{H}\mu^2_{D_t}(x;X) - \frac{|\nabla\mu^2_{D_t}(a)|}{R} \geqslant m|\nabla\mu^2_{D_t}(a)| - m/2|\nabla\mu^2_{D_t}(a)| > 0.$$

Wobec tego, a jest silnym minimum lokalnym $\widetilde{h}$.

Teraz, używając wyżej wymienionych własności, wywnioskujemy, że $\widetilde{h} \geqslant 1$ na $\overline{\mathbb{B}}_n$. Postępujemy podobnie jak wcześniej: poszukując sprzeczności przypuśćmy, że jest $y \in \overline{\mathbb{B}}_n$ takie, że $\widetilde{h}(y) < 1$. Przesuwając lekko y (w razie potrzeby) możemy założyć, że 0 nie leży na odcinku łączącym a i y. Wtedy funkcja $\widetilde{g}(t) := \widetilde{h}(ta + (1-t)y)$ osiąga lokalne maksimum w pewnym $t_0 \in (0,1)$. Warunek $\widetilde{g}''(t_0) \leqslant 0$ daje sprzeczność z silną dodatniością hesjanu $\widetilde{h}$.

Otrzymujemy

$$\frac{|\nabla\mu^2_{D_t}(a)|}{2|a-a''|}(|x-a''|^2 - R^2) \leqslant \mu^2_{D_t}(x) - 1 < 0,$$

dla $x \in D_t$, więc $D_t \subset B_n(a'', R)$.

Niech T będzie zbiorem liczb $t \in [0,1]$ takich, że istnieje E-odwzorowanie $f_t : \mathbb{D} \longrightarrow D_t$ spełniające $f_t(0) = z$, $f_t(\xi_t) = w$ dla pewnego $\xi_t \in (0,1)$ (odp. $f_t(0) = z$, $f_t'(0) = \lambda_t v$ dla pewnego $\lambda_t > 0$). Twierdzimy, że $T = [0,1]$. Aby to udododnić, skorzystamy z argumentu otwarto-domkniętości.

Rzecz jasna, $T \neq \emptyset$, gdyż $0 \in T$. Dalej, T jest otwarty w $[0,1]$. Faktycznie, niech $t_0 \in T$. Z Propozycji 3.5.5.3 wynika, że istnieje otoczenie T_0 punktu t_0 takie, że znajdzie się E-odwzorowanie $f_t : \mathbb{D} \longrightarrow D_t$ i $\xi_t \in (0,1)$ spełniające $f_t(0) = z$, $f_t(\xi_t) = w$ dla $t \in T_0$ (odp. $\lambda_t > 0$ takie, że $f_t(0) = z$, $f_t'(0) = \lambda_t v$ dla $t \in T_0$).

Dla dowodu domkniętości T, wybierzmy ciąg $\{t_m\} \subset T$ zbieżny do pewnego $t \in [0,1]$. Chcemy pokazać, że $t \in T$. Skoro f_{t_m} są E-odwzorowaniami, są geodezyjnymi. Korzystając z zawierań $D \subset D_{t_m} \subset \mathbb{B}_n$, znajdujemy zbiór zwarty $K \subset (0,1)$ taki, że $\{\xi_{t_m}\} \subset K$ (odp. zbiór zwarty $\widetilde{K} \subset (0,\infty)$ taki, że $\{\lambda_{t_m}\} \subset \widetilde{K}$). Z Propozycji 3.4.7 i 3.4.9 odwzorowania f_{t_m} i $\widetilde{f}_{t_m}$ są równociągłe w $\mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$, a z Propozycji 3.4.6 i 3.4.8, funkcje ρ_{t_m} są jednostajnie ograniczone z obu stron przez stałe dodatnie i równociągłe w $\mathcal{C}^{1/2}(\mathbb{T})$. Z twierdzenia Arzeli-Ascoliego znajdzie się podciąg $\{s_m\} \subset \{t_m\}$ i odwzorowania $f, \widetilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$, $\rho \in \mathcal{C}^{1/2}(\mathbb{T})$ takie, że $f_{s_m} \rightrightarrows f$, $\widetilde{f}_{s_m} \rightrightarrows \widetilde{f}$ na $\overline{\mathbb{D}}$, $\rho_{s_m} \rightrightarrows \rho$ na $\mathbb{T}$ oraz $\xi_{s_m} \to \xi \in (0,1)$ (odp. $\lambda_{s_m} \to \lambda > 0$).

Oczywiście $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{D}_t$, $f(\mathbb{T}) \subset \partial D_t$ i $\rho > 0$. Z silnej wypukłości D_t mamy $f(\mathbb{D}) \subset D_t$.

Warunki (c') i (d) Definicji 3.1.17 i 3.1.18 wynikają z jednostajnej zbieżności odpowiednich funkcji. Zatem, f jest słabym E-odwzorowaniem w D_t, w konsekwencji E-odwzorowaniem w D_t, spełniającym $f(0) = z$, $f(\xi) = w$ (odp. $f(0) = z$, $f'(0) = \lambda v$ dla pewnego $\lambda > 0$).

Wracamy do wyjściowej sytuacji, tzn. gdy D jest silnie liniowo wypukły. Weźmy punkt $\eta \in \partial D$ taki, że $\max_{\zeta \in \partial D} |z - \zeta| = |z - \eta|$. Wtedy η jest punktem silnej wypukłości D. Rzeczywiście, dzięki twierdzeniu o funkcji uwikłanej, można założyć, że w otoczeniu η funkcje definiujące D i $B := B_n(z, |z - \eta|)$ są postaci $r(x) := \widetilde{r}(\widetilde{x}) - x_{2n}$ i $q(x) := \widetilde{q}(\widetilde{x}) - x_{2n}$ odpowiednio, gdzie $x = (\widetilde{x}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ jest blisko η. Z zawierania $D \subset B$ wynika, że $r - q \geqslant 0$ blisko η i $(r - q)(\eta) = 0$. Dlatego $\mathcal{H}(r - q)(\eta)$ jest nieujemny na $\mathbb{C}^n$. Skoro $\mathcal{H}q(\eta)$ jest silnie dodatni na $T_B^{\mathbb{R}}(\eta)_* = T_D^{\mathbb{R}}(\eta)_*$, otrzymujemy, że $\mathcal{H}r(\eta)$ też jest silnie dodatni na $T_D^{\mathbb{R}}(\eta)_*$.

Z ciągłości istnieje wypukłe otoczenie V_0 punktu η takie, że wszystkie elementy $\partial D \cap V_0$ są punktami silnej wypukłości D. Z Propozycji 3.6.1 (po zmniejszeniu V_0, jeśli trzeba) wynika, że istnieje słabe odwzorowanie stacjonarne $g : \mathbb{D} \longrightarrow D \cap V_0$ takie, że $g(\mathbb{T}) \subset \partial D$. W szczególności, g jest słabym odwzorowaniem stacjonarnym w D. Skoro $D \cap V_0$ jest wypukły, warunek liczby nawinięć jest spełniony na $D \cap V_0$ (i na D). W konsekwencji, g jest E-odwzorowaniem w D.

Jeśli $z = g(0)$, $w = g(\xi)$ dla pewnego $\xi \in \mathbb{D}$ (odp. $z = g(0)$, $v = g'(0)$), to nie ma czego dowodzić. W innym przypadku rozważmy krzywe $\alpha : [0,1] \longrightarrow D$, $\beta : [0,1] \longrightarrow D$ łączące $g(0)$ i z, $g(1/2)$ i w (odp. $\alpha : [0,1] \longrightarrow D$, $\beta : [0,1] \longrightarrow (\mathbb{C}^n)_*$ łączące $g(0)$ i z, $g'(0)$ i v). Możemy przyjąć, że obrazy α i β są rozłączne. Niech T będzie zbiorem tych $t \in [0,1]$, dla których istnieje E-odwzorowanie $g_t : \mathbb{D} \longrightarrow D$ spełniające $g_t(0) = \alpha(t)$, $g_t(\xi_t) = \beta(t)$ dla pewnego $\xi_t \in (0,1)$ (odp. $g_t(0) = \alpha(t)$, $g_t'(0) = \lambda_t \beta(t)$ dla pewnego $\lambda_t > 0$). Znowu $T \neq \emptyset$, gdyż $0 \in T$. Korzystając podobnie jak wcześniej z rezultatów Sekcji 3.4 (dla jednego obszaru), widzimy, że T jest wypukły.

Skoro funkcja $\boldsymbol{\ell}_D$ jest symetryczna, z Propozycji 3.5.5.3 wynika, że T jest otwarty w $[0,1]$ (zmieniamy wzdłuż α, następnie wzdłuż β). Wobec tego, g_1 jest E-odwzorowaniem dla z, w.

W przypadku infinitezymalnym zmieniamy punkt, a następnie kierunek. Rozważmy bowiem zbiór S liczb $s \in [0,1]$, dla których istnieje E-odwzorowanie $h_s : \mathbb{D} \longrightarrow D$ z warunkiem $h_s(0) = \alpha(s)$. Wtedy $0 \in S$, z Propozycji 3.5.5.3 zbiór S jest otwary w $[0,1]$ i ponownie z rezultatów Sekcji 3.4 jest domknięty. Stąd $S = [0,1]$. Teraz łączymy $h_1'(0)$ i v krzywą $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Definiujemy R jako zbiór $r \in [0,1]$ takich, że istnieje E-odwzorowanie $\widetilde{h}_r : \mathbb{D} \longrightarrow D$ spełniające $\widetilde{h}_r(0) = h_1(0)$, $\widetilde{h}_r'(0) = \sigma_r \gamma(1-r)$ dla pewnego $\sigma_r > 0$. Wówczas $1 \in R$, z Propozycji 3.5.5.4 zbiór R jest otwarty w $[0,1]$, a dzięki wynikom Sekcji 3.4 jest domknięty. Zatem $R = [0,1]$, więc $\widetilde{h}_0$ jest E-odwzorowaniem dla z, v. $\square$

Jesteśmy gotowi do udowodnienia głównych wyników pracy Lemperta.

Dowód Twierdzenia 3.1.13 w przypadku $\mathbb{R}$-analitycznym. Z Lematu 3.7.1.2 wynika, że dla dowolnych różnych punktów $z, w \in D$ (odp. $z \in D$, $v \in (\mathbb{C}^n)_*$) istnieje E-odwzorowanie przechodzące przez nie (odp. takie, że $f(0) = z$, $f'(0) = \lambda v$ dla pewnego $\lambda > 0$). Z drugiej strony, z Wniosku 3.3.1.2 wiadomo, że E-odwzorowania są geodezyjnymi. □

Dowód Twierdzenia 3.1.20 w przypadku $\mathbb{R}$-analitycznym. To konsekwencja Lematu 3.7.1.2 i Wniosku 3.3.1.5. □

3.7.2. Przypadek $\mathcal{C}^2$.

Lemat 3.7.2.1. *Niech $D \subset\subset \mathbb{B}_n$, $n \geqslant 2$, będzie obszarem silnie pseudowypukłym klasy $\mathcal{C}^2$. Ustalmy $z \in D$ i niech r będzie funkcją definiującą D spełniającą warunki*
(a) $r \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C}^n)$,
(b) $D = \{x \in \mathbb{C}^n : r(x) < 0\}$,
(c) $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D} = \{x \in \mathbb{C}^n : r(x) > 0\}$,
(d) $|\nabla r| = 1$ na ∂D,
(e) $\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) X_j \overline{X}_k \geqslant C|X|^2$ dla $a \in \partial D$, $X \in \mathbb{C}^n$ i stałej $C > 0$.
Załóżmy, że istnieją $\mathcal{C}^2$-gładkie funkcje $r_m : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{\partial^{|\alpha|} r_m}{\partial x^\alpha} \rightrightarrows \frac{\partial^{|\alpha|} r}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^{2n},\ |\alpha| \leqslant 2,$$

na $\overline{\mathbb{B}}_n$. Niech D_m będzie składową zbioru $\{x \in \mathbb{C}^n : r_m(x) < 0\}$ zawierającą punkt z.
Wówczas istnieje $c > 0$ takie, że $(D, z), (D_m, z) \in \mathcal{D}(c)$, $m >> 1$.

Dowód. Warunki (a), (e), (f) Definicji 3.4.1 są spełnione. Aby znaleźć c spełniające (2), bierzemy $s > 0$ takie, że $\mathcal{H}r(x; X) < s|X|^2$ dla $x \in \overline{\mathbb{B}}_n$ i $X \in (\mathbb{R}^{2n})_*$. Wtedy $\mathcal{H}r_m(x; X) < 2s|X|^2$ dla $x \in \overline{\mathbb{B}}_n$, $X \in (\mathbb{R}^{2n})_*$ i $m >> 1$. Niech $U_0 \subset \mathbb{B}_n$ będzie otoczeniem ∂D takim, że $|\nabla r|$ jest na U_0 między 3/4 a 5/4. Zauważmy, że $\partial D_m \subset U_0$ oraz $|\nabla r_m| \in (1/2, 3/2)$ na U_0, gdy $m >> 1$.

Ustalmy m i $a \in \partial D_m$ i połóżmy $b := a - R\nu_{D_m}(a)$, gdzie mała liczba $R > 0$ będzie określona później. Znajdujemy $t > 0$ takie, że $\nabla r_m(a) = 2t(a - b)$. Zauważmy, że t może być dowolnie duże o ile R jest dostatecznie małe. Kładziemy $t := 2s$ i $R := |\nabla r_m(a)|/t$. Mamy $\mathcal{H}r_m(x; X) < 2t|X|^2$ dla $x \in \overline{\mathbb{B}}_n$, $X \in (\mathbb{R}^{2n})_*$ i $m >> 1$. Funkcja

$$h(x) := r_m(x) - t(|x - b|^2 - R^2), \quad x \in \mathbb{C}^n,$$

osiąga w a globalne maksimum na $\overline{\mathbb{B}}_n$ (a jest silnym maksimum lokalnym i hesjan h jest ujemny na wypukłym zbiorze $\overline{\mathbb{B}}_n$, por. dowód Lematu 3.7.1.2). Stąd $h \leqslant 0$ w $\overline{\mathbb{B}}_n$. Z tego dostajemy (b).

Z (b) wynika, że $D_m = \{x \in \overline{\mathbb{B}}_n : r_m(x) < 0\}$ dla dużych m (tzn. $\{x \in \overline{\mathbb{B}}_n : r_m(x) < 0\}$ jest spójny).

Co więcej, warunek (b) implikuje (c) następująco. Wnosimy z Uwagi 3.4.4 o istnieniu $c' > 0$ takiego, że D spełnia (c) z c'. Niech m_0 będzie takie, że odległość Hausdorffa między ∂D a ∂D_m jest mniejsza niż $1/c'$ dla $m \geqslant m_0$. Istnieje $c'' > 0$

takie, że D_{m_0} spełnia (c) z c''. Bez straty ogólności możemy założyć, że $c'' < c'$. Ustalmy $x, y \in D_m$. Ponieważ D_m spełnia (nie tracąc ogólności) warunek kuli wewnętrznej o promieniu $1/c'$, wnosimy, że istnieją dwie kule o promieniach $1/c'$ zawarte w D_m i zawierające punkty x, y odpowiednio. Środki tych kul leżą w D_{m_0}. Korzystając z faktu, że $(D_{m_0}, z) \in \mathcal{D}(c'')$, możemy połączyć te środki kulami o promieniach $1/(2c'')$ jak w warunku (c). Zatem znaleźliśmy łańcuch składający się z kul o promieniach $1/c'$ lub $1/c''$, łączący x, y.

Dlatego możemy połączyć x i y kulami zawartymi w skonstruowanym łańcuchu o tym samym promieniu zależącym jedynie od c' i c''.

Teraz dowodzimy (d). Pokażemy, że jest $c > c'$ takie, że każde D_m spełnia warunek (d) z liczbą c, dla dużych m. W tym celu pokryjmy ∂D skończoną liczbą kul B_j, $j = 1, \ldots, N$, z warunku (d) i niech $B_j' \subset\subset B_j$ będzie kulą taką, że $\{B_j'\}_{j=1}^N$ jeszcze pokrywa ∂D. Niech Φ_j będą odwzorowaniami odpowiadającymi B_j. Niech ε będzie takie, że dowolna kula o promieniu ε przecinająca ∂D jest relatywnie zwarta w B_j' dla pewnego j. Widać, że każda kula B o promieniu $\varepsilon/2$ przecinająca ∂D_m zawiera się w kuli o promieniu ε przecinającej ∂D, jest więc zawarta w B_j' dla pewnego j. Wtedy para B, Φ_j spełnia warunki $(d)(ii)$, $(d)(iii)$, $(d)(iv)$. Zatem wystarczy sprawdzić, że istnieje $c > 2/\varepsilon$ takie, że każda para B_j', Φ_j spełnia warunek (d) dla D_m z c $(m >> 1)$. Jest to możliwe, gdyż $\Phi_j(D_m) \subset \Phi_j(D)$, $(\partial^{|\alpha|}\Phi_j/\partial x^\alpha)(\partial D_m \cap B_j)$ zbiega do $(\partial^{|\alpha|}\Phi_j/\partial x^\alpha)(\partial D \cap B_j)$ dla $|\alpha| \leqslant 2$ i dla dowolnego $w \in \Phi(\partial D \cap B_j)$ znajdzie się kula o promieniu $2/\varepsilon$ zawierająca $\Phi_j(D)$, styczna do $\partial\Phi_j(D)$ w punkcie w. Sprecyzujmy to w następujący sposób.

Niech $a, b \in \mathbb{C}^n$ i $x \in \partial B_n(a, \widetilde{c})$, gdzie $\widetilde{c} > c'$. Wtedy kula $B_n(2a - x, 2\widetilde{c})$ zawiera $B_n(a, \widetilde{c})$ i jest styczna do $B_n(a, \widetilde{c})$ w x. Istnieje liczba $\eta = \eta(\delta, \widetilde{c}) > 0$, niezależna od a, b, x, taka, że średnica zbioru $B_n(b, \widetilde{c}) \setminus B_n(2a - x, 2\widetilde{c})$ jest mniejsza niż $\delta > 0$, o ile $|a - b| < \eta$ (prosta konsekwencja nierówności trójkąta).

Wybierzmy $\widetilde{s} > 0$ takie, że $\mathcal{H}(r \circ \Phi_j^{-1})(x; X) \geqslant 2\widetilde{s}|X|^2$ dla $x \in U_j$, $j = 1, \ldots, N$, gdzie U_j jest otoczeniem $\Phi_j(\partial D \cap B_j)$. Wówczas, $\mathcal{H}(r_m \circ \Phi_j^{-1})(x; X) \geqslant \widetilde{s}|X|^2$ dla $x \in U_j$ i dużych m oraz $\Phi_j(\partial D_m \cap B_j') \subset U_j$, $j = 1, \ldots, N$. Powtarzając dla funkcji

$$x \longmapsto (r_m \circ \Phi_j^{-1})(x) - \widetilde{t}(|x - \widetilde{b}|^2 - \widetilde{R}^2)$$

argumentację użytą w dowodzie warunku kuli wewnętrznej z odpowiednio dobranym $\widetilde{t}$ i jednostajnym $\widetilde{R} > c$, znajdujemy jednostajne $\widetilde{\varepsilon} > 0$ takie, że dla dowolnych j, m oraz $w \in \Phi_j(\partial D_m \cap B_j')$ istnieje kula B o promieniu $\widetilde{R}$ styczna do $\Phi_j(\partial D_m \cap B_j')$ w punkcie w, taka, że $\Phi_j(\partial D_m \cap B_j') \cap B_n(w, \widetilde{\varepsilon}) \subset B$. Przez $a_{j,m}(w)$ oznaczmy jej środek.

Z drugiej strony, dla każdego $w \in \Phi_j(\partial D_m \cap B_j')$ znajdzie się $t > 0$ takie, że $w' = w + t\nu(w) \in \Phi_j(\partial D \cap B_j)$, gdzie $\nu(w)$ jest jednostkowym wektorem normalnym zewnętrznym do $\Phi_j(\partial D_m \cap B_j')$ w punkcie w. Niech $a_j(w')$ będzie środkiem kuli o promieniu $\widetilde{R}$, stycznej do $\Phi_j(\partial D \cap B_j)$ w punkcie w'. Wynika stąd, że $|a_{j,m}(w) - a_j(w')| < \eta(\widetilde{\varepsilon}/2, \widetilde{R})$, o ile m jest duże.

Łącząc powyższe fakty, kończymy dowód warunku kuli zewnętrznej (z promieniem zależnym tylko od $\widetilde{\varepsilon}$ i $\widetilde{R}$). □

Dowód Twierdzeń 3.1.13 i 3.1.20 w przypadku $\mathcal{C}^2$. Nie tracąc ogólności zakładamy, że $0 \in D \subset\subset \mathbb{B}_n$. Niech r będzie jak w Lemacie 3.7.2.1.

Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że istnieje ciąg P_k rzeczywistych wielomianów na $\mathbb{C}^n$ takich, że

$$\frac{\partial^{|\alpha|} P_k}{\partial x^\alpha} \rightrightarrows \frac{\partial^{|\alpha|} r}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^{2n},\ |\alpha| \leqslant 2,$$

na $\overline{\mathbb{B}}_n$. Rozważmy zbiory

$$D_{k,\varepsilon} := \{x \in \mathbb{C}^n : P_k(x) + \varepsilon < 0\}.$$

Niech ε_m będzie ciągiem liczb dodatnich, dążącym do 0, takim, że $3\varepsilon_{m+1} < \varepsilon_m$. Dla $m \in \mathbb{N}$ istnieje $k_m \in \mathbb{N}$ takie, że $\|P_{k_m} - r\|_{\overline{\mathbb{B}}_n} < \varepsilon_m$. Kładąc $r_m := P_{k_m} + 2\varepsilon_m$, otrzymujemy $r + \varepsilon_m < r_m < r + 3\varepsilon_m$ na $\overline{\mathbb{B}}_n$. W szczególności, $r < r_{m+1} < r_m$ na $\overline{\mathbb{B}}_n$.

Niech D_m będzie składową $D_{k_m,2\varepsilon_m}$ zawierającą 0. Jest to ograniczony obszar silnie liniowo wypukły z brzegiem $\mathbb{R}$-analitycznym, a r_m jest jego funkcją definiującą dla dużych m. Ponadto, $D_m \subset D_{m+1}$ oraz $\bigcup_{m=1}^\infty D_m = D$. Z własności funkcji i metryk holomorficznie kontraktywnych dostajemy Twierdzenie 3.1.13.

Pozostaje pokazać, że dla różnych $z, w \in D$ (odp. $z \in D$, $v \in (\mathbb{C}^n)_*$) istnieje słabe E-odwzorowanie. Punkty z, w leżą w D_m (odp. $z \in D_m$), $m >> 1$. Zatem można znaleźć E-odwzorowanie f_m w D_m dla z, w (odp. z, v). Skoro $(D_m, z) \in \mathcal{D}(c)$ dla pewnego jednostajnego $c > 0$ i dużych m (Lemat 3.7.2.1), wnioskujemy, że f_m, $\widetilde{f}_m$ i ρ_m spełniają jednostajne szacowania z Sekcji 3.4. Dlatego, przechodząc do podciągu, można założyć, że $\{f_m\}$ zbiega jednostajnie na $\overline{\mathbb{D}}$ do odwzorowania $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$ przechodzącego przez z, w (odp. takiego, że $f(0) = z$, $f'(0) = \lambda v$ dla pewnego $\lambda > 0$), $\{\widetilde{f}_m\}$ jest jednostajnie zbieżny na $\overline{\mathbb{D}}$ do odwzorowania $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^{1/2}(\overline{\mathbb{D}})$ oraz $\{\rho_m\}$ zbiega jednostajnie na $\mathbb{T}$ do dodatniej funkcji $\rho \in \mathcal{C}^{1/2}(\mathbb{T})$ (w szczególności, $f' \bullet \widetilde{f} = 1$ w $\mathbb{D}$, więc $\widetilde{f}$ nie ma zer w $\overline{\mathbb{D}}$). Wiemy już, że implikuje to, iż f jest słabym E-odwzorowaniem w D.

Aby dostać $\mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}$-gładkość f i odwzorowań stowarzyszonych, $k = 3, 4, \ldots, \infty$, wystarczy powtórzyć dowód [**Lem81**, Proposition 5]. Kluczowy jest lemat Webstera (por. [**Web78**], udowodniliśmy go w przypadku $\mathbb{R}$-analitycznym, Propozycja 3.2.1). Niech

$$\psi : \partial D \ni z \longmapsto (z, T_D^{\mathbb{C}}(z)) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{P}^{n-1})_*,$$

gdzie $\mathbb{P}^{n-1}$ jest $(n-1)$-wymiarową przestrzenią rzutową zespoloną. Oznaczmy przez $\pi : (\mathbb{C}^n)_* \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ rzutowanie kanoniczne.

Z lematu Webstera, $\psi(\partial D)$ jest całkowicie rzeczywistą rozmaitością klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Odwzorowanie $(f, \pi \circ \widetilde{f}) : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ jest 1/2-hölderowskie, holomorficzne na $\mathbb{D}$ i odwzorowuje $\mathbb{T}$ w $\psi(\partial D)$. Wobec tego, jest klasy $\mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ (zasada odbicia dla $\mathcal{C}^r$, $2 \leqslant r \leqslant \omega$, [**Lem81**, Lemme 2]), skąd f, jak również $\nu_D \circ f$ są klasy $\mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}$.

Ustalmy $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Skoro $\nu_D(f(\zeta_0)) \neq 0$, można przyjąć, że $\nu_{D,1} \circ f \neq 0$ na $\mathbb{T} \cap U_0$, gdzie U_0 jest otoczeniem ζ_0. Niech funkcja $\varphi \in \mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ będzie zdefiniowana jak w dowodzie Propozycji 3.4.8. Zatem $\varphi = \overline{\nu_{D,1} \circ f}$ na $\mathbb{T} \cap U_0$ oraz $\log \varphi \in \mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}(\mathbb{T})$ jest dobrze określony. Rozszerzmy $\operatorname{Im} \log \varphi$ do funkcji v harmonicznej w $\mathbb{D}$ i rozważmy funkcję $g = u + iv \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, której częścią urojoną jest v. Skoro $v \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}(\mathbb{T})$, z twierdzenia Privalova wynika, że $g \in \mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}(\overline{\mathbb{D}})$. Zauważmy, że funkcje $e^{u - \operatorname{Re} \log \varphi} \overline{\nu_{D,1} \circ f}$ oraz $\rho \overline{\nu_{D,1} \circ f}$ (na $\mathbb{T} \cap U_0$) rozszerzają się do funkcji holomorficznych w $\mathbb{D} \cap U_0$ i ciągłych w $\overline{\mathbb{D}} \cap U_0$, wobec czego $\rho e^{\operatorname{Re} \log \varphi - u}$ również. Korzystając z zasady odbicia, można ją przedłużyć holomorficznie przez $\mathbb{T} \cap U_0$, skąd wynika, że ρ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}$ na $\mathbb{T} \cap U_0$, a w konsekwencji na $\mathbb{T}$. Stąd $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^{k-1-\varepsilon}(\mathbb{T})$ i na mocy twierdzenia Hardy'ego-Littlewooda, klasa przenosi się na $\overline{\mathbb{D}}$. □

ROZDZIAŁ 4

Dodatek

4.1. Obszary gładkie i funkcje definiujące

Referencja: [**JP00**, Section 2.2].

Definicja 4.1.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, będzie obszarem, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ i $a \in \partial\Omega$. Mówimy, że $\partial\Omega$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ w punkcie a, jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^m$ punktu a i funkcja $r : U \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^k$ taka, że

(a) $U \cap \Omega = \{x \in U : r(x) < 0\}$,
(b) $\nabla r \neq 0$ na U.

Funkcję r nazywamy *lokalną funkcją definiującą* Ω w punkcie a.

Oczywiście, r jest lokalną funkcją definiującą dla a z pewnego zbioru $S \subset \partial\Omega$. W tej sytuacji mówimy, że Ω jest klasy $\mathcal{C}^k$ w otoczeniu zbioru S.

Jeśli $\partial\Omega$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ w każdym punkcie $a \in \partial\Omega$, to określamy Ω mianem obszaru klasy $\mathcal{C}^k$.

Funkcja r jest *funkcją definiującą* Ω, gdy U jest otoczeniem $\partial\Omega$. Wymiennie stosujemy określenia: Ω jest $\mathcal{C}^k$-gładki, $\partial\Omega$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\partial\Omega$ jest $\mathcal{C}^k$-gładki.

Uwaga 4.1.2. (a) Z warunków (a) i (b) Definicji 4.1.1 wynika, że

$$U \cap \partial\Omega = \{x \in U : r(x) = 0\}.$$

(b) Wektor normalny i przestrzeń styczna (s. 48) nie zależą od wyboru lokalnej funkcji definiującej.

Propozycja 4.1.3. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, będzie ograniczonym obszarem klasy $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wówczas istnieje funkcja definiująca Ω klasy $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m)$.*

Przyjmujemy następującą definicję

Definicja 4.1.4. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *silnie pseudowypukły*, gdy

(a) D jest klasy $\mathcal{C}^2$,
(b) istnieje funkcja r definiująca D taka, że

$$\mathcal{L}r(a; X) > 0, \quad a \in \partial D,\ X \in T_D^{\mathbb{C}}(a)_*. \tag{4.1.1}$$

(Dla $n = 1$ warunek (4.1.1) jest pusto spełniony.)

Uwaga 4.1.5. (a) Nierówności w Definicjach 3.1.5, 3.1.7 i 4.1.4 nie zależą od wyboru funkcji definiującej.

(b) Dla obszarów ograniczonych Definicja 4.1.4 jest zgodna z definicją lokalną. Można pokazać, że analogiczną sytuację mamy w przypadku ograniczonych obszarów silnie wypukłych i silnie liniowo wypukłych (w przypadku silnie wypukłym i silnie pseudowypukłym można wybrać funkcję definiującą tak, by nierówności zachodziły na $(\mathbb{R}^m)_*$ i $(\mathbb{C}^n)_*$ odpowiednio). Sytuacja komplikuje się w przypadku nieograniczonym, zwłaszcza jeśli żądamy plurisubharmoniczności funkcji definiującej w otoczeniu $\overline{D}$. Szerokie omówienie tego problemu znajduje się w [**HST14**].

4.2. Funkcje plurisubharmoniczne i obszary pseudowypukłe

4.2.1. Funkcje plurisubharmoniczne.

Definicja 4.2.1.1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Funkcję $u : D \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}$ nazywamy *plurisubharmoniczną*, jeżeli jest półciągła z góry oraz jest subharmoniczna na przecięciu D z każdą prostą zespoloną, tzn. funkcja

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda X \in D\} \ni \lambda \longmapsto u(a + \lambda X) \in \mathbb{R}_{-\infty}$$

jest subharmoniczna dla dowolnych $a \in D$ i $X \in \mathbb{C}^n$ (jeśli dziedzina jest pusta to przyjmujemy, że ten warunek jest spełniony).

Uwaga 4.2.1.2. Funkcja $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^2$ jest plurisubharmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{L}u(a; X) \geqslant 0, \quad a \in D,\ X \in \mathbb{C}^n.$$

4.2.2. Regularyzacja funkcji plurisubharmonicznych. Istnieją funkcje $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ takie, że

- χ_ε jest radialna, tzn. $\chi_\varepsilon(z) = \chi_\varepsilon(w)$, o ile $|z| = |w|$,
- $\chi_\varepsilon > 0$ na $\varepsilon\mathbb{B}_n$,
- $\chi_\varepsilon = 0$ poza $\varepsilon\mathbb{B}_n$,
- $\int_{\mathbb{C}^2} \chi_\varepsilon = 1$.

Niech $D_\varepsilon := \{z \in D : \operatorname{dist}(z, \partial D) > \varepsilon\}$ dla małych $\varepsilon > 0$. Dla funkcji $u \in \mathcal{PSH}(D)$ kładziemy

$$u_\varepsilon(z) := \int_{\varepsilon\mathbb{B}_n} u(z + w)\chi_\varepsilon(w)dw = \int_D u(w)\chi_\varepsilon(z - w)dw, \quad z \in D_\varepsilon.$$

Wtedy $u_\varepsilon \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}^\infty(D_\varepsilon)$ oraz $u_\varepsilon \searrow u$, gdy $\varepsilon \searrow 0$, zob. [**Rud08**, p. 376].

4.2.3. Obszary pseudowypukłe. Referencja: [**JJ01**, Section 4.1].

Definicja 4.2.3.1. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *pseudowypukły*, jeśli

$$-\log \operatorname{dist}(\cdot, \partial D) \in \mathcal{PSH}(D).$$

Definicja 4.2.3.2. Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. Funkcja $u : D \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}$ jest *wyczerpująca* dla D, gdy

$$\{z \in D : u(z) < t\} \subset\subset D$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.2.3.3. *Dla obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ następujące warunki są równoważne*
(*a*) *D jest pseudowypukły,*
(*b*) *istnieje plurisubharmoniczna funkcja wyczerpująca dla D,*
(*c*) *istnieje ciągła plurisubharmoniczna funkcja wyczerpująca dla D.*

Propozycja 4.2.3.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Wówczas*
(*a*) *jeśli $n = 1$, to D jest pseudowypukły.*
(*b*) *jeśli D jest wypukły, to jest pseudowypukły.*
(*c*) *jeśli D jest silnie pseudowypukły, to jest pseudowypukły.*
(*d*) *jeżeli $f \in \mathcal{O}(D, G)$, gdzie $G \subset \mathbb{C}^k$ jest obszarem pseudowypukłym, to zbiór otwarty $f^{-1}(G)$ jest pseudowypukły* (*tzn. każda jego składowa jest obszarem pseudowypukłym*)*.*
(*e*) *gdy D jest pseudowypukły i $u \in \mathcal{PSH}(D)$, zbiór otwarty $\{z \in D : u(z) < 0\}$ jest pseudowypukły.*

4.2.4. Obszary Hartogsa-Laurenta.

Propozycja 4.2.4.1 ([**Par03**], Proposition 1.1.10(2))**.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem oraz $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}$ funkcjami półciągłymi z góry takimi, że $u + v < 0$. Wówczas obszar Hartogsa-Laurenta*

$$\{(z, \lambda) \in D \times \mathbb{C} : e^{v(z)} < |\lambda| < e^{-u(z)}\}$$

jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy D jest pseudowypukły oraz $u, v \in \mathcal{PSH}(D)$.

4.2.5. Kontinuitätssatz. Dla zbiorów $A_j, A \subset \mathbb{R}^m$ niech $A_j \to A$ oznacza zbieżność w sensie odległości Hausdorffa.

Twierdzenie 4.2.5.1 (Kontinuitätssatz, [**JJ01**], Theorem 4.1.19)**.** *Dla każdego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ następujące warunki są równoważne*
(*a*) *D jest pseudowypukły,*
(*b*) *dla dowolnych: $k \in \mathbb{N}$, obszaru ograniczonego $G \subset \mathbb{C}^k$ i odwzorowań $f_j \in \mathcal{O}(G, D) \cap \mathcal{C}(\overline{G}, D)$, $j \in \mathbb{N}$, zachodzi implikacja*
jeśli $f_j(\overline{G}) \to A$ i $f_j(\partial G) \to A_0$, gdzie A jest ograniczony i $A_0 \subset\subset D$, to $A \subset\subset D$,
(*c*) *dla dowolnych różnowartościowych odwzorowań $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, takich, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(\overline{\mathbb{D}}) \subset D$ zachodzi implikacja*
jeśli $f_j(\overline{\mathbb{D}}) \to A$ i $f_j(\mathbb{T}) \to A_0$, gdzie A jest ograniczony i $A_0 \subset\subset D$, to $A \subset\subset D$.

4.2.6. Własność taut.

Definicja 4.2.6.1. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *taut*, jeżeli rodzina $\mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest normalna, tzn. dla dowolnego ciągu $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ zachodzi co najmniej jeden z warunków

(a) istnieje podciąg f_{j_k} zbieżny niemal jednostajnie do $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$,
(b) istnieje podciąg f_{j_k} rozbieżny jednostajnie na zbiorach zwartych, tj. dla dowolnych zbiorów zwartych $K \subset \mathbb{D}$, $L \subset D$ istnieje k_0 takie, że $f_{j_k}(K) \cap L = \emptyset$, $k \geqslant k_0$.

Uwaga 4.2.6.2. Obszar wypukły i ograniczony jest taut, z kolei obszar taut jest pseudowypukły [**JP13**, Section 3.2].

4.2.7. Lemat Hopfa.

Lemat 4.2.7.1 (Lemat Hopfa, [**BN97**], s. 26)**.** *Niech* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$*,* $m \geqslant 2$*, będzie obszarem ograniczonym klasy* $\mathcal{C}^2$ *oraz* $u < 0$ *funkcją subharmoniczną w* Ω*. Wtedy istnieje* $c > 0$ *takie, że*

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{u(a - t\nu_\Omega(a))}{t} \leqslant -c, \quad a \in \partial\Omega.$$

Wniosek 4.2.7.2 (Lemat Hopfa dla koła)**.** *Niech* $u < 0$ *będzie funkcją subharmoniczną na* $\mathbb{D}$*. Wtedy istnieje* $c > 0$ *takie, że*

$$u(\lambda) \leqslant -c(1 - |\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

4.3. Odwzorowania holomorficzne

4.3.1. Lemat Schwarza-Picka.

Lemat 4.3.1.1 (Lemat Schwarza-Picka, [**JP13**], Lemma 1.1.1)**.** *Niech* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$*. Wtedy*

(a) $\boldsymbol{p}(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) \leqslant \boldsymbol{p}(\lambda_1, \lambda_2)$*,* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$*.*
(b) $\boldsymbol{\gamma}(f(\lambda))|f'(\lambda)| \leqslant \boldsymbol{\gamma}(\lambda)$*,* $\lambda \in \mathbb{D}$*.*
(c) *następujące warunki są równoważne*
  (i) $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*,*
  (ii) $\boldsymbol{p}(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = \boldsymbol{p}(\lambda_1, \lambda_2)$*,* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$*,*
  (iii) $\boldsymbol{p}(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = \boldsymbol{p}(\lambda_1, \lambda_2)$ *dla pewnych różnych* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$*,*
  (iv) $\boldsymbol{\gamma}(f(\lambda))|f'(\lambda)| = \boldsymbol{\gamma}(\lambda)$*,* $\lambda \in \mathbb{D}$*,*
  (v) $\boldsymbol{\gamma}(f(\lambda))|f'(\lambda)| = \boldsymbol{\gamma}(\lambda)$ *dla pewnego* $\lambda \in \mathbb{D}$*.*

4.3.2. Lemat Schwarza dla kuli.

Lemat 4.3.2.1 (Lemat Schwarza dla kuli, por. [**Rud08**], Theorem 8.1.4)**.** *Niech* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{B}_n(a, r))$*. Wówczas*

$$|f'(0)| \leqslant \sqrt{r^2 - |f(0) - a|^2}.$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że $|f'(0)| \leqslant \sqrt{1-|f(0)|^2}$ dla $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{B}_n)$. Odwzorowanie $g := \chi_{f(0)} \circ f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}_n$ posyła 0 w 0, skąd $|g'(0)| \leqslant 1$ (zasada maksimum dla funkcji subharmonicznej $|g(\lambda)/\lambda|$). Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$|g'(0)|^2 = |\chi'_{f(0)}(f(0))f'(0)|^2 = \frac{|f'(0)|^2}{1-|f(0)|^2} + \frac{|\langle f(0), f'(0)\rangle|^2}{(1-|f(0)|^2)^2},$$

co kończy dowód. □

4.3.3. Nakrycia holomorficzne. Referencje: [**JP13**, Remark 3.2.3(e)] oraz [**NR12**, Part II, Chapter 5 i Part III, Chapter 10].

Definicja 4.3.3.1. Niech $\Pi : \widetilde{D} \longrightarrow D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym między obszarami $\widetilde{D}, D \subset \mathbb{C}^n$. Określamy Π mianem *nakrycia holomorficznego*, jeśli dla dowolnego punktu $a \in D$ istnieje jego otoczenie $U \subset D$ i parami rozłączne zbiory otwarte $\widetilde{U}_j \subset \widetilde{D}$, $j \in J$, takie, że $\Pi^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} \widetilde{U}_j$ oraz $\Pi|_{\widetilde{U}_j} : \widetilde{U}_j \longrightarrow U$ jest biholomorfizmem dla każdego j.

Dowodzi się, że moc zbioru $\Pi^{-1}(\{a\})$ nie zależy od wyboru $a \in D$. Nazywamy ją *krotnością* nakrycia Π.

Twierdzenie 4.3.3.2 (Podnoszenie odwzorowań holomorficznych)**.** *Niech $\widetilde{D}, D \subset \mathbb{C}^n$ będą obszarami, a $\Pi : \widetilde{D} \longrightarrow D$ nakryciem holomorficznym. Niech ponadto $f \in \mathcal{O}(G, D)$, gdzie $G \subset \mathbb{C}^k$ jest obszarem jednospójnym. Wówczas dla dowolnych punktów $a \in G$, $\widetilde{a} \in \widetilde{D}$ spełniających warunek $f(a) = \Pi(\widetilde{a})$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(G, \widetilde{D})$, zwane podniesieniem f, takie, że $f = \Pi \circ \widetilde{f}$ oraz $\widetilde{f}(a) = \widetilde{a}$.*

Twierdzenie 4.3.3.3 (Twierdzenie uniformizacyjne)**.** *Każdy obszar $D \subset \mathbb{C}$ można nakryć holomorficznie zbiorem $\mathbb{D}$ lub $\mathbb{C}$, przy czym D jest nakryty kołem jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\#(\mathbb{C} \setminus D) \geqslant 2$.*

Uwaga 4.3.3.4. Nakrycie holomorficzne $\Pi : \mathbb{D} \longrightarrow D$ obszaru płaskiego D, niebędące biholomorfizmem, jest krotności nieskończonej przeliczalnej. Przypuśćmy bowiem, że Π jest skończonej krotności k. Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ będzie krzywą zamkniętą, tzn. odwzorowaniem ciągłym takim, że $\gamma(0) = \gamma(1) =: a$. Przebiegając krzywą k razy, można przyjąć, że $\#\gamma^{-1}(\{a\}) \geqslant k+1$. Podnosimy γ przez Π do krzywej $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}$, tzn. $\gamma = \Pi \circ \widetilde{\gamma}$. Wynika stąd, że $\widetilde{\gamma}$ zawężona do pewnego podprzedziału jest zamknięta. Ta restrykcja jest ściągalna, wobec czego γ też. Oznacza to, że D jest jednospójny, sprzeczność.

4.3.4. Funkcje holomorficzne klasy $\mathcal{C}^\alpha$. Referencja: [**Gol69**, Chapter IX, §5].

Poniższe funkcje prowadzą w $\mathbb{C}$. Stałe M, K wyliczono z dowodów. Dla nas jest ważne to, że nie zależą od funkcji.

Twierdzenie 4.3.4.1 (Hardy-Littlewood)**.** *Niech* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$. *Wtedy dla* $\alpha \in (0,1]$ *następujące warunki są równoważne*

$$\exists M > 0 : |f(e^{it_1}) - f(e^{it_2})| \leqslant M|t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \tag{4.3.1}$$

$$\exists K > 0 : |f'(\lambda)| \leqslant K(1 - |\lambda|)^{\alpha - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{D}. \tag{4.3.2}$$

Co więcej, jeżeli dane jest M *spełniające* (4.3.1), *to* K *może być wybrane jako*

$$2^{\frac{1-3\alpha}{2}} \pi^\alpha M \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt,$$

a jeśli mamy K *spełniające* (4.3.2), *to* M *można zdefiniować jako* $(2/\alpha + 1)K$.

Twierdzenie 4.3.4.2 (Hardy-Littlewood)**.** *Niech* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ *będzie takie, że*

$$|f(e^{it_1}) - f(e^{it_2})| \leqslant M|t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

dla pewnych $\alpha \in (0,1]$ *i* $M > 0$. *Wtedy*

$$|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| \leqslant K|\lambda_1 - \lambda_2|^\alpha, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \overline{\mathbb{D}},$$

gdzie

$$K := \max\left\{2^{1-2\alpha}\pi^\alpha M, 2^{\frac{3-5\alpha}{2}}\pi^\alpha \alpha^{-1} M \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt\right\}.$$

Twierdzenie 4.3.4.3 (Privalov)**.** *Niech* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ *będzie takie, że* $\operatorname{Re} f$ *rozszerza się na* $\overline{\mathbb{D}}$ *i*

$$|\operatorname{Re} f(e^{it_1}) - \operatorname{Re} f(e^{it_2})| \leqslant M|t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

dla pewnych $\alpha \in (0,1)$ *i* $M > 0$. *Wówczas* f *rozszerza się na* $\overline{\mathbb{D}}$ *oraz*

$$|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| \leqslant K|\lambda_1 - \lambda_2|^\alpha, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \overline{\mathbb{D}},$$

gdzie

$$K := \max\left\{2^{1-2\alpha}\pi^\alpha, 2^{\frac{3-5\alpha}{2}}\pi^\alpha \alpha^{-1} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt\right\} \left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) 2^{\frac{3-3\alpha}{2}} \pi^\alpha M \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt.$$

4.4. Podrozmaitości całkowicie rzeczywiste

Referencje: [**Lem84**], [**Web78**].

Lemat 4.4.1. *Niech* $M \subset \mathbb{C}^m$ *będzie całkowicie rzeczywistą lokalną podrozmaitością klasy* $\mathcal{C}^\omega$ *wymiaru rzeczywistego* m *i niech* $z \in M$. *Wówczas istnieją otoczenia* $U, V \subset \mathbb{C}^m$ *punktów* $0, z$ *odpowiednio oraz biholomorfizm* $\Phi : U \longrightarrow V$ *taki, że* $\Phi(\mathbb{R}^m \cap U) = M \cap V$.

Dowód. Istnieją otoczenia $U_0 \subset \mathbb{R}^m$, $V_0 \subset \mathbb{C}^m$ punktów 0, z odpowiednio oraz dyfeomorfizm $\widetilde{\Phi} : U_0 \longrightarrow M \cap V_0$ klasy $\mathcal{C}^\omega$ taki, że $\widetilde{\Phi}(0) = z$. Odwzorowanie $\widetilde{\Phi}$ rozszerza się w naturalny sposób do Φ holomorficznego w otoczeniu 0 w $\mathbb{C}^m$. Mamy

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z_k}(0) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}(0) = \frac{\partial \widetilde{\Phi}_j}{\partial x_k}(0), \quad j, k = 1, \ldots, m.$$

Przypuśćmy, że pochodna zespolona $\Phi'(0)$ nie jest izomorfizmem. Wtedy istnieje $X \in (\mathbb{C}^m)_*$ takie, że $\Phi'(0)X = 0$, więc

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial z_k}(0) X_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x_k}(0) \operatorname{Re} X_k}_{=:A} + i \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x_k}(0) \operatorname{Im} X_k}_{=:B}.$$

Wektory

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x_k}(0), \quad k = 1, \ldots, m$$

tworzą bazę $T_M^{\mathbb{R}}(z)$, skąd $A, B \in T_M^{\mathbb{R}}(z)$, w konsekwencji $A, B \in iT_M^{\mathbb{R}}(z)$. Skoro M jest całkowicie rzeczywista, tzn. $T_M^{\mathbb{R}}(z) \cap iT_M^{\mathbb{R}}(z) = \{0\}$, mamy $A = B = 0$. Z własności bazy mamy $\operatorname{Re} X_k = \operatorname{Im} X_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, sprzeczność. $\square$

Lemat 4.4.2 (Zasada odbicia). *Niech $M \subset \mathbb{C}^m$ będzie całkowicie rzeczywistą lokalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^\omega$ wymiaru rzeczywistego m. Niech $V_0 \subset \mathbb{C}$ będzie otoczeniem punktu $\zeta_0 \in \mathbb{T}$, a $g : \overline{\mathbb{D}} \cap V_0 \longrightarrow \mathbb{C}^m$ odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy, że $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \cap V_0)$ i $g(\mathbb{T} \cap V_0) \subset M$. Wtedy g rozszerza się holomorficznie przez $\mathbb{T} \cap V_0$.*

Dowód. Ze względu na zasadę identyczności wystarczy rozszerzyć g lokalnie przez dowolny punkt $\zeta_0 \in \mathbb{T} \cap V_0$. Dla $g(\zeta_0) \in M$ weźmy Φ jak w Lemacie 4.4.1. Niech $V_1 \subset V_0$ będzie otoczeniem ζ_0 takim, że $g(\overline{\mathbb{D}} \cap V_1)$ zawiera się w obrazie Φ. Odwzorowanie $\Phi^{-1} \circ g$ jest holomorficzne w $\mathbb{D} \cap V_1$ i ma wartości rzeczywiste na $\mathbb{T} \cap V_1$. Ze standardowej zasady odbicia, rozszerza się ono przez $\mathbb{T} \cap V_1$ do h. Wówczas $\Phi \circ h$ jest rozszerzeniem g w otoczeniu ζ_0. $\square$

4.5. Przestrzeń Sobolewa

Referencja: [**Maz85**].

Przestrzeń Sobolewa $W^{2,2}(\mathbb{T}) = W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ jest przestrzenią odwzorowań $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^m$, których pierwsze dwie pochodne w sensie dystrybucyjnym należą do $L^2(\mathbb{T})$ (używamy tu standardowego utożsamienia funkcji na $\mathbb{T}$ z funkcjami na przedziale $[0, 2\pi]$). W takiej sytuacji f jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Jest to zespolona przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle_W := \langle f, g \rangle_L + \langle f', g' \rangle_L + \langle f'', g'' \rangle_L,$$

gdzie

$$\langle f, g \rangle_L := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f(e^{it}), g(e^{it}) \rangle dt.$$

Niech $\|\cdot\|_L$, $\|\cdot\|_W$ oznaczają normy indukowane przez $\langle \cdot\,, - \rangle_L$ i $\langle \cdot\,, - \rangle_W$. Następująca charakteryzacja wynika z tożsamości Parsevala

$$W^{2,2}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2 + k^4) |a_k|^2 < \infty \right\},$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}^m$ są współczynnikami Fouriera f, tj.

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Tożsamość Parsevala daje dokładnie

$$\|f\|_W = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2+k^4)|a_k|^2}, \quad f \in W^{2,2}(\mathbb{T}).$$

Zauważmy, że $W^{2,2}(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^{1/2}(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$ i oba zawierania są ciągłe (w szczególności, $\mathbb{R}$-analityczne). Mamy również

$$\|f\|_{\mathbb{T}} \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|a_k|^2} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|f\|_W. \tag{4.5.1}$$

Teraz chcemy pokazać, że istnieje $C > 0$ takie, że

$$\|h^\alpha\|_W \leqslant C^{|\alpha|} \|h_1\|_W^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \|h_{2n}\|_W^{\alpha_{2n}}, \quad h \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}.$$

Dzięki indukcji wystarczy dowieść, że jest $\widetilde{C} > 0$ spełniające

$$\|h_1 h_2\|_W \leqslant \widetilde{C} \|h_1\|_W \|h_2\|_W, \quad h_1, h_2 \in W^{2,2}(\mathbb{T}, \mathbb{C}).$$

Używając (4.5.1), szacujemy

$$\begin{aligned}
\|h_1 h_2\|_W^2 &= \|h_1 h_2\|_L^2 + \|h_1' h_2 + h_1 h_2'\|_L^2 + \|h_1'' h_2 + 2h_1' h_2' + h_1 h_2''\|_L^2 \\
&\leqslant C_1 \|h_1 h_2\|_{\mathbb{T}}^2 + (\|h_1' h_2\|_L + \|h_1 h_2'\|_L)^2 + (\|h_1'' h_2\|_L + \|2h_1' h_2'\|_L + \|h_1 h_2''\|_L)^2 \\
&\leqslant C_1 \|h_1\|_{\mathbb{T}}^2 \|h_2\|_{\mathbb{T}}^2 + (C_2 \|h_1'\|_L \|h_2\|_{\mathbb{T}} + C_2 \|h_1\|_{\mathbb{T}} \|h_2'\|_L)^2 \\
&\qquad + (C_2 \|h_1''\|_L \|h_2\|_{\mathbb{T}} + C_2 \|2h_1' h_2'\|_{\mathbb{T}} + C_2 \|h_1\|_{\mathbb{T}} \|h_2''\|_L)^2 \\
&\leqslant C_3 \|h_1\|_W^2 \|h_2\|_W^2 + (C_4 \|h_1\|_W \|h_2\|_W + C_4 \|h_1\|_W \|h_2\|_W)^2 + \\
&\qquad + (C_4 \|h_1\|_W \|h_2\|_W + 2C_2 \|h_1'\|_{\mathbb{T}} \|h_2'\|_{\mathbb{T}} + C_4 \|h_1\|_W \|h_2\|_W)^2 \\
&\leqslant C_5 \|h_1\|_W^2 \|h_2\|_W^2 + (2C_4 \|h_1\|_W \|h_2\|_W + 2C_2 \|h_1'\|_{\mathbb{T}} \|h_2'\|_{\mathbb{T}})^2
\end{aligned}$$

ze stałymi $C_1, \ldots, C_5$. Rozwijając $h_j(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(j)} \zeta^k$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $j = 1, 2$, otrzymujemy

$$\|h_j'\|_{\mathbb{T}} \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k||a_k^{(j)}| \leqslant \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{k^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k^4 |a_k^{(j)}|^2} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|h_j\|_W$$

i ostatecznie $\|h_1 h_2\|_W^2 \leqslant C_6 \|h_1\|_W^2 \|h_2\|_W^2$ dla stałej C_6.

4.6. Macierze

Definicja 4.6.1. Odwzorowanie $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy *izometrią*, jeżeli $|A(x) - A(y)| = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Odwzorowanie $U : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ jest *unitarne*, jeśli jest $\mathbb{C}$-liniowe i $U^*U = UU^* = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$.

Uwaga 4.6.2. Izometria $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem afinicznym, którego część liniowa Q jest macierzą ortogonalną, tzn. $Q^TQ = QQ^T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$. Istotnie, odwzorowanie $Q := A - A(0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia $|Q(x) - Q(y)|^2 = |x - y|^2$ oraz $|Q(x)|^2 = |x|^2$ dla $x, y \in \mathbb{R}^m$. Wynika stąd, że $\langle Q(x), Q(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ i dalej

$$|Q(\alpha x) + Q(\beta y) - Q(\alpha x + \beta y)|^2 = |\alpha x + \beta y - (\alpha x + \beta y)|^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

co dowodzi, że Q jest liniowe i ortogonalne.

Propozycja 4.6.3 ([**Lem81**], Théorème B)**.** *Niech $A : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie $\mathbb{R}$-analitycznym odwzorowaniem takim, że macierz $A(\zeta)$ jest samosprzężona i silnie dodatnia dla każdego $\zeta \in \mathbb{T}$. Wówczas istnieje $H \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)})$ takie, że* $\det H \neq 0$ *w $\overline{\mathbb{D}}$ oraz $HH^* = A$ na $\mathbb{T}$.*

Uwaga 4.6.4. W [**Lem81**] stwierdzono, że odwzorowanie H jest $\mathbb{R}$-analityczne w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$ i holomorficzne w $\mathbb{D}$. Wynika stąd, że $H \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$. Rzeczywiście, skoro odwzorowanie $G(\lambda) := \partial H(\lambda)/\partial\overline{\lambda}$ jest $\mathbb{R}$-analityczne w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$ i $G = 0$ na $\mathbb{D}$, zasada identyczności dla funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych implikuje $G = 0$ w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$.

Propozycja 4.6.5 ([**Tad86**], Lemma 2.1)**.** *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie macierzą symetryczną. Wtedy*

$$\|A\| = \sup\{|z^TAz| : z \in \mathbb{C}^n,\ |z| = 1\}.$$

Spis symboli

Symbole ogólne

$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ = zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$:= zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{R}$:= zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}_{-\infty} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\mathbb{C}$:= zbiór liczb zespolonych
$x_1, \ldots, x_m$:= współrzędne punktu $x \in \mathbb{R}^m$
$z_1, \ldots, z_n$:= współrzędne punktu $z \in \mathbb{C}^n$
$\operatorname{Re} z := (\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n)$ = część rzeczywista
$\operatorname{Im} z := (\operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Im} z_n)$ = część urojona
$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$, $x \in \mathbb{R}^m$ = norma euklidesowa
$\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ = koło jednostkowy
$\mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ = okrąg jednostkowy
$\mathbb{B}_n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ = jednostkowa kula euklidesowa
$B_n(a, r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r\}$ = kula
$P_n(a, r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r,\ j = 1, \ldots, n\}$ = polidysk
$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$ = iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^m$
$\langle z, w \rangle := z_1 \overline{w}_1 + \ldots + z_n \overline{w}_n$ = zespolony iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$
$z \bullet w := z_1 w_1 + \ldots + z_n w_n$, $z, w \in \mathbb{C}^n$
$\|f\|_S := \sup_S |f|$
$\operatorname{dist}(x, S) := \inf\{|x - s| : s \in S\}$ = odległość punktu od zbioru
∂S := brzeg zbioru
$\#S$:= moc zbioru
$S_* := S \setminus \{0\}$
$S \subset\subset T \iff S$ jest względnie zwarty w T
$\nabla u := (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_m)$ = gradient
$\mathcal{H}u(a; X) = X^T \mathcal{H}u(a) X := \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(a) X_j X_k$ = hesjan
$\mathcal{L}u(a; X) := \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) X_j \overline{X}_k$ = forma Leviego
$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$

$\mathcal{C}^\omega$:= klasa funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych
$\mathcal{O}(D, G)$:= zbiór funkcji holomorficznych : $D \longrightarrow G$
$\mathcal{O}(\overline{D}, G)$:= zbiór funkcji holomorficznych na otoczeniu $\overline{D}$ o wartościach w G
$\mathcal{O}(S) := \mathcal{O}(S, \mathbb{C}^n)$, gdzie n wynika z kontekstu, a S jest otwarty lub domknięty
$\mathcal{SH}(D)$:= zbiór funkcji subharmonicznych
$\mathcal{PSH}(D)$:= zbiór funkcji plurisubharmonicznych
$\mathrm{Aut}(D)$:= zbiór automorfizmów
id_S := funkcja identycznościowa
A^T := transpozycja
A^* := sprzężenie hermitowskie
$\|\cdot\|$:= norma operatorowa
$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$ = część całkowita

Rozdział 1

Rozdział 2

Rozdział 3

Bibliografia

[ALY13] J. Agler, Z. A. Lykova, N. J. Young, *Extremal holomorphic maps and the symmetrised bidisc*, Proc. Lond. Math. Soc. **106**, no. 4 (2013), 781–818.

[ALY14] J. Agler, Z. A. Lykova, N. J. Young, *3-extremal holomorphic maps and the symmetrised bidisc*, przyjęte do druku w J. Geom. Anal., arXiv:1307.7081.

[AY04] J. Agler, N. J. Young, *The hyperbolic geometry of the symmetrized bidisc*, J. Geom. Anal. **14**, no. 3 (2004), 375–403.

[AT94] E. Amar, P. J. Thomas, *A notion of extremal analytic discs related to interpolation in the ball*, Math. Ann. **300**, no. 1 (1994) 419–433.

[APS04] M. Andersson, M. Passare, R. Sigurdsson, *Complex convexity and analytic functionals*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[Bed84] E. Bedford, *Proper holomorphic mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **10**, no. 2 (1984), 157–175.

[BN97] S. R. Bell, R. Narasimhan, *Proper Holomorphic Mappings of Complex Spaces*, in *Complex manifolds*, Springer Science & Business Media, 1997.

[Boc38] S. Bochner, *A theorem on analytic continuation of functions in several variables*, Ann. Math. **39**, no. 2 (1938), 14–19.

[BS09] F. Bracci, A. Saracco, *Hyperbolicity in unbounded convex domains*, Forum Math. **21**, no. 5 (2009), 815–825.

[BD12] J. M. Burgués, R. J. Dwilewicz, *Geometry of semi-tube domains in* $\mathbb{C}^2$, Adv. Geom. **12**, no. 4 (2012), 685–702.

[Chi89] E. M. Chirka, *Complex Analytic Sets*, Kluwer Acad. Publishers, 1989.

[Cos04] C. Costara, *Dissertation*, Université Laval (2004).

[DF77] K. Diederich, J. E. Fornaess, *Pseudoconvex domains: an example with nontrivial Nebenhülle*, Math. Ann. **225**, no. 3 (1977), 275–292.

[Edi95] A. Edigarian, *On extremal mappings in convex ellipsoids*, Ann. Pol. Math. **62**, no. 1 (1995), 83–86.

[Edi04] A. Edigarian, *A note on C. Costara's paper: "The symmetrized bidisc and Lempert's theorem" [Bull. London Math. Soc. 36 (2004), 656–662]*, Ann. Pol. Math. **83**, no. 2 (2004), 189–191.

[EK09] A. Edigarian, P. Kliś, *Almost properness of extremal mappings*, Bull. Pol. Acad. Sc. Math. **57**, no. 2 (2009), 129–133.

[EKZ13] A. Edigarian, Ł. Kosiński, W. Zwonek, *The Lempert Theorem and the tetrablock*, J. Geom. Anal. **23**, no. 4 (2013), 1818–1831.

[FI01] C. de Fabritiis, A. Iannuzzi, *Quotients of the unit ball of* $\mathbb{C}^n$ *for a free action of* $\mathbb{Z}^n$, J. Anal. Math. **85**, no. 1 (2001), 213–224.

[For76] J. E. Fornæss, *Embedding strictly pseudoconvex domains in convex domains*, Amer. J. Math. **98**, no. 2 (1976), 529–569.

[For96] F. Forstneric, *Actions of* $(\mathbb{R},+)$ *and* $(\mathbb{C},+)$ *on complex manifolds*, Math. Z. **223**, no. 2 (1996), 123–153.

[Gar07] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Graduate Texts in Mathematics **236**, Springer-Verlag, 2007.
[Gol69] G. M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Transl. Math. Monogr. **26**, Amer. Math. Soc., Providence, 1969.
[HST14] T. Harz, N. Shcherbina, G. Tomassini, *On defining functions for unbounded pseudoconvex domains*, preprint (2014), arXiv:1405.2250v3.
[Hei91] P. Heinzner, *Geometric invariant theory on Stein spaces*, Math. Ann. **289**, no. 4 (1991), 631–662.
[HI97] P. Heinzner, A. Ianuzzi, *Integration of local actions on holomorphic fiber spaces*, Nagoya Math. J. **146** (1997), 31–53.
[Hör94] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1994.
[Ian02] A. Iannuzzi, *Induced local actions on taut and Stein manifolds.* Proc. Am. Math. Soc. **131**, no. 12 (2002), 3839–3843.
[IST04] A. Iannuzzi, A. Spiro, S. Trapani, *Complexification of holomorphic actions and the Bergman metric*, Int. J. Math. **15**, no. 8 (2004), 735–747.
[IT12] A. Iannuzzi, S. Trapani, *A classification of taut, Stein surfaces with a proper* $\mathbb{R}$-*action*, Math. Ann. **352**, no. 4 (2012), 965–986.
[Jac06] D. Jacquet, $\mathbb{C}$-*convex domains with* $\mathcal{C}^2$ *boundary*, Complex Var. Elliptic Equ. **51**, no. 4 (2006), 303–312.
[Jac08] D. Jacquet, *On complex convexity*, PhD Thesis, University of Stockholm (2008).
[JJ01] P. Jakóbczak, M. Jarnicki, *Lectures on holomorphic functions of several complex variables*, 2001, http://www2.im.uj.edu.pl/MarekJarnicki/scv.pdf.
[JJ02] P. Jakóbczak, M. Jarnicki, *Wstęp do teorii funkcji holomorficznych wielu zmiennych zespolonych*, Wydawnictwo UJ, 2002.
[JP93] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, de Gruyter Expositions in Mathematics **9**, Walter de Gruyter, 1993.
[JP00] M. Jarnicki, P. Pflug, *Extension of Holomorphic Functions*, de Gruyter Expositions in Mathematics **34**, Walter de Gruyter, 2000.
[JP13] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis — 2nd extended edition*, de Gruyter Expositions in Mathematics **9**, Walter de Gruyter, 2013.
[JPZ93] M. Jarnicki, P. Pflug, R. Zeinstra, *Geodesics for convex complex ellipsoids*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. **20**, no. 4 (1993), 535–543.
[Kob98] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Springer, New York, 1998.
[Koo98] P. Koosis, *Introduction to* H^p *spaces, Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
[KW13] Ł. Kosiński, T. Warszawski, *Lempert Theorem for strongly linearly convex domains*, Ann. Pol. Math. **107**, no. 2 (2013), 167–216.
[KWZ13] Ł. Kosiński, T. Warszawski, W. Zwonek, *Geometric properties of semitube domains*, przyjęte do druku w Adv. Geom., arXiv:1307.8359.
[KZ14] Ł. Kosiński, W. Zwonek, *Extremal holomorphic maps in special classes of domains*, preprint (2014), arXiv:1401.1657.
[KS04] N. G. Kruzhilin, P. A. Soldatkin, *Affine and holomorphic equivalence of tube domains in* $\mathbb{C}^2$, Math. Notes **75**, no. 5 (2004), 623–634.
[KS06] N. G. Kruzhilin, P. A. Soldatkin, *Holomorphic equivalence of tube domains in* $\mathbb{C}^2$, Proc. Steklov Inst. Math. **253**, no. 1 (2006), 90–99.
[Lem81] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. Fr. **109**, no. 4 (1981), 427–474.

[Lem82] L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Anal. Math. **8**, no. 4 (1982), 257–261.

[Lem84] L. Lempert, *Intrinsic distances and holomorphic retracts*, in *Complex analysis and applications '81* (*Varna, 1981*), 341–364, Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1984.

[Łoj91] S. Łojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser, 1991.

[Mar75] D. E. Marshall, *An elementary proof of the Pick-Nevanlinna interpolation theorem*, Mich. Math. J. **21**, no. 3 (1975), 219–223.

[Maz85] V. Mazya, *Sobolev Spaces*, Springer Series in Soviet Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985.

[MO09] C. Miebach , K. Oeljeklaus, *On proper* $\mathbb{R}$*-actions on hyperbolic Stein surfaces*, Doc. Math. **14** (2009), 673–689.

[NR12] T. Napier, M. Ramachandran, *An Introduction to Riemann Surfaces*, Birkhäuser, 2012.

[Nev19] R. Nevanlinna, *Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*, Ann. Acad. Sci. Fenn **A 13**, no. 1 (1919), 1–71.

[Nev29] R. Nevanlinna, *Über beschränkte analitysche Funktionen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **A 32**, no. 7 (1929), 1–75.

[Nik06] N. Nikolov, *The symmetrized polydisc cannot be exhausted by domains biholomorphic to convex domains*, Ann. Pol. Math. **88**, no. 3 (2006), 279–283.

[Par03] S.-H. Park, *Tautness and Kobayashi hyperbolicity*, PhD Thesis, University of Oldenburg (2003).

[PZ12] P. Pflug, W. Zwonek, *Exhausting domains of the symmetrized bidisc*, Ark. Mat. **50**, no. 2 (2012), 397–402.

[Pic16] G. Pick, *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann. **77**, no. 1 (1916), 7–23.

[Pol83] E. A. Poletsky, *The Euler-Lagrange equations for extremal holomorphic mappings of the unit disk*, Mich. Math. J. **30**, no. 3 (1983), 317–333.

[RW83] H. L. Royden, P.-M. Wong, *Carathéodory and Kobayashi metric on convex domains*, preprint (1983).

[Rud08] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Shi99] S. Shimizu, *Automorphisms and equivalence of tube domains with bounded base*, Math. Ann. **315**, no. 2 (1999), 295–320.

[Shi00] S. Shimizu, *A classification of two-dimensional tube domains*, Am. J. Math. **122**, no. 6 (2000), 1289–1308.

[Sch17] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. für Math. **147** (1917), 205–232.

[Sch18] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. für Math. **148** (1918), 122–145.

[Sno82] D.M. Snow, *Reductive group action on Stein spaces*, Math. Ann. **259**, no. 1 (1982), 79–97.

[Tad86] E. Tadmor, *Complex symmetric matrices with strongly stable iterates*, Linear Algebra Appl. **78** (1986), 65–77.

[War14] T. Warszawski, *Some remarks on m-extremals and m-geodesics*, preprint (2014).

[Web78] S. M. Webster, *On the reflection principle in several complex variables*, Proc. Am. Math. Soc. **71**, no. 1 (1978), 26–28.

[Zwo00] W. Zwonek, *Completeness, Reinhardt domains and the method of complex geodesics in the theory of invariant functions*, Diss. Math. **388** (2000).

[Zyg02] A. Zygmund, ed. R. A. Fefferman, *Trigonometric series. Vol. I, II*, Cambridge Mathematical Library (3rd ed.), Cambridge University Press, 2002.