Łukasz Kosiński

# GEOMETRYCZNA TEORIA FUNKCJI W SPECJALNYCH KLASACH OBSZARÓW

Praca Doktorska

Promotor:
Włodzimierz Zwonek

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
Kraków 2010

*Tą drogą chciałbym złożyć serdeczne podziękowania*
*Profesorowi Włodzimierzowi Zwonkowi*
*za wiele lat opieki, ogromną życzliwość, poświęcony czas*
*oraz za wysiłek włożony w mój rozwój.*

# Spis treści

# Wstęp

Niniejsza praca składa się z trzech, lekko powiązanych, aczkolwiek niezależnych od siebie rozdziałów. Każdy z nich jest częścią, szeroko rozumianej, geometrycznej teorii funkcji.

Pierwszy rozdział poświęcony jest badaniu geometrii obszarów quasi-kołowych. Rozpoczynamy od uogólnienia klasycznego już wyniku S. Bella o rozszerzaniu odwzorowań holomorficznych właściwych wzdłuż brzegu. Najważniejszym wynikiem tej części jest twierdzenie mówiące, że w dość duże klasie obszarów brzegi Szyłowa i Bergmana są niezmiennikami odwzorowań holomorficznych właściwych. Klasa ta obejmuje quasi-zbalansowane obszary z ciągłym funkcjonałem Minkowskiego. Wynik ten pozwala natychmiast uzyskać opis brzegu Szyłowa wielu obszarów rozważanych ostatnio w analizie zespolonej (jak choćby zsymetryzowanego polidysku bądź tetrabloku). Może być także zastosowany do wykazania braku istnienia odwzorowań holomorficznych właściwych między odpowiednimi obszarami. Jak pokazujemy, łatwo wynika z niego wiele klasycznych i nietrywialnych twierdzeń.

Jednakże najciekawszym zastosowaniem przedstawionych wyników jest ich użyteczność w studiowaniu geometrii tetrabloku. Jest to obszar w $\mathbb{C}^3$, dość naturalnie pojawiający się w teorii funkcji. Jego badanie zainicjował A. Abouhajar w swojej pracy doktorskiej [**Abo**]. Geometria tetrabloku była także ostatnio studiowania w [**Ab-Wh-Yo**], [**You**] oraz [**Edi-Zwo 3**].

W naszej pracy uzyskujemy twierdzenie typu-Alexandera mówiące, że w tetrabloku nie istnieją nietrywialne odwzorowania holomorficzne właściwe. Otrzymujemy także naturalny związek pomiędzy automorfizmami tetrabloku a automorfizmami klasycznego obszaru Cartana drugiego typu. Przy okazji otrzymujemy twierdzenie lokalizacyjne dla klasycznych obszarów Cartana. Jest ono istotnym uogólnieniem głównego wyniku A.E. Tumanova i G.M. Khenkina z [**Tum-Hen**]. Pierwszy rozdział kończymy badaniem $\mathbb{C}$-wypukłości tetrabloku. Większość wyników przedstawionych w tym rozdziale można znaleźć w [**Kos 6**].

Kolejny rozdział może być traktowany jako bezpośrednia kontynuacja wyników z [**Isa-Kru**]. Przypomnijmy, że A.V. Isaev i N.G. Kruzhilin uzyskali dokładną klasyfikację wszystkich nieelementarnych holomorficznych odwzorowań właściwych pomiędzy hiperbolicznymi obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Rozszerzamy tutaj tę klasyfikację, opuszczając założenie hiperboliczności obszarów.

Ponadto, z danym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n$ kojarzymy pewne stałe i następnie pokazujemy, że są one niezmiennikami odwzorowań holomorficznych właściwych. Uzyskujemy także pewne ogólne wyniki dotyczące istnienia odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy dowolnymi obszarami w $\mathbb{C}^n$. Wyniki z tej części zostały opublikowane w [**Kos 4**].

W ostatniej części pracy zajmujemy się klasycznym już problemem Serre'a. Uzyskujemy dokładną klasyfikację niehiperbolicznych obszarów Reinhardta dla których rozwiązanie problemu Serre'a jest pozytywne. Można więc traktować ten rozdział jako kontynuację pracy P. Pfluga i W. Zwonka. Przypomnijmy, że w [**Pfl-Zwo**] autorzy rozwiązali ten problem w klasie pseudowypukłych hiperbolicznych obszarów Reinhardta.

Istnieje duży związek pomiędzy odpowiedzią na problemem Serre'a a strukturą grupy automorfizmów włókna holomorficznej wiązki włóknistej. Dlatego też duże znaczenie mają dla nas wyniki uzyskane w Rozdziale 2 - używając opisu odwzorowań holomorficznych właściwych uzyskujemy opis grupy automorfizmów. Bardzo ciekawy wydaje się otrzymany tu związek pomiędzy grupą automorfizmów pewnej klasy obszarów Reinhardta a klasycznym równaniem Pella.

Jednakże sama znajomość struktury grupy automorfizmów włókna często nie jest wystarczająca. Tak jest w Sekcji 3.3 - używając metody z [**Ste 3**] konstruujemy tu silnie plurisubharmoniczną wyczerpującą funkcję.

Przy okazji naszych rozważań otrzymujemy dokładny opis wszystkich niehiperbolicznych pseudowypukłych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$, których grupa automorfizmów nie jest zwarta.

Wyniki z tej części pracy zamieszczone są w [**Kos 5**].

Wreszcie w Dodatku zamieściliśmy najważniejsze informacje dotyczące rozważanych obiektów. Przybliżamy jedynie te, które nie mieszczą się w standardowym kursie analizy zespolonej (podstawą jest dla nas wykład [**Jak-Jar**]), a które wykorzystamy w pracy.

Na końcu przedstawiamy, dla wygody Czytelnika, wykaz podstawowych symboli i oznaczeń. Całość zamyka spis prac cytowanych.

**Podziękowania**

Jak już wspomniałem, praca ta nie powstałaby bez wielkiej pomocy i olbrzymiej ilości czasu poświęconego przez mojego opiekuna naukowego profesora Włodzimierza Zwonka. Dlatego, raz jeszcze pragnę wyrazić Mu za to ogromną wdzięczność!

Chciałbym także złożyć serdeczne podziękowania wszystkim uczestnikom tzw. „Małego Seminarium". Wymienię tu zwłaszcza dr. Piotra Juchę, dr. Pawła Zapałowskiego oraz prof. Armena Edigariana - wiele skorzystałem dzięki przeprowadzonym z Nimi rozmowom. Dużo zawdzięczam także nauczycielowi matematyki z liceum - dr. Bogdanowi Janczarowi oraz nauczycielowi analizy matematycznej - dr. Mieczysławowi Jędrzejowskiemu.

I naprawdę szczególne wyrazy wdzięczności należą sie profesorowi Markowi Jarnickiemu! Jego celne uwagi i komentarze miały bardzo istotny wpływ na kierunek rozwoju moich badań naukowych.

Powstanie pracy było współfinansowane przez ministerialny grant promotorski **N N201 271435**.

ROZDZIAŁ 1

# Geometria obszarów quasi-kołowych i zastosowania do tetrabloku

## 1.1. Wprowadzenie

Rozdział ten poświęcony jest badaniu geometrii obszarów quasi-kołowych. Zaczynamy od uogólnienia znanego twierdzenia Bella o holomorficznym rozszerzaniu odwzorowań właściwych wzdłuż brzegu. Głównym celem jest wykazanie, że w pewnej dość dużej klasie obszarów, brzegi Szyłowa i Bergmana są niezmiennicze ze względu na odwzorowania holomorficzne właściwe. Klasa ta obejmuje w szczególności obszary quasi-zbalansowane (więc i także zbalansowane) z ciągłym quasi-funkcjonałem Minkowskiego. Pokazujemy także, że ogólnie brzeg Szyłowa nie jest niezmiennikiem nawet odwzorowań biholomorficznych.

Następnie stosujemy nasze wyniki do badania geometrii tetrabloku. W celu przypomnienia definicji tetrabloku, wprowadźmy pewne oznaczenia.

Poprzez $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ($\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C})$) oznaczmy zbiór (symetrycznych) macierzy wymiaru $2\times 2$ o współczynnikach zespolonych. Niech $\mathcal{R}_{II}$ będzie klasycznym obszarem Cartana drugiego typu, to znaczy

$$\mathcal{R}_{II} := \mathcal{R}^2_{II} = \{z \in \mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \ ||z|| < 1\},$$

gdzie $||\cdot||$ oznacza standardową normę operatorową (patrz Dodatek).

Niech

$$\Pi : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ni z = (z_{i,j}) \mapsto (z_{1,1}, z_{2,2}, \det z) \in \mathbb{C}^3.$$

Zauważmy, że restrykcja $\Pi|_{\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C})} : \mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^3$ jest odwzorowaniem właściwym. Połóżmy

$$\mathbb{E} := \Pi(\mathcal{R}_{II}) = \Pi|_{\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C})}(\mathcal{R}_{II}).$$

Właściwość $\Pi|_{\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C})}$ implikuje, że zbiór $\mathbb{E}$ jest otwarty. A zatem $\mathbb{E}$ jest obszarem. Obszar ten nazywany jest w literaturze *tetrablokiem.*

Nietrudno zauważyć, że tetrablok jest $(1,1,2)$-obszarem zbalansowanym w $\mathbb{C}^3$ z ciągłym quasi-funkcjonałem Minkowskiego. Jego geometryczne właściwości studiowane były w kilku pracach (zob. [**Ab-Wh-Yo**], [**You**], [**Edi-Zwo 3**] i zawarte tam referencje). W [**You**] autor wyznaczył grupę automorfizmów tego obszaru. Wykorzystał przy tym ideę użytą w [**Jar-Pfl 4**] przy wyznaczaniu automorfizmów zsymetryzowanego bidysku. Kluczowym jej punktem było zastosowanie twierdzenia Kaupa (zob. [**Kaup**]).

Przypomnijmy, że w 1980 roku Alexander (zob. [**Ale**]) wykazał, że w kuli euklidesowej nie istnieją nietrywialne odwzorowania holomorficzne właściwe. Celem niniejszego rozdziału jest także udowodnienie twierdzenia *typu Alexandera* dla tetrabloku mówiącego, że jedynymi holomorficznymi odwzorowaniami właściwymi w tetrabloku są automorfizmy. W szczególności, wyznaczymy naturalną relację pomiędzy automorfizmami tetrabloku a automorfizmami klasycznego obszaru Cartana drugiego typu (zob. Lemat 1.4.6). Zależność ta daje przy okazji bardziej elementarną metodę otrzymania opisu grupy automorfizmów tetrabloku.

Wyniki prezentowane w tym rozdziale mają także inne, ciekawe i istotne zastosowania. Na przykład, ich natychmiastową konsekwencją jest twierdzenie o nieistnieniu odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy $n$ wymiarową kulą Euklidesową a polidyskiem, gdy $n \geqslant 2$ (zob. [**Nar 1**]). Jako inne zastosowanie tych wyników wymieńmy to, że dzięki nim natychmiast uzyskujemy opis brzegów Szyłowa wielu obszarów, jak choćby zsymetryzowanego polidysku czy tetrabloku (brzegi Szyłowa tych obszarów były w nietrywialny sposób liczone odpowiednio w [**Edi-Zwo 2**] i [**You**]).

W Uwadze 1.5.1 pokażemy również, że tetrablok nie jest $\mathbb{C}$-wypukły. Przypomnijmy, że konsekwencją twierdzenia Lemperta jest fakt, że odległość Carathéodory'ego i funkcja Lemperta ograniczonych obszarów $\mathbb{C}$-wypukłych z brzegami klasy $\mathcal{C}^2$ pokrywają się (zob. [**Jac**]). Wyniki uzyskane w [**Ab-Wh-Yo**] (zob. także [**Edi-Zwo 3**]) sugerują, że równość odległości Carathéodory'ego i funkcji Lemperta zachodzi także w tetrabloku. A zatem, tetrablok jest kandydatem na pierwszy pseudowypukły, ograniczony obszar, nie będący biholomorficznie równoważny żadnemu obszarowi $\mathbb{C}$-wypukłemu, na którym zachodzi teza twierdzenia Lemperta.

Interesującym wynikiem tego rozdziału jest także Lemat 1.4.5, w którym znacząco uogólniamy główne twierdzenie z pracy [**Tum-Hen**].

## 1.2. Rozszerzanie odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami quasi-kołowymi

Przypomnijmy na wstępie podstawowe własności projekcji Bergmana, które będą nam potrzebne w dalszej części.

Niech $D$ będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. Poprzez $k_D$ oznaczać będziemy funkcję jądrową Bergmana obszaru $D$ (patrz Dodatek). Niech ponadto $P_D : L^2(D) \to L^2_h(D)$ będzie projekcją Bergmana obszaru $D$, to znaczy

$$P_D(\varphi)(w) = \int_D \varphi(z)\overline{k_D(z,w)}d\mathcal{L}^{2n}(z), \quad \varphi \in L^2(D). \tag{1.2.1}$$

W celu uproszczenia zapisu używać będziemy następujących symboli:

$$k_D^{\alpha}(z,w) = \partial^{\alpha} k_D(z,w) \quad \text{oraz} \quad k_D^{\overline{\alpha}}(z,w) = \partial^{\overline{\alpha}} k_D(z,w),$$

gdzie $\partial^{\alpha}$ oznacza $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^{\alpha}}$ natomiast $\partial^{\overline{\alpha}}$ oznacza $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \overline{w}^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Dla podzbioru $K$ w $\mathbb{C}^n$ kładziemy

$$\tilde{K} := \{\overline{x} := (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) : \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in K\}.$$

W Uwagach 1.2.1 oraz 1.2.2 przypominamy rozumowanie S. Bella z pracy [**Bel 2**] i modyfikujemy je odpowiednio dla naszych celów.

**Uwaga 1.2.1.** Przypuśćmy, że $G$ jest $m = (m_1, \ldots, m_n)$-zbalansowanym, ograniczonym obszarem z $m$-funkcjonałem Minkowskiego $\mu_{G,m}$. Połóżmy

$$G_r := \{x \in \mathbb{C}^n : \ \mu_{G,m}(x) < r\}, \quad r > 0.$$

Ustalmy $\theta \in \mathbb{R}$ i zdefiniujmy

$$\Phi_\theta : G \ni z \to (e^{im_1\theta} z_1, \ldots, e^{im_n\theta} z_n) \in G.$$

Oczywiście $\Phi_\theta \in \mathrm{Aut}(G)$. Tak więc, używając elementarnych właściwości jądra Bergmana (zob. np. [**Jar-Pfl 2**]), otrzymujemy:

$$k_G(\Phi_\theta(z), \Phi_\theta(w)) \det \Phi'_\theta(z) \overline{\det \Phi'_\theta(w)} = k_G(z, w), \quad z, w \in G.$$

Zastępując $w$ przez $\Phi_\theta^{-1}(w) = \Phi_{-\theta}(w)$ dostajemy

$$k_G((\lambda^{m_1} z_1, \ldots, \lambda^{m_n} z_n), w) = k_G(z, (\overline{\lambda}^{m_1} w_1, \ldots, \overline{\lambda}^{m_n} w_n)), \quad \lambda \in \partial\mathbb{D},\ z, w \in G. \tag{1.2.2}$$

Zauważmy, że dla ustalonych $z, w \in G$ funkcje

$$\lambda \to k_G((\lambda^{m_1} z_1, \ldots, \lambda^{m_n} z_n), w) \in \mathbb{C} \quad \text{oraz}$$
$$\lambda \mapsto k_G(z, (\overline{\lambda^{m_1}} w_1, \ldots, \overline{\lambda^{m_n}} w_n)) \in \mathbb{C}$$

są holomorficzne w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$ oraz, na mocy (1.2.2), pokrywają sie na okręgu $\partial\mathbb{D}$. A zatem, obie te funkcje są równe. W szczególności,

$$k_G((r^{m_1} z_1, \ldots, r^{m_n} z_n), w) = k_G(z, r^{m_1} w_1, \ldots, r^{m_n} w_n)) \tag{1.2.3}$$

dla dowolnych $z, w \in G$ oraz $r \in [0, 1]$.

Z (1.2.3) łatwo wnioskujemy, że dla wszystkich $0 < r < 1$, funkcja $(z, w) \mapsto k_G(z, \overline{w})$ rozszerza się holomorficznie na zbiór $G_{1/r} \times \tilde{G}_r$.

**Uwaga 1.2.2.** Niech $f : D \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym pomiędzy dowolnymi ograniczonymi obszarami $D$, $G$ w $\mathbb{C}^n$. Wówczas (zob. [**Bel 1**]) dla dowolnego odwzorowania $\Phi \in L^2(G)$ zachodzi wzór

$$P_D(\det[f'] \cdot (\Phi \circ f)) = \det[f'] \cdot ((P_G\Phi) \circ f). \tag{1.2.4}$$

Załóżmy dodatkowo, że $G$ jest $m = (m_1, \ldots, m_n)$-zbalansowanym ograniczonym obszarem z (niekoniecznie ciągłym) $m-$funkcjonałem Minkowskiego $\mu_{G,m}$.

Dobierzmy $\delta > 0$ tak, by $\delta\overline{\mathbb{B}_n} \subset G$. Niech $\theta$ będzie funkcją radialną z klasy $\mathcal{C}_0^\infty(\delta\mathbb{B}_n)$ taką, że $\theta \geqslant 0$ oraz $\int_{\delta\mathbb{B}_n} \theta d\mathcal{L}^{2n} = 1$. Przypomnijmy, że dowolna funkcja harmoniczna (a więc także holomorficzna) $\varphi$, określona w otoczeniu $r\overline{\mathbb{B}_n}$, $r > 0$, spełia tezę Twierdzenia o Wartości Średniej, to znaczy

$$\varphi(0) = \frac{1}{\mathcal{L}^{r\partial\mathbb{B}_n}(r\partial\mathbb{B}_n)} \int_{r\partial\mathbb{B}_n} \varphi d\mathcal{L}^{r\partial\mathbb{B}_n}.$$

Używając tej relacji, twierdzenia Fubiniego (zob. [**Fed**]) oraz faktu, że $\theta$ jest funkcją radialną otrzymujemy

$$\int_{\delta\mathbb{B}_n} \varphi\theta d\mathcal{L}^{2n} = \int_0^\delta \int_{r\partial\mathbb{B}_n} \varphi\theta(r) d\mathcal{L}^{r\partial\mathbb{B}_n} dr = \int_0^\delta \theta(r) \int_{r\partial\mathbb{B}_n} \varphi d\mathcal{L}^{r\partial\mathbb{B}_n} dr =$$
$$= \varphi(0) \int_0^\delta \int_{r\partial\mathbb{B}_n} \theta(r) d\mathcal{L}^{r\partial\mathbb{B}_n} dr = \varphi(0) \int_{\delta\mathbb{B}_n} \theta d\mathcal{L}^{2n}.$$

Z powyższego przekształcenia wynika, że dla dowolnego odwzorowania $h \in L_h^2(G)$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}^n$ zachodzi

$$\partial^\alpha h(0) = \int_G (\partial^\alpha h)\theta d\mathcal{L}^{2n}. \tag{1.2.5}$$

Całkowanie przez części daje

$$\partial^\alpha h(0) = \int_G h(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \theta d\mathcal{L}^{2n}. \tag{1.2.6}$$

Z drugiej strony, na mocy definicji jądra Bergmana,

$$h(z) = \int_G k_G(z,w)h(w)d\mathcal{L}^{2n}(w), \quad z \in G. \tag{1.2.7}$$

Połóżmy $||x||_m := \sum_{j=1}^n |x_j|^{\frac{1}{m_j}}$, $x \in \mathbb{C}^n$. Nietrudno zauważyć, że $||\cdot||_m$ spełnia nierówność trójkąta oraz $||(r^{m_1}x_1, \dots, r^{m_n}x_n)|| = r||x||_m$ dla $r > 0$, $x \in \mathbb{C}^n$ (zob. także [**Bou**]). Kulę skojarzoną z $||\cdot||_m$ oznaczamy poprzez $\mathbb{B}_{n,m}(\delta) := \{x \in \mathbb{C}^n : ||x||_m < \delta\}$, gdzie $\delta > 0$.

Dobierzmy $\delta' > 0$ oraz $\delta'' > 0$ tak, by

$$\mathbb{B}_{n,m}(\delta') \subset G \subset \overline{G} \subset \mathbb{B}_{n,m}(\delta'').$$

Pierwsza inkluzja implikuje nierówność $\mu_{G,m}(x) \leqslant \frac{||x||_m}{\delta'}$, dla $x \in \mathbb{C}^n$. A zatem $\mu_{G,m}(x) < \frac{\delta''}{\delta'}$ dla $x \in \mathbb{B}_{n,m}(\delta'')$. W szczególności,

$$\overline{G} \subset \left\{x \in \mathbb{C}^n : \ \mu_{G,m}(x) < \frac{\delta''}{\delta'}\right\}.$$

Tak więc, na mocy Uwagi 1.2.1, funkcja $k_G(z,\cdot)$ rozszerza się anty-holomorficznie do otwartego otoczenia $\overline{G}$ o ile $||z||_m < \frac{\delta'}{\delta''}$. Dzięki tej obserwacji możemy, różniczkując formułę (1.2.7) w $z = 0$, wejść z pochodną pod znak całki. A zatem

$$\partial^\alpha h(0) = \int_G \partial^\alpha k_G(0,w)h(w)d\mathcal{L}^{2n}(w), \quad h \in L_h^2(G),\ \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{1.2.8}$$

Łącząc powyższy wzór z (1.2.6) dostajemy

$$P_G((-1)^{|\alpha|}\overline{\partial}^\alpha \theta) = k_G^{\overline{\alpha}}(\cdot, 0). \tag{1.2.9}$$

Poniższy lemat został sformułowany i udowodniony przez S. Bella w przypadku gdy $D$ i $G$ są ograniczonymi obszarami kołowymi i $0 \in G$ (zob. [**Bel 2**]). Nieznaczna modyfikacja użytych przez Bella metod daje znacznie mocniejszy wynik.

**Lemat 1.2.3.** *Niech $D$, $G$ będą ograniczonymi obszarami w $\mathbb{C}^n$. Przypuśćmy, że $G$ jest $(m_1, \dots, m_n)$-kołowy oraz $0 \in G$. Załóżmy dodatkowo, że obszar $D$ ma następującą własność: dla dowolnego otwartego, relatywnie zwartego podzbioru $K$ obszaru $D$ istnieje otwarte otoczenie $U$ zbioru $\overline{D}$ takie, że funkcja $(z,w) \mapsto k_D(z,\overline{w})$ rozszerza się holomorficznie na $U \times \tilde{K}$.*

*Wówczas dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe $f : D \to G$ rozszerza się holomorficznie do otoczenia $\overline{D}$.*

Dowód. Podobnie jak w Uwadze 1.2.1 pokazujemy, że równość

$$k_G((\lambda^{m_1}z_1, \dots, \lambda^{m_n}z_n), w) = k_G(z, (\overline{\lambda^{m_1}}w_1, \dots, \overline{\lambda^{m_n}}w_n)) \tag{1.2.10}$$

zachodzi dla dowolnych $z, w \in G$ oraz $|\lambda|$ odpowiednio bliskich 1. Różniczkując wielokrotnie tę formułę po $\overline{w}_i$ i kładąc $w = 0$ otrzymujemy

$$\frac{\partial^\alpha k_G}{\partial \overline{w}^\alpha}((\lambda^{m_1}z_1, \dots, \lambda^{m_n}z_n), 0) = \lambda^{\langle \alpha, m\rangle}\frac{\partial^\alpha k_G}{\partial \overline{w}^\alpha}(z, 0) \tag{1.2.11}$$

dla $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $z \in G$ i $|\lambda|$ dostatecznie bliskich 1.

Rozwijając funkcję $k_G^{\overline{\alpha}}(\cdot, 0)$ w szereg Taylora i porównując współczynniki łatwo stwierdzamy istnienie $c_\beta \in \mathbb{C}$ takich, że

$$k_G^{\overline{\alpha}}(z,0) = \sum c_\beta z^\beta, \ z \in G, \tag{1.2.12}$$

gdzie suma jest brana po wszystkich $\beta \in \mathbb{N}^n$ spełniających relację $\langle \beta, m \rangle = \langle \alpha, m \rangle$.

Zauważmy, że ze wzoru (1.2.8) wynika, liniowa niezależność funkcji $k_G^{\overline{\alpha}}(z,0)$. Rzeczywiście, gdyby dla pewnego $\alpha$ funkcja $k_G^{\overline{\alpha}}(z,0)$ generowana była przez $k_G^{\overline{\alpha^j}}(z,0)$, czyli

$$\overline{k_G^{\alpha}(0,z)} = k_G^{\overline{\alpha}}(z,0) = \sum c_j k_G^{\overline{\alpha^j}}(z,0) = \sum c_j \overline{k_G^{\alpha^j}(0,z)}$$

dla pewnych $c_j \in \mathbb{C}$, to wówczas, na mocy (1.2.8), dla dowolnej $h \in L_h^2(G)$ (a więc także dla dowolnej funkcji holomorficznej ograniczonej na $G$) zachodziłaby równość

$$\partial^\alpha h(0) = \sum \overline{c_j} \partial^{\alpha^j} h(0),$$

co jest oczywiście niemożliwe.

Liniowa niezależność funkcji $k_G^{\overline{\alpha}}(\cdot, 0)$ natychmiast implikuje, dla dowolnego $\beta \in \mathbb{N}^n$, istnienie liczb $\tilde{c}_\alpha \in \mathbb{C}$ takich, że

$$z^\beta = \sum \tilde{c}_\alpha k_G^{\overline{\alpha}}(z,0), \tag{1.2.13}$$

gdzie suma jest brana po wszystkich $\alpha \in \mathbb{N}^n$ spełniających równanie $\langle \alpha, m \rangle = \langle \beta, m \rangle$.

Teraz łącząc (1.2.9) z (1.2.13) dostajemy istnienie $\Phi_{i,k} \in \mathcal{C}_0^\infty(\delta \mathbb{B}_n)$ takich, że

$$z_i^k = P_G(\Phi_{i,k}), \quad i = 1, \ldots, n, \ k \in \mathbb{N}. \tag{1.2.14}$$

W szczególności, dzięki (1.2.4)

$$\det[f'(z)] f_i^k(z) = \det[f'(z)](z_i^k \circ f(z)) = \int_D k_D(z,w) \det[f'(w)] \Phi_{i,k}(f(w)) d\mathcal{L}^{2n}(w), \tag{1.2.15}$$

dla $i = 1, \ldots, n$, oraz $k \in \mathbb{N}$.

Z powyższych relacji i założeń o jądrze Bergmana $k_D$ łatwo wnioskujemy, że wszystkie funkcje pojawiające się po lewej stronie równania (1.2.15) rozszerzają się holomorficznie to pewnego otwartego, spójnego otoczenia $U$ zbioru $\overline{D}$.

Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że wszystkie funkcje $f_i$ rozszerzają się holomorficznie do otoczenia $U$. Ustalmy $i = 1, \ldots, n$, i połóżmy $f := f_i$. Kładąc $u = \det[f']$ oraz $w_k = u f^k$ otrzymujemy następującą sytuację:

$$u \in \mathcal{O}(U), \ u \not\equiv 0, \ w_k \in \mathcal{O}(U), \quad \text{oraz} \quad u f^k = w_k \quad \text{na} \quad D, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Proste przekształcenia oraz zasada identyczności implikują równość $\frac{w_1^k}{u^k} u = w_k$ na $U \setminus u^{-1}(0)$.

Wystarczy pokazać, że $\frac{w_1}{u}$ rozszerza się do funkcji holomorficznej na $U$.

Ustalmy więc dowolny punkt $z_0 = (x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $z_0 = 0$. Jeśli $u(0) \neq 0$ to oczywiście $w_1/u$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu 0. Załóżmy więc, że $u(0) = 0$. Zmieniając w razie potrzeby układ współrzędnych możemy przyjąć, że obie funkcje, $u$ oraz $w_1$, spełniają w otoczeniu punktu 0 założenia Twierdzenia Przygotowawczego Weierstrassa. Oznacza to, że istnieją liczba naturalne $\mu, \nu$, funkcje $\varphi, \psi$ holomorficzne w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^n$ oraz

$\alpha_1, \ldots \alpha_\mu, \beta_1, \ldots, \beta_\nu$, funkcje holomorficzne w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ takie, że $\alpha_i(0) = 0$, $\beta_j(0) = 0$ oraz

$$u(z) = e^{\varphi(z)}(x^\mu + x^{\mu-1}\alpha_1(y) + \ldots \alpha_\mu(y)),$$

$$w_1(z) = e^{\psi(z)}(x^\nu + x^{\nu-1}\beta_1(y) + \ldots \beta_\nu(y)),\ z = (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}.$$

Dla $y$ odpowiednio bliskich 0 połóżmy $W_y(x) := x^\mu + x^{\mu-1}\alpha_1(y) + \ldots \alpha_\mu(y)$ oraz $V_y(x) := x^\nu + x^{\nu-1}\beta_1(y) + \ldots \beta_\nu(y)$. Wykażemy, że dla dowolnego $y$ leżącego odpowiednio blisko 0 wielomian $V_y$ jest podzielny przez wielomian $W_y$. Ustalmy więc $y$ i zapiszmy $W_y(x) = (x-\zeta_1)^{p_1} \ldots (x-\zeta_M)^{p_M}$ oraz $V_y(x) = (x-\zeta_1)^{q_1} \ldots (x-\zeta_M)^{q_M}$, gdzie $\zeta_i$ są parami różnymi liczbami zespolonymi. Wstawiając to do równania $w_1^k = u^{k-1}w_k$ otrzymujemy

$$(x-\zeta_1)^{kq_1} \ldots (x-\zeta_M)^{kq_M} = w_k e^{(k-1)\varphi - k\psi}(x-\zeta_1)^{(k-1)p_1} \ldots (x-\zeta_M)^{(k-1)p_M}.$$

Porównując krotności pierwiastków widzimy, że $kq_i \geqslant (k-1)p_i$, $i = 1, \ldots M$, $k \in \mathbb{N}$. Stąd $q_i \geqslant p_i$, $i = 1, \ldots, M$, czyli rzeczywiście, $W_y$ dzieli $V_y$.

Zapiszmy $V_y(x) = W_y(x)P_y(x)$. Używając wzorów Viete'a widzimy, że współczynniki wielomianu $P_y$ są odpowiednią sumą iloczynów pewnych $\nu - \mu$ pierwiastków $V_y$. Oznacza to w szczególności, że $P_y(x)$ jest ograniczone w otoczeniu 0 (jako funkcja zmiennych $x, y$). A zatem, na mocy Twierdzenia Riemanna o Osobliwościach Usuwalnych, odwzorowanie $(x, y) \mapsto P_y(x)$ jest holomorficzne w otoczeniu 0. Stąd natychmiast wynika żądana holomorficzność $\frac{w_1}{u}$. □

**Uwaga 1.2.4.** Zauważmy, że ciągłość $m-$funkcjonału Minkowskiego ograniczonego obszaru $m-$zbalansowanego jest równoważna z faktem, że dla dowolnego $0 < r < 1$ obszar $D$ jest relatywnie zwarty w $D_{1/r}$. A zatem, na mocy Uwagi 1.2.1, dowolny ograniczony obszar quasi-zbalansowany $D$ z ciągłym quasi-funkcjonałem Minkowskiego spełnia założenia Lematu 1.2.3.

## 1.3. Niezmienniczość brzegu Szyłowa ze względu na odwzorowania holomorficzne właściwe

Głównym wynikiem tej sekcji jest następujące:

**Twierdzenie 1.3.1.** *Niech $D$ i $G$ będą obszarami ograniczonymi w $\mathbb{C}^n$ oraz niech $f : D \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym, posiadającym ciągłe rozszerzenie do $\overline{D}$. Załóżmy, że istnieje rodzina zbiorów otwartych $\{G_m\}$, $G_m \subset\subset G_{m+1}$, taka, że $\bigcup_m G_m = G$ oraz $\overline{(\bigcup_m \partial_s G_m)} \cap \partial G = \partial_s G$.*

*Wówczas $f(\partial_s D) = \partial_s G$.*

**Uwaga 1.3.2.** Warunek $\overline{(\bigcup_m \partial_s G_m)} \cap \partial G = \partial_s G$ jest technicznym, ale i naturalnym założeniem. Zauważmy, że dla dowolnej rosnącej rodziny $\{G_m\}_m$ wyczerpującej $G$ $x \in \overline{(\bigcup_m \partial_s G_m)} \cap \partial G$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje podciąg $(m_k) \subset \mathbb{N}$ oraz istnieją $x_{m_k} \in \partial_s G_{m_k}$ takie, że ciąg $x_{m_k}$ jest zbieżny do $x$.

Wynika stąd, że dla dowolnego obszaru ograniczonego $G$ i dowolnej rosnącej rodziny obszarów $\{G_m\}$ takich, że $\bigcup_m G_m = G$, brzeg Szyłowa $G$ zawarty jest w $\overline{(\bigcup_m \partial_s G_m)} \cap \partial G$.

**Przykład 1.3.3.** Zauważmy także, że Twierdzenie 1.3.1 nie jest prawdziwe bez założenia istnienia wymaganego ciągu zbiorów nawet w przypadku, gdy $f$ jest biholomorficzne i jest restrykcją właściwego odwzorowania wielomianowego. Jako przykład weźmy $D = \mathbb{D} \cap \{z \in \mathbb{D} :\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$ oraz $f : D \to G$ dane wzorem $f(z) = z^2$. Wówczas $\partial_s D = \partial D$ natomiast $\partial_s G = \partial\mathbb{D}$, a więc $\partial_s G \subsetneq f(\partial_s D)$.

Dowód Twierdzenia 1.3.1. Dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ złożenie $\varphi\circ f$ jest funkcją holomorficzną w $D$, ciągłą na $\overline{D}$. Tak więc funkcja $|\varphi\circ f|$ osiąga swoje maksimum na $\partial_s D$, w szczególności $|\varphi|$ osiąga maksimum na $f(\partial_s D)$. To daje inkluzję $\partial_s G \subset f(\partial_s D)$. Zauważmy, że pozostaje ona prawdziwa jeśli zamiast właściwości odwzorowania $f$ założymy jedynie jego surjektywność.

Pokażemy, że
$$\partial_s D \subset f^{-1}(\partial_s G).$$
Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla pewnej funkcji $\psi$ holomorficznej na $D$ i ciągłej w $\overline{D}$, $|\psi|$ nie osiąga swojego maksimum na zbiorze $f^{-1}(\partial_s G)$. Innymi słowy
$$|\psi(x_0)| > \max\{|\psi(x)| :\ x \in f^{-1}(\partial_s G)\}, \tag{1.3.1}$$
dla pewnego $x_0 \in \partial D$. Zauważmy, że
$$\limsup_{m\to\infty} \max\{|\psi(x)| :\ x \in D \cap f^{-1}(\partial_s G_m)\} \leqslant \max\{|\psi(x)| :\ x \in f^{-1}(\partial_s G)\}.$$
Rzeczywiście, w przeciwnym wypadku istniałyby podciąg $(m_k) \subset \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ oraz $x_{m_k} \in D \cap f^{-1}(\partial_s G_{m_k})$ takie, że
$$|\psi(x_{m_k})| > \max\{|\psi(x)| :\ x \in f^{-1}(\partial_s G)\} + \epsilon.$$
Przechodząc, w razie potrzeby, do podciągu, możemy założyć, że $x_{m_k}$ jest zbieżny do pewnego $x_0 \in \partial D$. Używając założeń o rodzinie $\{G_m\}$ i ciągłości $f$ stwierdzamy, że $f(x_0) \in \partial_s G$. Zatem
$$|\psi(x_0)| \geqslant \max\{|\psi(x)| :\ x \in f^{-1}(\partial_s G)\} + \epsilon \quad \text{oraz} \quad x_0 \in \partial D \cap f^{-1}(\partial_s G),$$
co daje oczywistą sprzeczność.

Biorąc wystarczająco duże $m$ i zastępując $x_0$ odpowiednio bliskim punktem $x_0' \in f^{-1}(\overline{G}_m)$, otrzymujemy następującą sytuację:
$$|\psi(x_0')| > A := \max\{|\psi(x)| :\ x \in D \cap f^{-1}(\partial_s G_m)\}, \quad \# f^{-1}(f(x_0')) = k, \tag{1.3.2}$$
gdzie $k$ oznacza krotność odwzorowania $f$.

Niech $h_i$, $i = 1, \ldots, k$, będą odwzorowaniami holomorficznymi zdefiniowanymi w otoczeniu $f(x_0')$ danymi przez $f^{-1} = \{h_i :\ i = 1, \ldots, k\}$. Pokażemy, że twierdzenie Kroneckera (zob. Twierdzenie 4.10.1) oraz warunek (1.3.2) implikują istnienie liczby naturalnej $d$ takiej, że
$$|\psi(h_1(f(x_0')))^d + \ldots + \psi(h_k(f(x_0')))^d| > kA^d. \tag{1.3.3}$$
Połóżmy w tym celu $a_j = \psi(h_j(f(x_0')))$, $j = 1, \ldots, k$. Zmieniając, w razie potrzeby, kolejność $a_j$ możemy założyć, że $|a_1| = \ldots = |a_l|$ oraz $|a_j| < |a_1|$ dla $j = l + 1, \ldots, k$, $1 \leqslant l \leqslant k$. Dzieląc $a_j$ przez $\psi(h_1(f(x_0')))$ sprowadzamy problem do następującej sytuacji:
$$a_j = e^{2\pi i\theta_j},\ j = 1 \ldots, l, \quad |a_j| < 1,\ j = l + 1, \ldots, k \quad \text{i} \quad A < 1,$$
gdzie $\theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, l$.

Zmieniając kolejność raz jeszcze, możemy założyć, że $1, \theta_1, \dots, \theta_{l_1}$ są $\mathbb{Q}$-liniowo niezależne, $l_1 \leqslant l$, $l_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz

$$\theta_j = \frac{q_{j,0}}{N} + \sum_{\iota=1}^{l_1} \frac{q_{j,\iota}}{N}\theta_\iota, \quad j = l_1+1, \dots, l,$$

gdzie $q_{j,\iota} \in \mathbb{Z}$, $\iota = 0, \dots, l_1$, i $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (w sytuacji, gdy $l_1 = 0$ przyjmujemy tu, że $\sum_\emptyset = 0$). Połóżmy $M = \max\{|q_{j,\iota}|, N\}$.

Zgodnie z twierdzeniem Kroneckera, istnieje ciąg liczb naturalnych $(\tilde{d}_\mu)$ taki, że

$$-\frac{1}{(\mu+1)kM} < \arg(e^{2\pi i\tilde{d}_\mu\theta_j}) < \frac{1}{(\mu+1)kM}, \quad j = 1, \dots, l_1,\ \mu \in \mathbb{N}.$$

W szczególności,

$$-\frac{1}{\mu+1} < \arg(e^{2\pi i\ d_\mu\theta_j}) < \frac{1}{\mu+1} \quad \text{dla} \quad j = 1, \dots, l,\ \mu \in \mathbb{N},$$

gdzie $d_\mu = N\tilde{d}_\mu$.

Dobór ciągu $(d_\mu)$ gwarantuje, że $|a_1^{d_\mu} + \ldots + a_l^{d_\mu}| \to l$ przy $\mu \to \infty$. Skoro $d_\mu \to \infty$, widzimy, że $kA^{d_\mu} \to 0$ oraz $|a_{l+1}^{d_\mu} + \ldots + a_k^{d_\mu}| \to 0$, $\mu \to \infty$. Tak więc $|a_1^{d_\mu} + \ldots + a_k^{d_\mu}| - kA^{d_\mu} \to l > 0$. To oczywiście dowodzi istnienia liczby naturalnej $d$ spełniającej nierówność (1.3.3).

Połóżmy

$$\zeta(x) = x_1^d + \ldots + x_k^d, \quad \text{dla} \quad x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k. \tag{1.3.4}$$

Zauważmy, że funkcja $\varphi$ dana wzorem

$$\varphi = \zeta \circ (\psi \times \ldots \times \psi) \circ f^{-1}$$

jest dobrze zdefiniowaną, ograniczoną funkcją holomorficzną na $G \setminus V$, gdzie $V = f(\{x :\ \det f'(x) = 0\})$. Właściwość odwzorowania $f$ implikuje, że $V$ jest zbiorem analitycznym. Tak więc, na mocy Twierdzenia Riemanna o Osobliwościach Usuwalnych, funkcja $\varphi$ rozszerza się na $G$. Z (1.3.2) i (1.3.3) wynika, że

$$|\varphi(f(x_0'))| > \max\{|\varphi(x)| :\ x \in \partial_s G_m\};$$

sprzeczność. □

**Uwaga 1.3.4.** Zauważmy, że powyższy dowód pozostaje bez zmian, jeśli założenie $\partial G \cap \overline{(\bigcup_m \partial_s G_m)} = \partial_s G$ zostanie zastąpione przez słabszy warunek $\overline{(\bigcup_m \partial_b G_m)} \cap \partial G = \partial_s G$ (zauważmy, że dla dowolnej rodziny $\{G_m\}$ wyczerpującej zbiór $G$ zachodzą inkluzje $\partial_s G \subset \overline{(\bigcup_m \partial_b G_m)} \cap \partial G \subset \overline{(\bigcup_m \partial_s G_m)} \cap \partial G$). Ale założenie to wydaje się mniej *naturalne*, więc zdecydowaliśmy się zostawić lemat w obecnej formie.

W naturalny sposób narzuca się tu również pytanie o odpowiednik Twierdzenia 1.3.1 dla brzegów Bergmana, przy dodatkowym założeniu, że odwzorowanie $f$ rozszerza się holomorficznie na otoczenie $\overline{D}$ oraz że $\overline{(\bigcup_m \partial_b G_m)} \cap \partial G = \partial_b G$. Odpowiedź daje następująca

**Propozycja 1.3.5.** *Niech $D$ i $G$ będą ograniczonymi obszarami w $\mathbb{C}^n$ i niech $f : D \to G$ będzie odwzorowaniem właściwym, holomorficznym w otoczeniu $\overline{D}$. Załóżmy, że istnieje rodzina zbiorów otwartych $\{G_m\}$, $G_m \subset\subset G_{m+1}$, taka, że $\bigcup G_m = G$ oraz $\overline{(\bigcup_m \partial_b G_m)} \cap \partial G = \partial_b G$.*

*Wówczas $f(\partial_b D) = \partial_b G$.*

Dowód. Na mocy Uwagi 1.3.4, warunek $\overline{(\bigcup_m \partial_b G_m)} \cap \partial G = \partial_b G$ pociąga za sobą równość brzegów Szyłowa i Bergmana obszaru $G$. Tak więc Uwaga 1.3.4 i Twierdzenie 1.3.1 implikują następujący ciąg inkluzji:

$$\partial_b D \subset \partial_s D \subset f^{-1}(\partial_s G) = f^{-1}(\partial_b G).$$

Zawieranie się $\partial_b G \subset f(\partial_b D)$ pokazujemy z kolei dokładnie tak jak w Twierdzeniu 1.3.1. A zatem, odwzorowanie $f$ zachowuje również brzeg Bergmana. □

Powtarzając rozumowanie z Twierdzenia 1.3.1 można bez trudu wykazać następujący

**Lemat 1.3.6.** *Niech $f : D \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym pomiędzy obszarami w $\mathbb{C}^n$. Niech $L$ będzie relatywnie zwartym obszarem w $G$. Połóżmy $K = f^{-1}(L)$. Wówczas*

$$f(\partial_s K) = \partial_s L \quad \textit{oraz} \quad f(\partial_b K) = \partial_b L. \tag{1.3.5}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że restrykcja $f|_K : K \to L$ jest odwzorowaniem właściwym.

Inkluzje $\partial_s L \subset f(\partial_s K)$ oraz $\partial_b L \subset f(\partial_b K)$ pokazujemy dokładnie tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 1.3.1.

Pozostaje więc jedynie wykazać zawieranie się $\partial_s K \subset f^{-1}(\partial_s L)$ oraz $\partial_b K \subset f^{-1}(\partial_b L)$. Ponieważ nie ma istotnej różnicy pomiędzy dowodami dla brzegu Bergmana i Szyłowa, skupimy się na pokazaniu inkluzji $\partial_b K \subset f^{-1}(\partial_b L)$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla pewnej funkcji $\psi$ holomorficznej w otoczeniu $U$ zbioru $\overline{K}$, $|\psi|$ nie osiąga maksimum na $f^{-1}(\partial_b L)$, tzn.

$$|\psi(x_0)| > A := \max\{|\psi(x)| : \ x \in f^{-1}(\partial_b L)\},$$

dla pewnego $x_0 \in \partial K$. Zastępując $x_0$ przez odpowiednio bliski punkt z $K$ możemy założyć, że $f(x_0)$ jest wartością regularną odwzorowania $f$.

Niech $k$ oznacza krotność odwzorowania $f : D \to G$. Wybór $K$ i $L$ gwarantuje, że restrykcja $f|_K : K \to L$ jest także krotności $k$. Co więcej,

$$f^{-1}(x) = f|_K^{-1}(x), \quad \text{dla} \quad x \in L.$$

Niech $V$ będzie otoczeniem otwartym zbioru $L$ takim, że $f^{-1}(V) \subset U$ (istnienie takiego otoczenia jest prostą konsekwencją otwartości odwzorowania $f$).

W otoczeniu punktu $x_0$ zapiszmy $f^{-1} = \{h_1, \ldots, h_k\}$, gdzie $h_i$ są funkcjami holomorficznymi. Powtarzając fragment dowodu Twierdzenia 1.3.1 pokazujemy istnienie liczby naturalnej $d$ takiej, że

$$|\psi(h_1(f(x_0)))^d + \ldots + \psi(h_k(f(x_0)))^d| > kA^d. \tag{1.3.6}$$

Połóżmy

$$\zeta(x) = x_1^d + \ldots + x_k^d, \quad \text{dla} \quad x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k. \tag{1.3.7}$$

Zauważmy, że funkcja $\varphi$ dana wzorem

$$\varphi = \zeta \circ (\psi \times \ldots \times \psi) \circ f^{-1}$$

jest dobrze zdefiniowaną funkcją holomorficzną na $V$ (w przypadku dowodu dla brzegu Szyłowa korzystamy z własności $\overline{f^{-1}(L)} = f^{-1}(\overline{L})$, która także jest konsekwencją otwartości $f$). Z (1.3.6) wynika, że

$$|\varphi(f(x_0))| > \max\{|\varphi(x)| : \ x \in \partial_s L\};$$

sprzeczność. $\square$

**Wniosek 1.3.7.** *a) Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym. Niech $G$ będzie ograniczonym, quasi-zbalansowanym obszarem w $\mathbb{C}^n$. Załóżmy, że quasi-funkcjonał Minkowskiego obszaru $G$ jest ciągły oraz dla dowolnego, relatywnie zwartego podzbioru $K$ obszaru $D$ istnieje otwarte otoczenie $U$ zbioru $\overline{D}$ takie, że $k_D(z, \overline{w})$ rozszerza się holomorficznie do $U \times \tilde{K}$.*

*Wówczas dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe $f : D \to G$ zachowuje brzeg Szyłowa, tzn. $f(\partial_s D) = \partial_s G$ (ciągłe rozszerzenie odwzorowania $f$ na zbiór $\overline{D}$ istnieje na mocy Lematu 1.2.3).*

*b) Niech $D$ i $G$ będą ograniczonym quasi-zbalansowanymi obszarami ograniczonymi w $\mathbb{C}^n$. Jeśli quasi-funkcjonały Minkowskiego zbiorów $D$ i $G$ są ciągłe, to dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy $D$ i $G$ zachowuje brzeg Szyłowa (podobnie jak w poprzednim punkcie, Lemat 1.2.3 gwarantuje istnienie ciągłego rozszerzenie $f$ na $\overline{D}$).*

Dowód. *a)* Niech

$$G_m := \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \ \mu_G(x) < 1 - \frac{1}{m+1} \right\}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Łatwo widać, że rodzina $\{G_m\}_m$ spełnia założenia Twierdzenia 1.3.1. Używając Lematu 1.2.3 sprowadzamy sytuację do Twierdzenia 1.3.1.

*b)* Jest to natychmiastowy wniosek z *a)* i z Uwagi 1.2.1. $\square$

**Uwaga 1.3.8.** Zauważmy, że brzegi Szyłowa i Bergmana ograniczonego ograniczonego obszaru quasi-zbalansowanego, którego quasi-funkcjonał Minkowskiego jest ciągły, pokrywają się. A zatem, nie ma potrzeby formułowania powyższego wniosku dla brzegu Bergmana.

**Uwaga 1.3.9.** Interesujące i ważne wydaje się zastosowanie Twierdzenia 1.3.1 do wykazania braku odwzorowań właściwych pomiędzy pewnymi obszarami. Wiadomo, że $\partial_s \mathbb{B}_n = \partial \mathbb{B}_n$ oraz $\partial_s(\mathbb{D}^n) = (\partial \mathbb{D})^n$. A zatem, stosując Wniosek 1.3.7 dostajemy nowy dowód na nieistnienie odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy kulą Euklidesową a polidyskiem, tzn. zbiory $\mathrm{Prop}(\mathbb{D}^n, \mathbb{B}_n)$ i $\mathrm{Prop}(\mathbb{B}_n, \mathbb{D}^n)$ są puste dla $n \geqslant 2$. Podobnie, skoro $\partial_s(\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_m) = \partial \mathbb{B}_n \times \partial \mathbb{B}_m$ widzimy, że twierdzenie o nieistnieniu odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy $\mathbb{B}_{n+m}$ i $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_m$ wynika natychmiast z Wniosku 1.3.7.

Zauważmy także, że Lemat 1.3.6 oraz Wniosek 1.3.7 dają opis brzegu Szyłowa dużej klasy obszarów. Stosując je dostajemy na przykład opis brzegu Szyłowa zsymetryzowanego polidysku w $\mathbb{C}^n$ (zob. [**Agl-You**] dla $n = 2$ i [**Edi-Zwo 2**] dla $n \geqslant 3$) oraz tetrabloku ([**You**]).

## 1.4. Odwzorowania holomorficzne właściwe w tetrabloku

Zauważmy, że z Uwagi 1.3.9 wynika następująca

**Propozycja 1.4.1** (zob. także [**You**]). *$\partial_s\mathbb{E} = \Pi(\partial_s\mathcal{R}_{II}) = \Pi(\mathcal{U})$, gdzie $\mathcal{U}$ jest zbiorem symetrycznych macierzy unitarnych.*

Używając wyników z poprzednich sekcji otrzymujemy również

**Propozycja 1.4.2.** *Dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe $f : \mathcal{R}_{II} \to \mathbb{E}$ rozszerza się holomorficznie na otwarte otoczenie $\overline{\mathcal{R}_{II}}$.*

Dowód. Wystarczy użyć Uwagi 1.2.1 i zastosować Lemat 1.2.3. □

**Uwaga 1.4.3** (zob. także Dodatek). Zauważmy (zob. [**Agr**]), że dla dowolnego elementu $a \in \mathcal{R}_{II}$ odwzorowanie

$$\varphi_a(x) = -a + (1 - aa^*)^{1/2}x(1 - a^*x)^{-1}(1 - a^*a)^{1/2}, \quad x \in \mathcal{R}_{II}, \tag{1.4.1}$$

jest automorfizmem obszaru $\mathcal{R}_{II}$. Odwzorowanie odwrotne jest dane wzorem $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$ oraz $\varphi_a(0) = -a$, $\varphi_a(a) = 0$.

Ponadto, jedynymi automorfizmami linowymi są odwzorowania postaci

$$L_u : \mathcal{R}_{II} \ni x \mapsto uxu^t \in \mathcal{R}_{II}, \tag{1.4.2}$$

gdzie $u$ jest macierzą unitarną.

A zatem, na mocy twierdzenia Cartana, $\operatorname{Aut}(\mathcal{R}_{II}) = \{L_u \circ \varphi_a :\ a \in \mathcal{R}_{II},\ u \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}),\ uu^* = 1\}$.

Przedstawiony poniżej Lemat 1.4.5 został udowodniony w [**Rud 1**] dla kuli euklidesowej w $\mathbb{C}^n$. W zasadzie, dla naszych celów, dużo słabszy główny wynik z pracy [**Tum-Hen**] byłby wystarczający. Jednakże uogólnienie tego wyniku wydaje się być interesujące samo w sobie. Co więcej, nasz dowód, będący modyfikacją metody Rudina, obrazuje podobieństwo geometrii klasycznych obszarów Cartana i kuli euklidesowej.

Przypomnijmy najpierw klasyczny już wynik:

**Lemat 1.4.4** (zob. [**Rud 2**], Theorem 8.1.2). *Niech $\Omega_1$ i $\Omega_2$ będą obszarami zbalansowanymi w $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$, odpowiednio. Przypuśćmy ponadto, że $\Omega_2$ jest wypukły i ograniczony. Niech $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ będzie odwzorowaniem holomorficznym.*

*Wówczas $F'(0)(\Omega_1) \subset \Omega_2$.*

*Jeśli dodatkowo założymy, że $F(0) = 0$, to $F(\lambda\Omega_1) \subset \lambda\Omega_2$, dla $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

**Lemat 1.4.5** (Twierdzenie lokalizacyjne dla klasycznego obszaru Cartana drugiego typu). *Niech $a_0, b_0 \in \overline{\mathcal{R}_{II}}$ będą macierzami unitarnymi. Niech $U$, $V$ będą otwartymi* *otoczeniami odpowiednio* $a_0$ *i* $b_0$. *Załóżmy, że* $\varphi : U \cap \mathcal{R}_{II} \to V \cap \mathcal{R}_{II}$ *jest odwzorowaniem biholomorficznym. Jeśli* $\varphi(a_k) \to b_0$ *dla pewnego ciągu* $(a_k) \subset U \cap \mathcal{R}_{II}$, $a_k \to a_0$, *to* $\varphi$ *rozszerza się do automorfizmu* $\mathcal{R}_{II}$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że dla dowolnej symetrycznej i unitarnej macierzy $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ istnieje macierz unitarna $u$ taka, że $x = uu^t$.

Skoro $\operatorname{diag}(\alpha,\beta)x\operatorname{diag}(\alpha,\beta)^t = \begin{pmatrix} \alpha^2 x_1 & \alpha\beta x_2 \\ \alpha\beta x_2 & \beta^2 x_3 \end{pmatrix}$, dobierając odpowiednie wartości $\alpha$, $\beta$ możemy ograniczyć się do przypadku gdy $x = \begin{pmatrix} x_1 & i\,x_2 \\ i\,x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, gdzie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geqslant 0$. Zauważmy, że warunek $xx^* = 1$ pociąga za sobą równanie

$$x_2(-x_1 + \bar{x}_3) = 0.$$

Gdy $x_2 = 0$, istnienie żądanej macierzy $u$ jest oczywiste. W pozostałym przypadku $x_3 = \overline{x}_1$ oraz $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Weźmy dowolne $u_1$ takie, by $u_1^2 = \frac{x_1 + i\sqrt{1-x_1^2}}{2}$ i połóżmy $u := \begin{pmatrix} u_1 & \bar{u}_1 \\ u_1 & -\bar{u}_1 \end{pmatrix}$. Oczywiście $|u_1|^2 = 1/2$, więc $uu^* = 1$. Ponadto

$$uu^t = \begin{pmatrix} u_1^2 + \bar{u}_1^2 & u_1^2 - \bar{u}_1^2 \\ u_1^2 - \bar{u}_1^2 & u_1^2 + \bar{u}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & i\sqrt{1-x_1^2} \\ i\sqrt{1-x_1^2} & x_1 \end{pmatrix} = x,$$

co dowodzi istnienia żądanej macierzy $u$.

A zatem, skoro dowolne odwzorowanie $\mathcal{R}_{II} \ni x \mapsto uxu^t \in \mathcal{R}_{II}$, gdzie $u$ jest macierzą unitarną, jest automorfizmem obszaru $\mathcal{R}_{II}$ (patrz Uwaga 1.4.3), możemy założyć $a_0 = b_0 = 1$.

Niech $b_k := \varphi(a_k)$. Zdefiniujmy

$$G_k := \varphi_{b_k} \circ \varphi \circ \varphi_{-a_k} : \varphi_{a_k}(U \cap \mathcal{R}_{II}) \to \varphi_{b_k}(V \cap \mathcal{R}_{II}),$$

$k \in \mathbb{N}$, gdzie $\varphi_a$ jest automorfizmem klasycznego obszaru Cartana drugiego typu danym wzorem (1.4.1).

Oczywiście $\varphi_{-a}(x) \to 1$ lokalnie jednostajnie przy $a \to 1$, więc standardowy argument daje istnienie $\delta_k > 0$ takich, że $\delta_k \to 1$, gdy $k \to \infty$, oraz zarówno $\varphi_{a_k}(U \cap \mathcal{R}_{II})$ jak i $\varphi_{b_k}(V \cap \mathcal{R}_{II})$ zawierają obszar $\delta_k \mathcal{R}_{II}$ dla odpowiednio dużych $k$. Pomijając początkowe wyrazy możemy więc przyjąć, że pozostaje to prawdą dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że $G_k$ jest odwzorowaniem biholomorficznym i $G_k(0) = 0$. Odpowiednio przeskalowany Lemat 1.4.4 implikuje oszacowanie

$$\delta_k^3 \leqslant |\det G_k'(0)| \leqslant \delta_k^{-3}.$$

Ponieważ $G_k$ są ograniczone oraz $G_k(0) = 0$, istnieje podciąg ciągu $\{G_k\}$ (oznaczany w dalszej części również przez $\{G_k\}$) zbieżny lokalnie jednostajnie do pewnego odwzorowanie holomorficznego $G : \mathcal{R}_{II} \to \mathcal{R}_{II}$. Oczywiście $|\det G'(0)| = 1$ i $G(0) = 0$, a zatem, na mocy Lematu 1.4.4, $G'(0)(\mathcal{R}_{II}) \subset \mathcal{R}_{II}$. Ale skoro $|\det G'(0)| = 1$, odwzorowanie liniowe $G'(0)$ zachowuje objętość. Stąd wnioskujemy, że

$$G'(0)(\mathcal{R}_{II}) = \mathcal{R}_{II}.$$

W szczególności, $G'(0)$ jest postaci (1.4.2). Składając $G$ z $(G'(0))^{-1}$ i stosując twierdzenie Cartana stwierdzamy, że $G$ jest również postaci (1.4.2).

Połóżmy

$$\mathcal{N} := \{z \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \ z = z^t, \ ||z|| \neq \rho(z)\}.$$

Nietrudno zauważyć, że $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}_{II}$ jest otwarty w $\mathcal{R}_{II}$. Pokażemy, że $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}_{II}$ jest gęsty w $\mathcal{R}_{II}$. W tym celu przypomnijmy, że dla dowolnej macierzy kwadratowej o współczynnikach zespolonych zachodzi

$$||x||^2 = ||xx^*|| = \rho(xx^*) = \max\{|\lambda| : \ \det(xx^* - \lambda) = 0\}. \tag{1.4.3}$$

A zatem

$$\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ni x \mapsto ||x||^2 \in \mathbb{R}$$

jest odwzorowaniem analitycznym (w sensie rzeczywistym) na $\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{V}$, gdzie

$$\mathcal{V} := \{x : \ x = x^t, \ xx^* \text{ ma podwójną wartość własną}\}.$$

Nietrudno zauważyć, że dla dowolnej macierzy $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ klatka Jordana macierzy $xx^*$ nie może być postaci $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Aby to pokazać, przypuśćmy, że

$$xx^* = p \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} p^{-1}$$

dla pewnej macierzy $p = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ takiej, że $\det p = 1$. Proste obliczenia pozwalają stwierdzić, że $p_{1,1}^2 + \overline{p_{2,1}}^2 = 0$. Używając tego faktu widzimy, że zachodzi jedna z możliwości:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = \lambda - i\ |p_{1,1}|^2 \quad \text{oraz} \quad |x_2|^2 + |x_3|^2 = \lambda + i|p_{1,1}|^2$$

lub

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = \lambda + i\ |p_{1,1}|^2 \quad \text{oraz} \quad |x_2|^2 + |x_3|^2 = \lambda - i|p_{1,1}|^2.$$

Stąd wynika, że $p_{1,1} = p_{2,1} = 0$, a więc $\det p = 0$; sprzeczność.

A zatem, jeśli $x \in \mathcal{V}$ to $xx^* = \lambda$. W szczególności, $x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_3 = 0$. Niech $\mathcal{V}_1 = \{x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} : \ x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_3 = 0\}$. Łatwo widać, że dla dowolnego obszaru $D$, zbiór $D \setminus \mathcal{V}_1$ także jest obszarem. Podobnie funkcja

$$\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ni x \mapsto \rho(x)^2 = \rho(x^2) \in \mathbb{R}$$

jest analityczna na zbiorze $\mathcal{W}$, gdzie

$$\mathcal{W} := \{x \in \mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \ x^2 \text{ ma dwie różne wartości własne}\}.$$

Połóżmy $\mathcal{W}_1 := \mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{W}$. Skoro

$$\mathcal{W}_1 := \{x \in \mathcal{M}^s_{2\times 2} : \ (\operatorname{Tr} x^2)^2 - 4 \det x^2 = 0\},$$

to $\mathcal{W}_1$ jest zbiorem analitycznym. A więc w szczególności, dla dowolnego obszaru $D$ w $\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C})$ zbiór $D \setminus (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{W}_1)$ jest także obszarem (oczywiście ten zbiór jest także gęsty w $D$).

Gdyby teraz $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}_{II}$ nie był gęsty w $\mathcal{R}_{II}$, to na pewnym obszarze $W \subset \mathcal{R}_{II}$ zachodziłaby równość $||z|| = \rho(z)$. Innymi słowy

$$||zz^*|| = \rho(z^2), \quad z \in W. \tag{1.4.4}$$

Połóżmy $\tilde{W} := W \setminus (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{W}_1)$ oraz $\tilde{R} := \mathcal{R}_{II} \setminus (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{W}_1)$. Z powyższych rozważań wynika, że obie funkcje pojawiające się w (1.4.4) są analityczne w obszarze $\tilde{R}$ oraz równe na $\tilde{W}$. Używając spójności $\tilde{R}$ łatwo wnioskujemy, że równość tych funkcji przenosi się na $\tilde{R}$.

Gęstość $\tilde{R}$, ciągłość promienia spektralnego i ciągłość normy operatorowej implikują, że $\rho(z) = ||z||$ dla wszystkich $z \in \mathcal{R}_{II}$, co jest oczywiście niemożliwe. A zatem faktycznie, $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}_{II}$ jest gęsty w $\mathcal{R}_{II}$.

Zauważmy, że $\lambda z \in \mathcal{N}$ o ile $z \in \mathcal{N}$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dla $z \in \mathcal{R}_{II}$ zdefiniujmy

$$D_z := \{\lambda z : \ ||\lambda z|| < 1\} \subset \mathcal{R}_{II}.$$

Niech $K$ będzie dowolnym zwartym podzbiorem $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}_{II}$. Zauważmy, że

$$\bigcup\{D_z : \ z \in K\} \subset \varphi_a(\mathcal{R}_{II} \cap U) \quad \text{oraz} \quad \bigcup\{D_z : \ z \in K\} \subset \varphi_a(\mathcal{R}_{II} \cap V) \tag{1.4.5}$$

dla $a \in \mathcal{R}_{II}$ odpowiednio bliskich 1. Faktycznie, gdyby na przykład pierwsza inkluzja nie była prawdziwa, to istniałyby ciągi $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$, $(z_n) \subset K$ i $(a_n) \subset \mathcal{R}_{II}$ takie, że $||\lambda_n z_n|| < 1$, $a_n \to 1$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in \mathbb{C}$ oraz $z_n \to z_0 \in K$ i $\lambda_n z_n \notin \varphi_{a_n}(\mathcal{R}_{II} \cap U)$ (w razie potrzeby przechodzimy do podciągów).

Jeśli $\lambda_0 = 0$, to sprzeczność jest oczywista, gdyż $\frac{1}{2}\mathcal{R}_{II} \subset \varphi_{a_n}(\mathcal{R}_{II} \cap U)$ dla dużych $n$. Tak więc dla dostatecznie dużych $n$ elementy $\lambda_n z_n$ leżałyby w $\varphi_{a_n}(\mathcal{R}_{II} \cap U)$.

Przypuśćmy więc, że $\lambda_0 \neq 0$. Ponieważ $z_0 \in K \subset \mathcal{N}$, to $\lambda_0 z_0 \in \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{R}_{II}}$. W szczególności, $\det(1 - \lambda_0 z_0) \neq 0$ (gdyby $\det(1 - \lambda_0 z_0) = 0$, to $\rho(\lambda_0 z_0) \geqslant 1 \geqslant ||\lambda_0 z_0|| \geqslant \rho(\lambda_0 z_0)$, więc $\lambda_0 z_0 \in \mathcal{N}$).

Korzystając z (1.4.1) i faktu, że $\det(1 - \lambda_0 z_0) \neq 0$ widzimy, że ciąg $\varphi_{a_n}^{-1}(\lambda_n z_n)$ dąży do 1. Stąd wynika, że $\lambda_n z_n \in \varphi_{a_n}(\mathcal{R}_{II} \cap U)$ dla $n$ odpowiednio dużych; sprzeczność. Tym samym pokazaliśmy (1.4.5).

Skoro $G$ jest izomorfizmem liniowym, zbiór $G^{-1}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{R}_{II}$ jest otwarty i gęsty w $\mathcal{R}_{II}$. Połóżmy $B := \{z \in \mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \ ||z - p|| < 2c\}$, gdzie $p \in \mathcal{R}_{II}$ i $c > 0$ są wybrane tak, aby

$$B \subset\subset G^{-1}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{R}_{II} \quad \text{oraz} \quad ||z|| < 1 - c \quad \text{dla} \quad z \in B.$$

Na mocy własności (1.4.5), istnieje $n$, dla którego

$$D_z \subset \varphi_{a_n}(U \cap \mathcal{R}_{II}) \quad \text{i} \quad D_{G(z)} \subset \varphi_{b_n}(V \cap \mathcal{R}_{II}), \quad z \in B. \tag{1.4.6}$$

Możemy założyć, że dla tak wybranego $n$ :

$$||G_n(z) - G(z)|| < c \quad \text{dla} \quad ||z|| \leqslant 1 - c.$$

Wtedy, dla $||z - p|| < c$, zbiór $D_z$ jest zawarty w $\varphi_{a_n}(U \cap \mathcal{R}_{II})$. Ponieważ $||G^{-1}(G_n(z)) - p|| = ||G_n(z) - G(p)|| < 2c$ widzimy, że $G^{-1}(G_n(z)) \in B$. Używając (1.4.6) otrzymujemy inkluzję $D_{G_n(z)} \subset \varphi_{b_n}(V \cap \mathcal{R}_{II})$.

Stosując Lemat 1.4.4 do odwzorowania $G_n : D_z \to \mathcal{R}_{II}$, gdzie $||z - p|| < c$, stwierdzamy, że $||G_n(z)|| \leqslant ||z||$. Ten sam argument zastosowany do odwzorowania $G_n^{-1} : D_{G_n(z)} \to \mathcal{R}_{II}$ daje, w połączeniu z poprzednia nierównością,

$$||G_n(z)|| = ||z|| \quad \text{dla} \quad ||z - p|| < c. \tag{1.4.7}$$

Przypomnijmy, że dla dowolnego obszaru $D$, zbiór $D \setminus \mathcal{V}_1$ jest obszarem. Ponadto funkcja $\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ni z \mapsto ||z||^2 \in \mathbb{R}$ jest analityczna na $D \setminus \mathcal{V}_1$. A zatem równość (1.4.7) przenosi się na obszar $\varphi_{a_n}(\mathcal{R}_{II} \cap U)$, tzn.

$$||G_n(z)|| = ||z|| \quad \text{dla} \quad z \in \varphi_{a_n}(\mathcal{R}_{II} \cap U).$$

Wybierzmy $r$ takie, by obszar $r\mathcal{R}_{II}$ zawarty był w $\varphi_{a_n}(\mathcal{R}_{II} \cap U) \cap \varphi_{b_n}(\mathcal{R}_{II} \cap V)$. Restrykcja odwzorowania $G_n$ do $r\mathcal{R}_{II}$ jest automorfizmem $r\mathcal{R}_{II}$ zachowującym 0. Z Uwagi 1.4.3 wynika, że $G_n$ jest unitarne. Dzięki równości

$$\varphi = \varphi_{-b_k} \circ G_k \circ \varphi_{a_k}$$

natychmiast otrzymujemy tezę. □

Poniższy wynik opisuje naturalną zależność pomiędzy odwzorowaniami holomorficznymi właściwymi tetrabloku a automorfizmami klasycznego obszary Cartana drugiego typu.

**Lemat 1.4.6.** *Niech $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym. Wówczas istnieje automorfizm $\psi \in \operatorname{Aut}(\mathcal{R}_{II})$ taki, że*

$$\varphi \circ \Pi = \Pi \circ \psi \tag{1.4.8}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że $\Pi^{-1}(\mathbb{E}) = \mathcal{R}_{II}$. Tak więc $\Pi : \mathcal{R}_{II} \to \mathbb{E}$ jest odwzorowaniem właściwym. Połóżmy

$$f := \varphi \circ \Pi.$$

Na mocy Wniosku 1.4.2 odwzorowanie $f$ rozszerza się do otoczenia otwartego $\Omega_1$ zbioru $\overline{\mathcal{R}_{II}}$.

Zdefiniujmy

$$\mathcal{J} := \{x \in \Omega_1 : \det[f'(x)] \neq 0 \text{ i } f_1(x)f_2(x) \neq f_3(x)\}. \tag{1.4.9}$$

Ponieważ odwzorowania holomorficzne właściwe są niezdegenerowane, przecięcie zbiorów $\mathcal{J}$ i $\partial_s\mathcal{R}_{II}$ jest, na mocy definicji brzegu Szyłowa, niepuste. Weźmy dowolny $x_0 \in \mathcal{J} \cap \partial_s\mathcal{R}_{II}$.

Ustalmy $y_0$ taki, by $\Pi(y_0) = f(x_0)$. Wybór $x_0$ i własności odwzorowań nakrywających implikują istnienie otoczeń otwartych $U$, $V$ punktów $x_0$ i $y_0$ odpowiednio oraz odwzorowania biholomorficznego $\psi : U \to V$, $\psi(x_0) = y_0$, takiego, że

$$f = \Pi \circ \psi \quad \text{na } U. \tag{1.4.10}$$

Z Wniosku 1.3.7 wynika, że $f(x_0)$ leży w brzegu Szyłowa tetrabloku, więc $\psi(x_0)$ jest macierzą unitarną.

Lemat 1.4.5 i zasada identyczności kończą dowód. □

Posiadamy już wystarczające narzędzia do udowodnienia twierdzenia typu Alexandera dla tetrabloku.

**Twierdzenie 1.4.7.** *Niech $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym. Wówczas $\varphi$ jest automorfizmem.*

DOWÓD. Wystarczy użyć Lematu 1.4.6 by stwierdzić, że odwzorowanie $\varphi \circ \Pi$ jest krotności 2. Ale $\Pi$ jest także krotności 2. Stąd wynika natychmiast, że $\varphi$ jest krotności 1, a zatem jest automorfizmem. $\square$

## 1.5. $\mathbb{C}$-wypukłość tetrabloku

**Uwaga 1.5.1.** Pokażemy, że tetrablok nie jest $\mathbb{C}$-wypukły.

W tym celu połóżmy

$$\gamma(x) := |x_1 - \overline{x_2}x_3| + |x_1x_2 - x_3| + |x_3|^2, \quad \text{for} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3. \tag{1.5.1}$$

Wiadomo, że (zob. [**Ab-Wh-Yo**]) $x \in \mathbb{E}$ wtedy i tylko wtedy $\gamma(x) < 1$.

Dla $\zeta \in \mathbb{C}$ niech

$$\varphi(\zeta) := \left(\frac{1-i}{2}\zeta + \frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2}\zeta + \frac{i-1}{2}, i\zeta\right).$$

Oczywiście $\varphi(1),\ \varphi(-1) \in \overline{\mathbb{E}}$. Ponadto $\varphi(i\zeta) = \left(\frac{1+i}{2}(\zeta+1), \frac{i-1}{2}(\zeta+1), -\zeta\right)$.

Niech $\zeta \in \mathbb{R}$. Liczymy:

$$\begin{aligned}\gamma(\varphi(i\zeta)) &= \left|\frac{1+i}{2}(\zeta+1) - \frac{i+1}{2}(\zeta+1)\zeta\right| + \left|-1/2(\zeta+1)^2 + \zeta\right| + \zeta^2 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}|1-\zeta^2| + |\frac{\zeta^2+1}{2}| + \zeta^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}|1-\zeta^2| + \frac{3}{2}\zeta^2 + 1/2.\end{aligned}$$

W szczególności $\gamma(\varphi(z)) > 1$ dla dowolnego $z \in \{x \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} x = 0\}$, więc $\mathbb{E} \cap \varphi(\mathbb{C})$ nie jest spójny.

ROZDZIAŁ 2

# Odwzorowania holomorficzne właściwe pomiędzy niehiperbolicznymi obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$

## 2.1. Wprowadzenie

Niech $D_1, D_2$ będą obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ oraz

$$f : D_1 \to D_2$$

będzie holomorficznym odwzorowaniem właściwym. Naszym celem jest zidentyfikowanie wszystkich sytuacji, w których odwzorowanie $f$ jest nieelementarne oraz podanie dokładnych wzorów na odwzorowanie $f$ oraz odpowiadające mu obszary $D_1$ i $D_2$. Przypomnijmy, że odwzorowaniami *elementarnymi algebraicznymi* (lub krótko *elementarnymi*) nazywamy odwzorowania postaci

$$(z, w) \mapsto (\mathrm{const}\, z^a w^b, \mathrm{const}\, z^c w^d),$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Wiadomo, że dowolne odwzorowanie biholomorficzne $f : D_1 \to D_2$ możemy przedstawić jako złożenie automorfizmów $D_1$ i $D_2$ oraz odwzorowania elementarnego algebraicznego pomiędzy $D_1$ i $D_2$ (zob. [**Kru**] i [**Shi 2**]). Tak więc, nieelementarne odwzorowania mogą pojawiać się jedynie pomiędzy obszarami równoważnymi ze względu na odwzorowania elementarne i posiadającymi nieelementarne automorfizmy. Klasyfikacja odwzorowań biholomorficznych między obszarami Reinhardta jest bardzo klasycznym problemem geometrii zespolonej obszarów Reinhardta, rozważanym w wielu pracach. w [**Shi 1**] S. Shimizu, używając teorii grup Liego rozważał holomorficzną równoważność ograniczonych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^n$, niezawierających środka układu współrzędnych. Podobne wyniki zostały uzyskane przez D.E. Barretta w [**Barr**], jednakże jego podejście do rozwiązania problemu było analityczne. Opis grup automorfizmów wszystkich obszarów Reinhardta zawierających środek układu współrzędnych został podany w [**Sun**]. Wyniki z tej pracy zostały później rozszerzone w [**Kru**] na wszystkie ograniczone obszary Reinhardta w $\mathbb{C}^n$.

W sytuacji nieograniczonych obszarów $D_1$ i $D_2$ problem częściowo rozważany był w pracach [**Shi 3**], [**Shi 4**], [**Edi-Zwo 1**] i [**Kos 1**].

Uzyskanie klasyfikacji odwzorowań właściwych jest oczywiście cięższym problemem, samo działanie na odwzorowaniach właściwych wymaga dużo subtelniejszych metod od tych używanych przy odwzorowaniach biholomorficznych. Problem opisu właściwych holomorficznych odwzorowań nieelementarnych był rozważany w pracach [**Ber-Pin**] oraz [**Lan-Spi**] w klasie zupełnych obszarów Reinhardta. Jak się okazuje, takie odwzorowania mogą istnieć jedynie pomiędzy pewnymi pseudoelipsoidami bądź polidyskami. Wiadomo, że odwzorowania holomorficzne właściwe pomiędzy polidyskami to odwzorowania, których składowe są skończonymi iloczynami Blaschkego.

Z kolei odwzorowania holomorficzne właściwe pomiędzy pseudoelipsoidami w $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, zostały wyznaczone w [**Din-Sel**].

Odwzorowania holomorficzne właściwe między specjalnymi klasami obszarów Reinhardta rozważane również były w [**Lan**].

Ostateczny wynik dla obszarów ograniczonych, który jest uwieńczeniem wielu lat badań, został ostatnio uzyskany w pracy [**Isa-Kru**] A.V. Isaeva i N.G. Kruzhilina. Autorzy dokładnie opisali wszystkie możliwości istnienia nieelementarnych odwzorowań właściwych pomiędzy ograniczonymi obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ :

**Twierdzenie 2.1.1** ([**Isa-Kru**]). *Niech $D_1$, $D_2$ będą ograniczonymi obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Załóżmy, że $f : D_1 \mapsto D_2$ jest nieelementarnym holomorficznym odwzorowaniem właściwym. Wówczas zachodzi jedna z następujących możliwości:*

*(i) Z dokładnością do permutacji składowych $f$ i zmiennych, odwzorowanie $f$ ma postać*

$$(z,w) \mapsto \left(\operatorname{const} z^a w^b B(A_1 z^{p_1} w^{q_1}), \operatorname{const} w^c\right), \tag{2.1.1}$$

*gdzie $a,b,c,p_1,q_1 \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $c > 0$, $p_1 > 0$, $q_1 \leqslant 0$, $p_1$ i $q_1$ są względnie pierwsze, $aq_1 - bp_1 \leqslant 0$ oraz $B$ jest niestałym, skończonym iloczynem Blaschkego takim, że $B(0) \neq 0$. W tym przypadku obszar $D_1$ jest postaci*

$$\left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ A_1|z|^{p_1}|w|^{q_1} < 1, \ 0 < |w| < C_1\right\}$$

*dla pewnej stałej $C_1 > 0$ bądź $D_1$ jest bidyskiem (wówczas we wzorze (2.1.1) $b = 0$, $p_1 = 1$, $q_1 = 0$). Obszar $D_2$ ma odpowiednio postać*

$$\left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ A_2|z|^{p_2}|w|^{q_2} < 1, \ 0 < |w| < C_2\right\},$$

*gdzie $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, $p_2 > 0$, $q_2 \leqslant 0$, $\frac{q_2}{p_2} = \frac{aq_1 - bp_1}{cp_1}$ oraz $A_2 > 0$, $C_2 > 0$, bądź $D_2$ jest bidyskiem.*

*(ii) Z dokładnością do permutacji składowych $f$ i zmiennych, odwzorowanie $f$ ma postać (2.1.1), gdzie $a,b,c,p_1,q_1 \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $c \neq 0$, $p_1 > 0$, $p_1$ i $q_1$ są względnie pierwsze, $A_1 > 0$ oraz $B$ jest niestałym, skończonym iloczynem Blaschkego takim, że $B(0) \neq 0$. W tym przypadku obszary są postaci*

$$D_1 = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ A_1|z|^{p_1}|w|^{q_1} < 1, \ E_1 < |w| < C_1\right\},$$
$$D_2 = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ A_2|z|^{p_2}|w|^{q_2} < 1, \ E_2 < |w| < C_2\right\},$$

*gdzie $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, $p_2 > 0$, $\frac{q_2}{p_2} = \frac{aq_1 - bp_1}{cp_1}$ oraz $C_1 > 0$, $E_1 > 0$, $A_2 > 0$, $C_2 > 0$, $E_2 > 0$.*

*(iii) Z dokładnością do permutacji zmiennych, odwzorowanie $f$ ma postać*

$$(z,w) \mapsto \left(\operatorname{const} z^a B_1(Az), \operatorname{const} w^b B_2(Cw)\right),$$

*gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $A > 0$, $C > 0$, oraz $B_1$ i $B_2$ są niestałymi, skończonymi iloczynami Blaschkego takimi, że $B_1(0) \neq 0$ i $B_2(0) \neq 0$. W tym przypadku obszary $D_1$ i $D_2$ są bidyskami.*

*(iv) Odwzorowanie $f$ jest złożeniem $f = G \circ F \circ H$, gdzie $H$ jest odwzorowaniem elementarnym z $D_1$ w obszar $D := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ |w| > \exp(|z|^2)\}$, $F$ jest automorfizmem $D$, natomiast $G$ jest odwzorowaniem elementarnym z odpowiedniego*

*obszaru zawartego w $D$ na $D_2$. Z dokładnością do permutacji zmiennych, odwzorowanie $H$ ma postać*

$$(z,w) \mapsto \left(\operatorname{const} z^{a_1} w^{-b_1}, \operatorname{const} w^{-c_1}\right),$$

*gdzie $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}$; odwzorowanie $F$ jest postaci*

$$(z,w) \mapsto \left(e^{it_1} z + s, e^{it_2} \exp(2\overline{s} e^{it_1} z + |s|^2) w\right),$$

*gdzie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}_*$; z dokładnością do permutacji składowych, odwzorowanie $G$ ma postać*

$$(z,w) \mapsto \left(\operatorname{const} z^{a_2} w^{-b_2}, \operatorname{const} w^{-c_2}\right),$$

*gdzie $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$. W tym przypadku obszary są postaci*

$$D_1 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_1' \exp(-E_1 |z|^{2a_1} |w|^{-2b_1}) < |w| < C_1 \exp(-E_1 |z|^{2a_1} |w|^{-2b_1})\Big\},$$

$$D_2 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_2' \exp(-E_2 |z|^{\frac{2}{a_2}} |w|^{-\frac{2b_2}{a_2 c_2}}) < |w| < C_2 \exp(-E_2 |z|^{\frac{2}{a_2}} |w|^{-\frac{2b_2}{a_2 c_2}})\Big\},$$

*gdzie $0 \leqslant C_1' < C_1$, $0 \leqslant C_2' < C_2$, $E_1 > 0$, $E_2 > 0$.*

*(v) Odwzorowanie $f$ jest złożeniem $f = G \circ F \circ H$, gdzie $H$ jest odwzorowaniem elementarnym z $D_1$ w obszar $\Omega^\alpha := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ |z|^2 + |w|^\alpha < 1\}$, dla pewnej $\alpha > 0$, $G$ jest odwzorowaniem elementarnym z odpowiedniego obszaru zawartego w $\Omega^\alpha$ na $D_2$, oraz $F$ jest automorfizmem $\Omega^\alpha$. Z dokładnością do permutacji zmiennych, odwzorowanie $H$ ma postać*

$$(z,w) \mapsto \left(\operatorname{const} z^{a_1} w^{-b_1}, \operatorname{const} w^{c_1}\right),$$

*gdzie $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}$, $a_1 > 0$, $b_1 \geqslant 0$, $c_1 > 0$; odwzorowanie $F$ ma postać*

$$(z,w) \mapsto \left(e^{it_1} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, e^{it_2} \frac{(1-|a|^2)^{\frac{1}{\alpha}}}{(1-\overline{a}z)^{\frac{2}{\alpha}}} w\right),$$

*gdzie $|a| < 1$, $a \neq 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; z dokładnością do permutacji składowych, odwzorowanie $G$ jest postaci*

$$(z,w) \mapsto \left(\operatorname{const} z^{a_2} w^{b_2}, \operatorname{const} w^{c_2}\right),$$

*gdzie $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$, $a_2 > 0$, $b_2 \geqslant 0$, $c_2 > 0$. W tym przypadku obszary są postaci*

$$D_1 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_1 |z|^{2a_1} + E_1 |w|^{\alpha c_1} < 1\Big\},$$
$$D_2 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_2 |z|^{\frac{2}{a_2}} + E_2 |w|^{\frac{\alpha}{c_2}} < 1\Big\},$$

*albo*

$$D_1 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_1 |z|^{2a_1} |w|^{-2b_1} < 1, \ E_1' (1 - C_1 |z|^{2a_1} |w|^{-2b_1})^{\frac{1}{\alpha c_1}} < |w| < E_1 (1 - C_1 |z|^{2a_1} |w|^{-2b_1})^{\frac{1}{\alpha c_1}}\Big\},$$

$$D_2 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_2|z|^{\frac{2}{a_2}}|w|^{-\frac{2b_2}{a_2c_2}} < 1, \ E_2'(1 - C_2|z|^{\frac{2}{a_2}}|w|^{-\frac{2b_2}{a_2c_2}})^{\frac{c_2}{\alpha}} < |w| < E_2(1 - C_2|z|^{\frac{2}{a_2}}|w|^{-\frac{2b_2}{a_2c_2}})^{\frac{c_2}{\alpha}}\Big\},$$

*dla pewnych* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $0 \leqslant E_1' < E_1$, $0 \leqslant E_2' < E_2$.

(vi) *Odwzorowanie* $f$ *jest złożeniem* $f = G \circ F \circ H$, *gdzie* $H$ *jest odwzorowaniem elementarnym z* $D_1$ *na kulę Euklidesową* $\mathbb{B}_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ |z|^2 + |w|^2 < 1\}$, $F$ *jest automorfizmem* $\mathbb{B}_2$ *oraz* $G$ *jest odwzorowaniem elementarnym z* $\mathbb{B}_2$ *na* $D_2$. *Z dokładnością do permutacji zmiennych, odwzorowanie* $H$ *ma postać*

$$(z,w) \mapsto \Big(\operatorname{const} z^{a_1}, \operatorname{const} w^{b_1}\Big),$$

*gdzie* $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$; *odwzorowanie* $F$ *jest takie, że* $F(\mathbb{B}_2 \cap V_i) \not\subset \mathbb{B}_2 \cap (V_1 \cup V_2)$, $i = 1,2$; *z dokładnością do permutacji składowych, odwzorowanie* $G$ *ma postać*

$$(z,w) \mapsto \Big(\operatorname{const} z^{a_2}, \operatorname{const} w^{b_2}\Big),$$

*gdzie* $a_2, b_2 \in \mathbb{N}$. *W tym przypadku obszary mają postać*

$$\begin{aligned} D_1 =& \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_1|z|^{2a_1} + E_1|w|^{2b_1} < 1\}, \\ D_2 =& \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_2|z|^{\frac{2}{a_2}} + E_2|w|^{\frac{2}{b_2}} < 1\}, \end{aligned}$$

*gdzie* $C_1 > 0$, $E_1 > 0$, $C_2 > 0$, $E_2 > 0$.

Natychmiastowym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest

**Wniosek 2.1.2** ([**Isa-Kru**])**.** *Niech* $D_1$, $D_2$ *będą ograniczonymi obszarami Reinhardta w* $\mathbb{C}^2$. *Jeśli istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe z* $D_1$ *na* $D_2$, *to również istnieje odwzorowanie właściwe elementarne z* $D_1$ *na* $D_2$.

Zajmijmy się teraz niehiperbolicznymi obszarami Reinhardta. Na mocy Twierdzenia 4.3.3, niehiperboliczne pseudowypukłe obszary Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ nie zawierające $\mathbb{C}_*^2$ mogą być podzielone na dwie klasy. Pierwsza składa się z obszarów, których obraz logarytmiczny zawiera linię prostą. Jak łatwo można to sprawdzić, są to obszary algebraicznie równoważne z

$$D_{\alpha,r_-,r_+} = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ r_- < |z_1|^{\alpha_1}|z_2|^{\alpha_2} < r_+\}, \tag{2.1.2}$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) \in (\mathbb{R}^2)_*$, $-\infty < r_- < r_+ < \infty$, $r_+ > 0$ (gdy $x \geqslant 0$ oraz $\beta < 0$ to przyjmujemy, że $x^\beta$ jest zdefiniowane, o ile $x \neq 0$).

Druga klasa obejmuje niehiperboliczne pseudowypukłe obszary Reinhardta takie, że przecięcie $D \cap \mathbb{C}_*^2$ jest już zbiorem hiperbolicznym.

Obszary $D_{\alpha,r_-,r_+}$ postaci (2.1.2) są nazywane obszarami *typu wymiernego* jeśli $t\alpha \in \mathbb{Q}^2$ dla pewnego $t > 0$. W przeciwnym wypadku mówimy, że $D_{\alpha,r_-,r_+}$ jest typu *niewymiernego*.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

(a) $D_\alpha^* = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ 0 < |z_1||z_2|^\alpha < 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
(b) $D_\alpha = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1||z_2|^\alpha < 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
(c) $D_{\alpha,r} = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ 1/r < |z_1||z_2|^\alpha < r\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 1$.

Przechodząc do obrazów logarytmicznych możemy łatwo wykazać, że dowolny obszar $D_{\alpha,r^-,r^+}$ typu niewymiernego, jest algebraicznie równoważny jednemu z obszarów postaci (a), (b) lub (c) (z niewymiernym $\alpha$).

W podobny sposób można pokazać, że obszar $D_{\alpha,r_-,r_+}$ typu wymiernego jest algebraicznie równoważny jednemu z poniższych obszarów:

(d) $\mathcal{D}\times\mathcal{C}$, gdzie $\mathcal{D}$ jest pierścieniem, dyskiem, lub dyskiem z wyrzuconym środkiem układu współrzędnych, natomiast $\mathcal{C}\in\{\mathbb{C},\mathbb{C}_*\}$,

(e) $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\ |z_1^p||z_2^q|<1\}$, gdzie $p,q\in\mathbb{N}$ są względnie pierwsze,

(f) $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*:\ |z_1^p||z_2^q|<1\}$, gdzie $p,q$ są liczbami naturalnymi.

Zauważmy, że obszar postaci (e) to $D_{\frac{q}{p}}$ natomiast obszar postaci (f) jest algebraicznie równoważny z $D_{\frac{-q}{p}}$.

W [**Kos 1**] opisano zbiór odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami $D_{\alpha,r_-,r_+}$ typu niewymiernego. Ponadto pokazano, że nie istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy obszarami różnych typów (wymiernego i niewymiernego).

Opis wszystkich odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami postaci (e) został uzyskany w [**Edi-Zwo 1**], natomiast między obszarami postaci (d) w [**Kos 1**]. Z kolei opis odwzorowań holomorficznych właściwych obszarów postaci (f) uzyskujemy powtarzając dokładnie rozumowanie dla obszaru (e).

Poniżej prezentujemy zbiorczo wspomniane wyniki:

**Twierdzenie 2.1.3** ([**Edi-Zwo 1**])**.** *Jeśli $\alpha,\beta>0$ są liczbami wymiernymi, $\alpha=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\beta=\frac{\beta_1}{\beta_2}$, $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{Z}_+$, $i=1,2$, to dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe $F: D_\alpha\mapsto D_\beta$ jest jednej z następujących postaci:*

$$\begin{cases} F(z_1,z_2)=(e^{i\theta}z_1^{k_2}/a^{1/\beta_2}(z_2^{\alpha_1}z_1^{\alpha_2}),a^{1/\beta_1}(z_2^{\alpha_1}z_1^{\alpha_2})z_2^{k_1}) & \textit{lub}\\ F(z_1,z_2)=(e^{i\theta}z_2^{l_2}/a^{1/\beta_2}(z_2^{\alpha_1}z_1^{\alpha_2}),a^{1/\beta_1}(z_2^{\alpha_1}z_1^{\alpha_2})z_1^{l_1}), \end{cases}$$

*gdzie $a\in\mathcal{O}^*(\mathbb{D})$, $\theta\in\mathbb{R}$ oraz $k_1$, $k_2$, $l_1$, $l_2$ są dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi równości*

$$\alpha_2\beta_1k_1=\alpha_1\beta_2k_2,\ \ \alpha_1\beta_1l_1=\alpha_2\beta_2l_2.$$

**Twierdzenie 2.1.4** ([**Kos 1, Kos 3**])**.** *(i) (a) Jeśli $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, to zbiór odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami $D_{\alpha,r}$ i $D_{\beta,R}$ jest niepusty wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\frac{\log R}{\log r}\in\mathbb{Z}\ +\beta\mathbb{Z}\quad \textit{oraz}\quad \alpha\frac{\log R}{\log r}\in\mathbb{Z}\ +\beta\mathbb{Z}. \tag{2.1.3}$$

*(b) Niech $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $r,R>1$ będą takie, że $\frac{\log R}{\log r}=k_1+l_1\beta$ i $\alpha\frac{\log R}{\log r}=k_2+l_2\beta$ dla pewnych całkowitych $k_i,l_i$, $i=1,2$. Wówczas dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe $f: D_{\alpha,r}\to D_{\beta,R}$ jest jednej z następujących postaci:*

$$\begin{cases} f(z)=(az_1^{k_1}z_2^{k_2},bz_1^{l_1}z_2^{l_2}) & \textit{lub}\\ f(z)=(az_1^{-k_1}z_2^{-k_2},bz_1^{-l_1}z_2^{-l_2}) \end{cases}\quad z=(z_1,z_2)\in D_{\alpha,r}, \tag{2.1.4}$$

*gdzie $a,b\in\mathbb{C}$ spełniają równość $|a||b|^\beta=1$.*

*(ii)* *Niech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Zbiór odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami* $D^*_\alpha$ *i* $D^*_\beta$ *jest niepusty wtedy i tylko wtedy gdy* $\alpha = (k_2+\beta l_2)/(k_1+\beta l_1)$ *dla pewnych* $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$. *Ponadto, jeśli* $\alpha = (k_2 + \beta l_2)/(k_1 + \beta l_1)$, *gdzie* $k_1 + l_1\beta > 0$, *to wówczas dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe* $f : D^*_\alpha \to D^*_\beta$ *jest postaci*

$$f(z_1, z_2) = (az_1^{k_1} z_2^{k_2}, bz_1^{l_1} z_2^{l_2}), \quad (z_1, z_2) \in D^*_\alpha, \tag{2.1.5}$$

*gdzie* $a, b \in \mathbb{C}$ *spełniają równość* $|a||b|^\beta = 1$.

*(iii)* *Niech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

*(a)* *Jeśli* $\alpha > 0, \beta > 0$, *to zbiór* $\operatorname{Prop}(D_\alpha, D_\beta)$ *jest niepusty wtedy i tylko wtedy gdy* $\alpha = p\beta$ *dla pewnego* $p \in \mathbb{Q}_{>0}$. *W tym przypadku wszystkie odwzorowania właściwe pomiędzy* $D_\alpha$ *i* $D_\beta$ *są postaci*

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1^k, z_2^l), \tag{2.1.6}$$

*gdzie* $k, l$ *są dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że* $p = \frac{l}{k}$.

*(b)* *Jeśli* $\alpha < 0, \beta < 0$, *to wówczas zbiór* $\operatorname{Prop}(D_\alpha, D_\beta)$ *jest niepusty wtedy i tylko wtedy gdy* $\alpha = p_1 + p_2\beta$ *dla pewnych wymiernych* $p_1, p_2$, $p_2 \neq 0$. *W tym przypadku wszystkie odwzorowania holomorficzne właściwe pomiędzy* $D_\alpha$ *i* $D_\beta$ *są postaci*

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1^{k_1} z_2^{k_2}, z_2^l), \tag{2.1.7}$$

*gdzie* $k_1, k_2, l$, $k_1 > 0$, *są dowolnymi liczbami całkowitymi takimi, że* $p_1 = \frac{k_2}{k_1}$, *i* $p_2 = \frac{l}{k_1}$.

*(c)* *Jeśli* $\alpha\beta < 0$, *to nie istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy* $D_\alpha$ *i* $D_\beta$.

*(iv)* *Niech* $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)_*$, $r_i^+ > 0$, $r_i^- < r_i^+$, $i = 1, 2$. *Załóżmy, że zbiory* $D_{\alpha, r_1^-, r_1^+}$, $D_{\beta, r_2^-, r_2^+}$ *są tego samego typu (wymiernego lub niewymiernego). Jeśli istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe* $\psi : D_{\alpha, r_1^-, r_1^+} \to D_{\beta, r_2^-, r_2^+}$, *to* $r_1^- r_2^- > 0$ *bądź* $r_1^- = r_2^- = 0$.

*(v)* *Niech* $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)_*$, $r_i^+ > 0$, $r_i^- < r_i^+$, $i = 1, 2$. *Jeśli zbiory* $D_{\alpha, r_1^-, r_1^+}$ *i* $D_{\beta, r_2^-, r_2^+}$ *są różnych typów, to nie istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy* $D_{\alpha, r_1^-, r_1^+}$ *a* $D_{\beta, r_2^-, r_2^+}$.

*(vi)* *Niech* $A, B \subset \mathbb{C}$ *będą niepustymi obszarami ograniczonymi. Wówczas*

*(a)* $\operatorname{Prop}(A \times \mathbb{C}, B \times \mathbb{C})$ *składa się z odwzorowań postaci*

$$A \times \mathbb{C} \ni (z, w) \mapsto (\varphi(z), a_N(z)w^N + \ldots + a_0(z)) \in B \times \mathbb{C},$$

*gdzie* $\varphi : A \to B$ *jest holomorficznym odwzorowaniem właściwym,* $N \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathcal{O}(A)$ *oraz* $a_N \in \mathcal{O}^*(A)$.

*(b)* $\operatorname{Prop}(A \times \mathbb{C}_*, B \times \mathbb{C})$ *składa się z odwzorowań postaci*

$$A \times \mathbb{C}_* \ni (z, w) \mapsto (\varphi(z), \frac{a_N(z)w^N + \ldots + a_0(z)}{w^k}) \in B \times \mathbb{C},$$

*gdzie* $\varphi : A \to B$ *jest holomorficznym odwzorowaniem właściwym,* $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < N$, $a_1, \ldots, a_{N-1} \in \mathcal{O}(A)$, *oraz* $a_0, a_N \in \mathcal{O}^*(A)$.

*(c)* $\operatorname{Prop}(A \times \mathbb{C}_*, B \times \mathbb{C}_*)$ *składa się z odwzorowań postaci*

$$A \times \mathbb{C}_* \ni (z, w) \mapsto (\varphi(z), a(z)w^k) \in B \times \mathbb{C}_*,$$

*gdzie* $\varphi : A \to B$ *jest holomorficznym odwzorowaniem właściwym,* $k \in \mathbb{N}$ *oraz* $a \in \mathcal{O}^*(A)$.

*(d) Zbiór* $\mathrm{Prop}(A \times \mathbb{C}, B \times \mathbb{C}_*)$ *jest pusty.*

Wyniki, które zaprezentujemy w tym rozdziale (Twierdzenie 2.2.4), w połączeniu z powyższymi twierdzeniami z prac [**Isa-Kru**], [**Edi-Zwo 1**] i [**Kos 1**] zakończą problem charakteryzacji odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ (poza przypadkiem, gdy otoczka holomorficzności obszaru Reinhardta zawiera $\mathbb{C}^2_*$). Ponadto, z danym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n$ skojarzymy stałe, które okażą się być niezmiennikami odwzorowań holomorficznych właściwych dla dowolnego $n$ (Twierdzenie 2.2.3).

Uzyskamy także pewne ogólniejsze wyniki, wykraczające poza klasę obszarów Reinhardta (jak choćby Twierdzenie 2.3.6).

W Sekcji 2.4 zaprezentujemy również częściowe rezultaty dotyczące odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy $\mathbb{C}^2_*$, $\mathbb{C}^2$ i $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$.

Zauważmy tu, że następujące odwzorowania $f : \mathbb{C}^2_* \to \mathbb{C}^2_*$ są biholomorficzne

(i) $f(z_1, z_2) = (z_1 \exp(n_2\varphi(z_1^{n_1} z_2^{n_2})), z_2 \exp(-n_1\varphi(z_1^{n_1} z_2^{n_2})))$, gdzie $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ oraz $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_*)$;

(ii) $f(z_1, z_2) := \Phi_A(z)$, gdzie $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z})$, $\det A = \pm 1$;

(iii) $f(z_1, z_2) := (c_1 z_1, c_2 z_2)$, gdzie $c_1$, $c_2 \in \mathbb{C}_*$.

Pełen opis grupy automorfizmów $\mathbb{C}^2_*$ nie jest znany. Przypuszcza się (zob. np. [**And**]), że odwzorowania powyższej postaci generują grupę $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2_*)$. W 1956 roku E. Peshl twierdził, że częściowo rozwiązał tę hipotezę. Stwierdził mianowicie w [**Pes**], że dowolny automorfizm $\mathbb{C}^2_*$, posiadający holomorficzne rozszerzenie do $\mathbb{C}^2$ jest generowany przez odwzorowania postaci (i), (ii) oraz (iii). Kluczowym punktem było wykazanie, że każdy taki automorfizm zachowuje formę

$$\frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2}.$$

Jednakże dowód tego faktu okazał się być niekompletny i do dziś pozostaje otwartym problemem.

Częściowe wyniki dotyczące automorfizmów $\mathbb{C}^2_*$ zostały uzyskane przez Y. Nishimurę. W [**Nis 2**] autor pokazał, że dowolny automorfizm $\mathbb{C}^2_*$ posiadający holomorficzne rozszerzenie do $\mathbb{C}^2$ i zachowujący formę $dz_1 \wedge dz_2$ jest postaci (i), z $n_1 = n_2 = 1$. Uzyskał również pewne wyniki dotyczące automorfizmów $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$ ([**Nis 1**]).

Co ciekawe, nasze metody dowodowe, zaprezentowane w Sekcji 2.4, pozwalają otrzymać dla odwzorowań holomorficznych właściwych wyniki podobne do tych uzyskanych dla automorfizmów w pracach [**Pes**] i [**Nis 1**].

Struktura grup $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ i $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*)$ jest dużo bardziej skomplikowana. Istotnie, zauważmy na przykład, że każde z odwzorowań postaci

$$f(z_1, z_2) := (\alpha z_1 \exp(\varphi(z_1 z_2, z_2)) + \psi(z_1 z_2, z_2), z_2 \exp(-\varphi(z_1 z_2, z_2))),$$

$(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}_*$, $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, jest elementem $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*)$ (zob. np. [**Jar-Pfl 5**], Chapter 2). Następujący przykład dobitnie pokazuje, jak bardzo skomplikowana jest struktura grupy $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$.

**Twierdzenie 2.1.5** ([**Fr-Ma-Vi**]). *Dla dowolnego skończonego ciągu* $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}^2$ *istnieje* $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C}^2)$, *taki, że*

$$\operatorname{Fix}(\varphi) = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

## 2.2. Przedstawienie głównych wyników

Mając dane $\alpha \in \mathbb{R}^n$ oraz $z \in \mathbb{C}^n$ kładziemy

$$|z^\alpha| := |z_1|^{\alpha_1} \dots |z_n|^{\alpha_n},$$

o ile ma to sens (przypomnijmy, że gdy $\beta < 0$ oraz $x \geqslant 0$ to rozumiemy, że $x^\beta$ jest dobrze zdefiniowane dla $x \neq 0$). Połóżmy

$$V_\iota := \mathbb{C}^{\iota-1} \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-\iota}, \quad \iota = 1, \dots, n, \tag{2.2.1}$$

$$\text{oraz} \quad M := \bigcup_{\iota=1}^{n} V_\iota.$$

**Uwaga 2.2.1.** Przypomnijmy na wstępie, że obwiednia holomorficzności obszaru Reinhardta w $\mathbb{C}^n$ jest także obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n$ (zob. [**Jar-Pfl 5**]) [1]. Co więcej, odwzorowanie holomorficzne właściwe $f : D_1 \to D_2$ pomiędzy dowolnymi obszarami rozszerza się do odwzorowania holomorficznego właściwego

$$\widehat{f} : \widehat{D_1} \to \widehat{D_2}$$

pomiędzy obwiedniami holomorficzności $\widehat{D_1}$ i $\widehat{D_2}$ obszarów $D_1$ i $D_2$ odpowiednio (zob. Twierdzenie 4.5.9).

**Definicja 2.2.2.** *Z danym obszarem Reinhardta* $D \subset \mathbb{C}^n$ *kojarzymy następujące stałe:*

> $d(D)$ :=*największy możliwy wymiar przestrzeni afinicznej zawartej w obrazie logarytmicznym obwiedni holomorficzności obszaru* $D$,
> $t(D) := \#\{\iota = 1, \dots, n : \ \widehat{D} \cap V_\iota \neq \emptyset\}$.

*W sytuacji, gdy* $n = 2$ *kładziemy dodatkowo*

> $s(D) := \#\{\iota = 1, 2 : \ \widehat{D} \cap V_\iota = V_\iota\}$,
> $s_*(D) := \#\{\iota = 1, 2 : \ \widehat{D} \cap V_\iota = (V_\iota)_*\}$.

Zdefiniowane powyżej obiekty okazują się być są niezmiennikami odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Mówiąc precyzyjniej, wykażemy następujące

**Twierdzenie 2.2.3.** *Niech* $D$, $G$ *będą obszarami Reinhardta w* $\mathbb{C}^n$. *Załóżmy, że zbiór odwzorowań holomorficznych właściwych między* $D$ *i* $G$ *jest niepusty. Wówczas*

$$d(D) = d(G). \tag{2.2.2}$$

*Jeśli dodatkowo* $n = 2$ *oraz* $d(D) = d(G) = 0$, *to*

$$(s(D), s_*(D), t(D)) = ((s(G), s_*(G), t(G)). \tag{2.2.3}$$

[1]Można nawet pokazać, że obwiednia holomorficzności obszaru quasi-kołowego jest także obszarem quasi-kołowym.

Niech $D_1$ oraz $D_2$ będą obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Niech $f : D_1 \to D_2$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym. Załóżmy, że $f$ nie jest odwzorowaniem elementarnym. Naszym celem jest uzyskanie dokładnego wzoru na odwzorowanie $f$ jak i również obszary $D_1$, $D_2$.

Używając Uwagi 2.2.1 widzimy, że przypadek $d(D_i) = s(D_i) = s_*(D_i) = 0$, $i = 1, 2$, został opisany w [**Isa-Kru**]. Ponadto, w pracach [**Edi-Zwo 1**] oraz [**Kos 1**] autorzy sklasyfikowali wszystkie właściwe holomorficzne odwzorowania $f : D_1 \to D_2$ pomiędzy pseudowypukłymi obszarami Reinhardta $D_1$, $D_2$ takimi, że $d(D_1) = d(D_2) = 1$ (to znaczy obszarami, których obraz logarytmiczny jest albo pasem albo półpłaszczyzną). Elementarne, aczkolwiek monotonne obliczenia pozwalają określić wszystkie możliwe obszary Reinhardta $D_1'$, $D_2'$, których obwiednie holomorficzności są równe odpowiednio $D_1$, $D_2$ i restrykcja $f|_{D_1'} : D_1' \to D_2'$ jest właściwa.

Reasumując, aby uzyskać pełny opis nieelementarnych holomorficznych właściwych odwzorowań pomiędzy obszarami Reinhardta $D_1$, $D_2$, których obwiednie holomorficzności są niehiperboliczne i nie zawierają $\mathbb{C}_*^2$, wystarczy rozpatrzeć przypadki gdy $d(D_1) = d(D_2) = 0$ oraz

$$s(D_1) = s(D_2) \neq 0 \quad \text{bądź} \quad s_*(D_1) = s_*(D_2) \neq 0.$$

Rozwiązanie tego problemu jest głównym twierdzeniem niniejszego rozdziału:

**Twierdzenie 2.2.4.** *Niech $D_1$, $D_2$ będą obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$, których obwiednie holomorficzności są niehiperboliczne. Niech $d(D_1) = d(D_2) = 0$ i $s(D_i) \neq 0$ bądź $s_*(D_i) \neq 0$, $i = 1, 2$. Załóżmy, że $f : D_1 \to D_2$ jest nieelementarnym holomorficznym odwzorowaniem właściwym.*

*Wówczas zachodzi jedna z dwóch poniższych możliwości:*

*(i) Z dokładnością do permutacji składowych $f$ oraz zmiennych, odwzorowanie $f$ jest postaci*

$$f(z, w) = (\mu_1 z^k B(C_1 z^{p_1} w^{q_1}), \mu_2 w^l), \tag{2.2.4}$$

*gdzie $k, l \in \mathbb{N}$, $p_1, q_1 > 0$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, $B$ jest niestałym, skończonym iloczynem Blaschkego takim, że $B(0) \neq 0$, $C_1 > 0$ oraz $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$. W tym przypadku obszary $D_1$ i $D_2$ mają postać*

$$D_i = \Big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_i |z|^{p_i} |w|^{q_i} < 1, \ |w| < E_i\Big\} \setminus P_i \times \{0\}, \quad i = 1, 2, \tag{2.2.5}$$

*gdzie $E_1, E_2 > 0$, $p_2, q_2 > 0$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi spełniającymi równanie $\frac{q_2}{p_2} = \frac{kq_1}{lp_1}$, natomiast $P_1$ jest właściwym domkniętym podzbiorem Reinhardta zbioru $\mathbb{C}$ (wówczas $P_2$ musi być postaci $\{\mu_1 \zeta^k B(0) : \ \zeta \in P_1\}$).*

*(ii) Z dokładnością do permutacji składowych $f$ oraz zmiennych, odwzorowanie $f$ jest postaci*

$$f(z, w) = ((e^{it_1} z^{a_1} + s)^{a_2}, e^{it_2} \exp(2\bar{s} e^{it_1} z^{a_1} + |s|^2)^{-c_2} w^{c_1 c_2}), \tag{2.2.6}$$

*gdzie $a_1, a_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}_*$ i $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. W tym przypadku obszary $D_1$, $D_2$ mają postać*

$$D_i = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ |w| < C_i \exp(-E_i |z|^{k_i})\}, \quad i = 1, 2, \tag{2.2.7}$$

*gdzie $k_1 = 2a_1, \ k_2 = 2/a_2$ i $C_1, C_2, E_1, E_2 > 0$.*

## 2.3. Dowody

**Definicja 2.3.1.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie dowolnym obszarem. Powiemy, że odwzorowanie holomorficzne $f : D \to \mathbb{C}^m$ $(m \geqslant n)$ jest niezdegenerowane, jeśli*

$$\operatorname{rank}[f'(x)] = n \tag{2.3.1}$$

*dla pewnego $x \in D$.*

**Uwaga 2.3.2.** Zauważmy, że jeśli (2.3.1) zachodzi dla pewnego $x \in D$, to równość ta przenosi się na $D \setminus A$, dla pewnego zbioru analitycznego $A$.

**Lemat 2.3.3.** *Załóżmy, że $G$ jest pseudowypukłym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n$ takim, że $d(G) < k$, $k \leqslant n$. Niech $f : \mathbb{C}^k \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym niezdegenerowanym.*

*Wówczas $f(\mathbb{C}^k) \subset M$.*

**Uwaga 2.3.4.** Powyższy wynik może być postrzegany jako uogólnienie Twierdzenia 4.3.3 (a dokładniej równoważności pomiędzy $(i)$ a $(ii)$). Wynika to natychmiast stąd, iż dowolne niestałe odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{C} \to G$ jest niezdegenerowane oraz z faktu, że jedynymi niehiperbolicznymi w sensie Brody'ego obszarami na płaszczyźnie zespolonej są $\mathbb{C}$ oraz $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ (co jest konsekwencją Twierdzenia Uniformizacyjnego).

Dowód Lematu 2.3.3. Niech $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $f_i \not\equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$. Dla $\alpha \in \mathbb{R}^n$ oraz $\rho \in \mathbb{R}$ połóżmy

$$C_{\alpha,\rho} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \alpha \rangle < \rho\}. \tag{2.3.2}$$

Niech $m = n - k + 1$. Na mocy założeń $\log G$ jest wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ niezawierającym $k$-wymiarowej przestrzeni afinicznej. Oznacza to w szczególności, że istnieją liniowo niezależne wektory $\alpha^1, \ldots, \alpha^m \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^j = (\alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n)$, $j = 1, \ldots, m$, oraz $\rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\log G \subset \bigcap_{j=1}^{m} C_{\alpha^j,\rho_j}. \tag{2.3.3}$$

Zdefiniujmy

$$u_j(z) = |z^{\alpha^j}|, \quad z \in \mathbb{C}^n_*. \tag{2.3.4}$$

Zauważmy, że restrykcja $u_j \circ f$ do $\mathbb{C}^k \setminus V$, gdzie $V$ jest zbiorem analitycznym postaci $V = \bigcup_{j=1}^n \{z \in \mathbb{C}^k : \ f_j(z) = 0\}$, jest dobrze zdefiniowaną funkcją plurisubharmoniczną, $j = 1, \ldots, m$. Na mocy (2.3.3) $u_j \circ f$ jest ograniczona na $\mathbb{C}^k \setminus V$, a zatem rozszerza się do ograniczonej funkcji plurisubharmonicznej na $\mathbb{C}^k$, $j = 1, \ldots, m$. W szczególności oznacza to, że $u_j \circ f$ jest stała, powiedzmy $u_j \circ f = R_j$, dla pewnego $R_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$.

Innymi słowy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^j_i \log |f_i| = \log R_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.3.5}$$

Wybierzmy dowolny punkt $z_0 \in \mathbb{C}^k \setminus V$. Niech $U$ będzie odpowiednio małą kulą o środku w $z_0$ taką, że $f_j \neq 0$ w $U$, $j = 1, \dots, n$. Niech $\log f_j$ oznacza dowolnie wybraną holomorficzną gałąź logarytmu funkcji $f_j$ na $U$.

Zmieniając w razie potrzeby kolejność indeksów, z równań (2.3.5) możemy wywnioskować, że $\log|f_j|$, $j = k, \dots, n$, są kombinacją afiniczną $\log|f_1|, \dots, \log|f_{k-1}|$. Używając zasady identyczności łatwo stąd wnioskujemy, że

$$f_j = A_j f_1^{\gamma_1^j} \dots f_{k-1}^{\gamma_{k-1}^j}$$

na $U$, dla pewnych $A_j, \gamma_1^j, \dots, \gamma_{k-1}^j$, $j = k, \dots, n$.

Stąd łatwo już wynika, że $\operatorname{rank}[f'] \leqslant k-1$ na $U$. A zatem, na mocy Uwagi 2.3.4, $f$ nie jest niezdegenerowane; sprzeczność. $\square$

**Lemat 2.3.5.** *Załóżmy, że $f : D \to G$ jest odwzorowaniem holomorficznym właściwym pomiędzy obszarami Reinhardta $D, G \subset \mathbb{C}^n$. Niech $\varphi : \mathbb{C} \to G$ będzie niestałym odwzorowaniem holomorficznym.*

*Jeśli $d(D) = 0$, to $f^{-1}(\varphi(\mathbb{C})) \subset M$.*

Dowód. Weźmy $\alpha \in \mathbb{R}^n$ oraz $R \in \mathbb{R}$ takie, aby $\log D$ był zawarty w $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \alpha\rangle < R\}$ oraz dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \alpha\rangle = t\} \cap \log D$ był ograniczony. Niech

$$u_\alpha(z) = |z^\alpha|, \quad z \in \mathbb{C}_*^n.$$

Zauważmy, że ze względu na dobór $\alpha$, funkcja plurisubharmoniczna $u$ jest ograniczona na $D \cap \mathbb{C}_*^n$. A więc rozszerza się do ograniczonej funkcji plurisubharmonicznej na $D$.

Właściwość odwzorowania $f$ implikuje, że

$$\tilde{v}_\alpha := \max u_\alpha \circ f^{-1}$$

jest dobrze zdefiniowaną funkcją plurisubharmoniczną na $G$. A zatem

$$v(z) = v_\alpha(z) := \tilde{v}_\alpha(\varphi(z)), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.3.6}$$

jest ograniczoną funkcją plurisubharmoniczną na $\mathbb{C}$, a co za tym idzie, jest stała. Pokażemy, że $v \equiv 0$.

Dla dowodu nie wprost połóżmy $v \equiv \rho$ i przypuśćmy, że $\rho > 0$. Skoro zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \alpha\rangle = \log\rho\} \cap \log D$ jest ograniczony, właściwość $f$ pozwala nam wybrać ciąg $(w_\mu)_{\mu=1}^\infty$ zbieżny do pewnego $w_0 \in \partial D$ i taki, że $|w_\mu^\alpha| = \rho$ oraz $f(w_\mu) \in \varphi(\mathbb{C})$ dla $\mu \in \mathbb{N}$.

Niech $H$ będzie płaszczyzną wspierającą $\log D$ w punkcie $\log w_0$. Weźmy $\beta \in \mathbb{R}^n$ i $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}$ takie, by $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \beta\rangle = \tilde{\rho}\}$.

Powtarzając powyższe rozumowanie zastosowane do funkcji $v = v_\beta$ łatwo stwierdzamy, że istnieje $\widehat{\rho} < e^{\tilde{\rho}}$ takie, że $|w^\beta| < \widehat{\rho}$ dla wszystkich $w \in f^{-1}(\varphi(\mathbb{C}))$. W szczególności, $|w_\mu^\beta| < \widehat{\rho}$ dla wszystkich $\mu \in \mathbb{N}$. Jednakże $|w_\mu^\beta| \to |w_0^\beta| = e^{\tilde{\rho}}$ przy $\mu \to \infty$, co daje oczywistą sprzeczność. $\square$

**Twierdzenie 2.3.6.** *Niech $D, G \subset \mathbb{C}^n$ będą obszarami. Załóżmy, że $D$ jest ograniczony, natomiast $G$ nie jest hiperboliczny w sensie Brody'ego. Wówczas nie istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy $D$ i $G$ oraz pomiędzy $G$ i $D$.*

DOWÓD. Niech $\gamma : \mathbb{C} \to G$ będzie niestałym odwzorowaniem holomorficznym.

Zauważmy najpierw, że zbiór $\mathrm{Prop}(G, D)$ jest pusty. Rzeczywiście, gdyby $f : G \to D$ było odwzorowaniem holomorficznym właściwym, to $f \circ \gamma$ byłoby odwzorowaniem stałym, a to prowadzi do sprzeczności z faktem, że $f$, jako odwzorowanie właściwe, jest skończonej krotności.

Załóżmy teraz, że istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe $g : D \to G$. Połóżmy

$$A = \{z \in D : \det[g'(z)] = 0\}.$$

Oczywiście $A$ jest zbiorem analitycznym w $D$, $A \neq D$ oraz, na mocy właściwości $g$, zbiór $g(A)$ jest analityczny w $G$ i $g(A) \neq G$. Niech $m$ będzie krotnością odwzorowania $g$. Wówczas $\#g^{-1}(w) = m$ dla $w \in G \setminus g(A)$.

Połóżmy

$$\pi_k(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m,\ k = 1, \ldots, m, \tag{2.3.7}$$

i

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m). \tag{2.3.8}$$

Ponadto, dla $z^j = (z_1^j, \ldots, z_n^j) \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, \ldots, m$, zdefiniujmy

$$\sigma(z^1, \ldots, z^m) = (\pi(z_1^1, \ldots, z_1^m), \ldots, \pi(z_n^1, \ldots, z_n^m)). \tag{2.3.9}$$

Zauważmy, że odwzorowanie $\sigma : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}^{nm}$ jest odwzorowaniem holomorficznym właściwym o krotności $(m!)^n$.

Niech

$$g^{-1}(w) = \{\zeta_1(w), \ldots, \zeta_m(w)\}, \quad w \in G \setminus g(A).$$

Ponieważ $g$ jest lokalnym biholomorfizmem w otoczeniu $\zeta_i(w)$, $i = 1, \ldots, m$, i odwzorowanie $\sigma$ jest symetryczne, łatwo stwierdzamy, że odwzorowanie $\psi = \sigma \circ (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ jest holomorficzne w $G \setminus g(A)$. Skoro $g(A)$ jest zbiorem analitycznym a $\psi$ jest ograniczone, możemy rozszerzyć $\psi$ do ograniczonego odwzorowania $\tilde{\psi}$ na całym $G$. Tak więc $\tilde{\psi} \circ \gamma$ jest stałe.

Ustalmy $z' \in \mathbb{C}$. Jeśli $\gamma(z')$ należy do $G \setminus g(A)$, to oczywiście

$$\tilde{\psi}(\gamma(z')) = \sigma(\zeta_1(\gamma(z)), \ldots, \zeta_m(\gamma(z))).$$

Przypuśćmy teraz, że $\gamma(z')$ jest wartością krytyczną odwzorowania $g$. Ustalmy $x = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{C}^n)^m$ taki, by $\tilde{\psi} \circ \gamma = \sigma(x)$.

Weźmy $\zeta \in D$ takie by $g(\zeta) = \gamma(z')$ i niech $(\zeta_n) \subset D \setminus A$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $\zeta$. Zauważmy, że $\sigma(g^{-1}(g(\zeta_n))) = \tilde{\psi}(\zeta_n) \to \sigma(x)$, czyli $\sigma(\zeta_n) \to \sigma(x)$. Tak więc $\sigma(\zeta) = \sigma(x)$. Pokazaliśmy zatem że $g^{-1}(\gamma(z')) \subset \sigma^{-1}(\sigma(x))$.

Innymi słowy, dla dowolnego $w \in \gamma(\mathbb{C})$ zbiór $g^{-1}(w)$ jest zawarty w skończonym zbiorze $\sigma^{-1}(\sigma(x))$. Ale $\gamma$ jest nieograniczone, więc stąd natychmiast dostajemy sprzeczność z właściwością odwzorowania $g$. $\square$

**Uwaga 2.3.7.** Zauważmy, że odwzorowanie

$$\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \ni z \mapsto z + \frac{1}{z(z-1)} \in \mathbb{C}$$

jest właściwe. Tak więc, Twierdzenie 2.3.6 nie pozostaje prawdziwe, jeśli zamiast ograniczoności założymy jedynie hiperboliczność w sensie Brody'ego zbioru $D$.

Z drugiej strony w klasie pseudowypukłych obszarów Reinhardta hiperboliczność w sensie Brody'ego oznacza, z dokładnością to odwzorowań algebraicznych, ograniczoność (patrz Twierdzenie 4.3.3). Tak więc z powyższego twierdzenia wynika, że nie istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy hiperbolicznymi i niehiperbolicznymi pseudowypukłymi obszarami Reinhardta.

**Definicja 2.3.8.** *Dla pseudowypukłego obszaru Reinhardta $D$ w $\mathbb{C}^n$ poprzez $I(D)$ oznaczmy zbiór $i = 1, \dots, n$, dla których przecięcie $V_i \cap D$ nie jest hiperboliczne (jako obszar w $\mathbb{C}^{n-1}$). Połóżmy*

$$D^{hyp} := D \setminus (\bigcup_{i \in I(D)} V_i). \tag{2.3.10}$$

Zauważmy, że $D^{hyp}$ pokrywa się z $D$, jeśli przykładowo $D$ jest hiperboliczny bądź $D \subset \mathbb{C}_*^n$.

Używając powyższej notacji możemy sformułować następujące

**Twierdzenie 2.3.9.** *Niech $D$, $G$ będą pseudowypukłymi obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$, których obrazy logarytmiczne nie zawierają prostych afinicznych (tzn. $d(D) = d(G) = 0$). Niech $\varphi : D \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym. Wówczas*

$$\varphi(D^{hyp}) \subset G^{hyp}$$

*oraz restrykcja*

$$\varphi|_{D^{hyp}} : D^{hyp} \to G^{hyp}$$

*jest odwzorowaniem właściwym.*

Dowód. Na mocy Twierdzenie 2.3.6:

$$I(D) \neq \emptyset \iff I(G) \neq \emptyset.$$

Jeśli $I(D) = I(G) = \emptyset$ to teza jest trywialna. Przypuśćmy więc, że $I(D) \neq \emptyset$.

Ustalmy $i \in I(D)$. Przypuśćmy, nie tracąc na ogólności, że $i = 1$. Stosując Lemat 2.3.3 do funkcji

$$f : \mathbb{C} \ni z \mapsto \varphi(0, e^z) \in G$$

otrzymujemy inkluzję $\varphi(D \cap V_1) \subset M$. Innymi słowy $\varphi_1(0, z)\varphi_2(0, z) = 0$ dla $z \in \mathbb{C}_*$, więc, na mocy zasady identyczności, $\varphi(D \cap V_1)$ jest zawarty w $V_{j'} \cap G$ dla pewnego $j' = 1, 2$ oraz

$$\varphi(D \cap V_1) \cap (V_{j''})_* = \emptyset \quad \text{dla} \quad j' \neq j''. \tag{2.3.11}$$

Zauważmy, że tak wybrane $j'$ leży w zbiorze $I(G)$. Rzeczywiście, używając relacji (2.3.11) nietrudno sprawdzić, że

$$\varphi|_{D \cap V_1} : D \cap V_1 \to G \cap V_{j'}$$

jest odwzorowaniem właściwym. A zatem, na mocy Twierdzenia 2.3.6, $G \cap V_{j'}$ nie jest hiperboliczne, więc $j' \in I(G)$.

Załóżmy teraz, że $j \in I(G)$. Lemat 2.3.5 daje nam:

$$\varphi^{-1}(V_j \cap G) \subset M. \tag{2.3.12}$$

Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $\varphi^{-1}(V_j \cap G) \cap (V_i)_* = \emptyset$, o ile $i \notin I(D)$. Przypuśćmy, że nie jest to prawdą. w celu uproszczenia zapisu, przyjmijmy, że $j = 1$ oraz $1 \notin I(D)$. Mamy więc następującą sytuację

$$\varphi^{-1}(V_1 \cap G) \cap (V_1)_* \neq \emptyset, \quad 1 \notin I(D). \tag{2.3.13}$$

Niech $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie kanoniczną projekcją na drugą współrzędną.

Pseudowypukłość obszaru $D$, własność (2.3.13) oraz fakt, że $2 \in I(D)$ pociągają za sobą ograniczoność $\pi(D)$. Tak więc funkcja dana wzorem

$$v(z) = \max |\pi(\varphi^{-1}(0, z))|, \quad z \in \mathbb{C}_*, \tag{2.3.14}$$

jest stała (jako subharmoniczna i ograniczona na $\mathbb{C}_*$).

Niech $\rho = v$. Z (2.3.13) wynika, że $\rho \neq 0$. Tak więc, dla dowolnego $z \in \mathbb{C}_*$ istnieje $w = (w', w'') \in D$ takie, że

$$|\pi(w', w'')| = |w''| = \rho \quad \text{oraz} \quad \varphi(w) = z. \tag{2.3.15}$$

Z (2.3.12) wynika, że $w'$ pojawiające się w (2.3.15) musi być równe 0. W szczególności, $(V_2)_* \subset \varphi(\{0\} \times \rho\partial\mathbb{D})$. To daje oczywistą sprzeczność. □

Dowód Twierdzenia 2.2.3. Skoro dowolne odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy dwoma obszarami można rozszerzyć do odwzorowania właściwego pomiędzy obwiedniami holomorficzności tych obszarów, możemy założyć, że $D$ i $G$ są pseudowypukłe.

Niech $f : D \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym.

Nierówność $d(D) \leqslant d(G)$ wynika łatwo z Lematu 2.3.3. Rzeczywiście, przypuśćmy, że $d(G) < k := d(D)$. Wypukłość obrazu logarytmicznego obszaru $D$ razem z warunkiem $d(D) = k$ implikują istnienie liniowo niezależnych $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$, $a^j = (a^j_1, \dots, a^j_n)$, dla których $\sum t_j a^j + b \in \log D$ przy dowolnych $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ oraz $b \in \log D$. Stosując Lemat 2.3.3 do funkcji

$$\mathbb{C}^k \ni (z_1, \dots, z_k) = f(\exp(a^1_1 z_1 + \dots + a^k_1 z_k + b_1), \dots, \exp(a^1_n z_1 + \dots + a^k_n z_k + b_n)) \in G,$$

gdzie $b = (b_1, \dots, b_n) \in \log D$, łatwo stwierdzamy, że $f(D) \subset M$, co daje natychmiastową sprzeczność.

Pokażemy teraz nierówność $d(G) \leqslant d(D)$. Połóżmy $\tilde{k} := d(G)$ i dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $d(D) < \tilde{k}$. Argument użyty w pierwszej części dowodu pokazuje, że dla dowolnego $b \in G$ możemy skonstruować niezdegenerowane odwzorowanie $\psi_b : \mathbb{C}^{\tilde{k}} \to G$ takie, że $\psi_b(0) = b$. Niech $b$ będzie dowolną wartością regularną $f$ i połóżmy $\psi := \psi_b$.

Niech $m := n - \tilde{k} + 1$. Skoro $d(D) \leqslant n - m$, to istnieją liniowo niezależne wektory $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in \mathbb{R}^n$ oraz $R > 0$ takie, że $\log D \subset \bigcap_{j=1}^m C_{\alpha^j, R}$, gdzie $C_{\alpha^j, R}$ są dane formułą (2.3.2).

Dla $\alpha \in \mathbb{R}^n$ połóżmy $u_\alpha(z) := |z^\alpha|$, $z \in \mathbb{C}^n_*$. Zauważmy, że funkcja

$$v_{\alpha^j}(\lambda) := \max u_{\alpha^j}(f^{-1}(\psi(\lambda))), \quad \lambda \in \mathbb{C}^{\tilde{k}},$$

jest stała, $j = 1, \dots, m$ (jako subharmoniczna i ograniczona).

Regularność punktu $b$ pociąga za sobą istnienie pewnego niepustego obszaru $V \subset \mathbb{C}^{\tilde{k}}$, na którym zachodzi równość

$$v_{\alpha^j} = u_{\alpha^j} \circ \zeta \circ \psi, \quad j = 1, \dots, m,$$

gdzie $\zeta$ jest pewną funkcją holomorficzną na $V$ taką, że $\varphi(\zeta(\lambda)) = \lambda$, $\lambda \in V$.

A zatem funkcje $u_{\alpha^j} \circ \zeta \circ \psi$ są stałe, $j = 1, \ldots, m$. Możemy w tym miejscu powtórzyć rozumowanie wykorzystane w dowodzie Lematu 2.3.3, by stwierdzić, że pochodna $\zeta \circ \psi$ nie jest maksymalnego rzędu w otoczeniu początku układu współrzędnych. Jednakże $\zeta \circ \psi$ jest niezdegenerowane, jako złożenie lokalnego biholomorfizmu z odwzorowanie niezdegenerowanym. To prowadzi do sprzeczności.

Przejdźmy teraz do dowodu (2.2.3). Zakładamy więc, że $n = 2$ oraz $d(D) = d(G) = 0$.

Zauważmy, że równoważność

$$\#I(D) = 0 \Longleftrightarrow \#I(G) = 0 \tag{2.3.16}$$

wynika z Twierdzenia 2.3.6, Twierdzenia 4.3.3 i faktu, że obszar $D$ (bądź obszar $G$) jest hiperboliczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\#I(D) = 0$ (odpowiednio $\#I(G) = 0$).

A zatem, jeśli $\#I(D) = \#I(G) = 0$ to $D$ i $G$ są hiperboliczne. Istnieje więc odwzorowanie elementarne algebraiczne pomiędzy $D$ i $G$ (patrz Wniosek 2.1.2). Stąd już bardzo łatwo wynika, że $(t(D), s(D), s_*(D)) = (t(G), s(G), s_*(G))$.

Przypuśćmy więc, że $\#I(D) > 0$ oraz $\#I(G) > 0$. Pokażemy najpierw, że $\#I(D) = \#I(G)$.

Gdy $\#I(D) = 1$ natomiast $\#I(G) = 2$ to, na mocy Twierdzenia 2.3.9, $f(V_i \cap D) \subset V_1$ lub $f(V_i \cap D) \subset V_2$, gdzie $i \in I(D)$. Stąd i zasady identyczności wynika z kolei, że $f(V_i \cap D) \subset V_j$ dla pewnego $j = 1, 2$, oraz $f(V_i \cap D) \cap (V_{j'})_* = \emptyset$ dla $j' \neq j$. Ale jest to oczywiście sprzeczne z, również wynikającą z Twierdzenia 2.3.9, inkluzją $f^{-1}(V_1 \cup V_2) \subset V_i$,

Rozpatrzmy teraz sytuację gdy $\#I(D) = 2$ i $\#I(G) = 1$. Zmieniając w razie potrzeby kolejność współrzędnych przypuśćmy, że $1 \in I(G)$.

Załóżmy najpierw, że $t(G) = 2$. Wówczas $t(D^{hyp}) = 0$ oraz $t(G^{hyp}) = 1$. Jednakże, $\#I(D^{hyp}) = \#I(G^{hyp}) = 0$, więc, stosując rozwiązany już przypadek otrzymujemy, że $t(D^{hyp}) = t(G^{hyp})$; sprzeczność.

Jeśli natomiast $t(G) = 1$, to oczywiście $V_2 \cap G = \emptyset$. Wówczas

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto f_2(z, 0) \in \mathbb{C}_*$$

byłoby odwzorowaniem właściwym pomiędzy $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}_*$, co również jest niemożliwe (zob. np. Twierdzenie 2.1.4). Zatem rzeczywiście,

$$\#I(D) = \#I(G).$$

Jeśli $\#I(D) = \#I(G) = 2$ to wówczas $t(D) = t(G) = 2$, $s(D) = s(G) = 2$ oraz $s_*(D) = s_*(G) = 0$.

Z kolei, jeśli $\#I(D) = \#I(G) = 1$ to

$$t(D) = 1 + t(D^{hyp}) = 1 + t(G^{hyp}) = t(G).$$

W sytuacji gdy $t(D) = t(G) = 1$, to $s(D) = s(G) = 0$ i $s_*(D) = s_*(G) = 1$. Natomiast gdy $t(D) = t(G) = 2$, to $s(D) = s(G) = 1$ oraz $s_*(D) = s_*(G) = 0$.

Tym samym pokazaliśmy równość (2.2.3). $\square$

Dowód Twierdzenia 2.2.4. Niech $f : \widehat{D_1} \to \widehat{D_2}$ oznacza również rozszerzenie odwzorowania $f : D_1 \to D_2$ do obwiedni holomorficzności obszarów $D_1$ i $D_2$. Na mocy

Twierdzenia 2.3.9, restrykcja $f|_{\widehat{D}_1^{hyp}} : \widehat{D}_1^{hyp} \to \widehat{D}_2^{hyp}$ jest również odwzorowaniem właściwym.

Gdyby $s(D_1) = 2$ bądź $s_*(D_1) = t(D_1) = 1$, to wówczas obszar $\widehat{D}_1^{hyp}$ byłby podzbiorem $\mathbb{C}_*^2$. Używając opisu nieelementarnych odwzorowań właściwych z Twierdzenia 2.1.1, natychmiast widzimy, że $f|_{\widehat{D}_1^{hyp}}$ musi być odwzorowaniem elementarnym. Zasada identyczności prowadzi w oczywisty sposób do sprzeczności.

Tak więc, pozostaje rozważyć przypadek, gdy $t(D_1) = t(D_2) = 2$, $s(D_1) = s(D_2) = 1$ oraz $s_*(D_1) = s_*(D_2) = 0$. Z dokładnością do zamiany współrzędnych możemy założyć, że $\widehat{D}_i \cap V_2 = V_2$ oraz $\widehat{D}_i \cap V_1$ są zbiorami ograniczonymi dla $i = 1, 2$.

Wypukłość obrazów logarytmicznych $\widehat{D}_i$, $i = 1, 2$, implikuje istnienie $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ dla których

$$\widehat{D}_i \subset \Big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ |z||w|^{k_i} < c_i\Big\}$$

dla pewnych dodatnich $c_1$ i $c_2$.

Wynika stąd więc, że odwzorowanie $\Phi_{A_i}$, gdzie $A_i = \begin{pmatrix} 1 & k_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, jest biholomorfizmem pomiędzy $\widehat{D}_i^{hyp}$ a ograniczonym obszarem Reinhardta $\Phi_{A_i}(\widehat{D}_i^{hyp})$, $i = 1, 2$. Tak więc

$$g := \Phi_{A_2} \circ f \circ \Phi_{A_1^{-1}} : \Phi_{A_1}(\widehat{D}_1^{hyp}) \to \Phi_{A_2}(\widehat{D}_2^{hyp}) \tag{2.3.17}$$

jest nieelementarnym odwzorowaniem holomorficznym właściwym pomiędzy ograniczonymi obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$.

Zredukowaliśmy sytuację do momentu, w którym możemy bezpośrednio zastosować klasyfikację uzyskaną w Twierdzeniu 2.1.1. Tak więc zachodzi jedna z dwóch następujących sytuacji:

(i) $\widehat{D}_i^{hyp} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ C_i|z|^{p_i}|w|^{p_ik_i+q_i} < 1, \ 0 < |w| < C_i'\}$, gdzie $p_i, q_i$ względnie pierwszymi liczbami całkowitymi takimi, że $p_ik_i + q_i > 0$, $p_i > 0$, $q_i \leqslant 0$, natomiast $C_i, C_i' > 0$, $i = 1, 2$.

(ii) $\widehat{D}_1^{hyp} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ 0 < |w| < C_1 \exp(-E_1|z|^{2a_1}|w|^{2k_1a_1-2b_1})\}$, natomiast $\widehat{D}_2^{hyp} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ 0 < |w| < C_2 \exp(-E_2|z|^{2/a_2}|w|^{2k_2/a_2-2b_2/a_2c_2})\}$, gdzie $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{N}$, $C_i, E_i > 0$, $i = 1, 2$.

Przypuśćmy najpierw, że zachodzi sytuacja (i). Stosując klasyfikację z [**Isa-Kru**] raz jeszcze stwierdzamy, że odwzorowanie $g$ jest postaci

$$g(z, w) = (\lambda_1 z^a w^b B(C_1 z^{p_1} w^{q_1}), \lambda_2 w^c), \quad (z, w) \in \Phi(\widehat{D}_1^{hyp}),$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a, c > 0, aq_1 - bp_1 \geqslant 0$, $\frac{q_2}{p_2} = \frac{aq_1 - bp_1}{cp_1}$, $B$ jest niestałym, skończonym iloczynem Blaschkego nie znikającym w 0 oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}_*$. Połóżmy $\tilde{q}_i = p_ik_i + q_i$. Oczywiście liczby $p_i$ i $\tilde{q}_i$ są względnie pierwsze. Z opisu obszaru $\widehat{D}_i$ wnioskujemy, że $\tilde{q}_i > 0$.

Elementarne obliczenia dają

$$f(z, w) = (\mu_1 z^a w^{ak_1 - ck_2 + b} B(C_1 z^{p_1} w^{\tilde{q}_1}), \mu_2 w^c), \quad (z, w) \in \widehat{D}_1^{hyp},$$

dla pewnych stałych $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}_*$. Skoro $f$ rozszerza się właściwie do $\widehat{D}_1$, musi zachodzić równość $ak_1 - ck_2 + b = 0$. Ponadto $\frac{\tilde{q}_2}{p_2} = \frac{a\tilde{q}_1}{cp_1}$.

Z drugiej strony nietrudno zauważyć, że dowolny obszar Reinhardta zawarty w $\widehat{D_1}$, którego obraz poprzez odwzorowanie $f$ jest obszarem Reinhardta, i którego obwiednia holomorficzności pokrywa się z $\widehat{D_1}$, jest równy $\widehat{D_1} \setminus P_1 \times \{0\}$, gdzie $P_1$ jest dowolnym domkniętym podzbiorem Reinhardta w $\mathbb{C}$.

Rozważmy teraz sytuację (ii). Wprowadźmy oznaczenia $m_1 := k_1 a_1 - b_1$, $m_2 := k_2 c_2 - b_2$. Podobnie jak wcześniej, biorąc pod uwagę postać $\widehat{D_1}$ i $\widehat{D_2}$ widzimy, że $m_1, m_2 \geqslant 0$.

Dla $s \in \mathbb{C}_*$ i $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ połóżmy

$$h_1(z) := e^{it_1} z + s, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$h_2(z) = e^{it_2} \exp(2\bar{s} e^{it_1 z} + |s|^2), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Używając wzoru na odwzorowanie $g$ (tutaj raz jeszcze stosujemy klasyfikację uzyskaną w Twierdzeniu 2.1.1):

$$f(z,w) = (h_1(z^{a_1} w^{m_1})^{a_2} h_2(z^{a_1} w^{m_1})^{m_2} w^{-m_2 c_2}, h_2(z^{a_1} w^{m_2})^{-c_2} w^{c_1 c_2}), \tag{2.3.18}$$

gdzie $(z,w) \in \widehat{D}_1^{hyp}$. Skoro $f$ można rozszerzyć wzdłuż $V_1$, widzimy, że $m_1 = m_2 = 0$.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że dowolny obszar Reinhardta zawarty w $\widehat{D_1}$, którego otoczka holomorficzności jest równa $\widehat{D_1}$, i którego obraz poprzez odwzorowanie $f$ jest Reinhardta, jest równy $\widehat{D_1}$. □

## 2.4. Uwagi dotyczące odwzorowań holomorficznych właściwych $f : D \to G$ pomiędzy obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ takimi, że $d(D) = d(G) = 2$

Poniżej prezentujemy częściowy wynik o odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami Reinhardta, których obrazy logarytmiczne pokrywają się z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$.

**Propozycja 2.4.1.** *Zbiory* $\mathrm{Prop}(\mathbb{C}\times\mathbb{C}, \mathbb{C}\times\mathbb{C}_*)$, $\mathrm{Prop}(\mathbb{C}\times\mathbb{C}, \mathbb{C}_*\times\mathbb{C}_*)$ *oraz* $\mathrm{Prop}(\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_* \times \mathbb{C}_*)$ *są puste.*

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$ jest odwzorowaniem holomorficznym właściwym. Standardowy topologiczny argument daje istnienie odwzorowania holomorficznego $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ takiego, że

$$f = (\psi_1, e^{\psi_2}).$$

Nietrudno stwierdzić, że $\psi$ jest właściwe, a więc w szczególności surjektywne. A zatem istnieje ciąg $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^2$, nie posiadający punktu skupienia w $\mathbb{C}^2$ taki, że $\psi(z_n) = (0, 2n\pi i)$, $n \in \mathbb{N}$. A zatem $f(z_n) = (0,1)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd natychmiast wynika już sprzeczność.

Podobny argument pozwala nam łatwo stwierdzić, że $\mathrm{Prop}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}_*^2) = \emptyset$.

Przypuśćmy teraz, że $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_*^2$ jest holomorficzne i właściwe. Stosując do odwzorowania $\mathbb{C}^2 \ni (z,w) \mapsto g(z, e^w) \in \mathbb{C}_*^2$ twierdzenie o podnoszeniu, otrzymujemy istnienie holomorficznego odwzorowania $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ takiego, że $g(z, e^w) = (e^{\varphi_1(z,w)}, e^{\varphi_2(z,w)})$ dla $z, w \in \mathbb{C}$.

Ustalmy $z \in \mathbb{C}$ i połóżmy $\tilde{g}_i = g_i(z, \cdot)$, $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i(z, \cdot)$, $i = 1, 2$. Skoro $\tilde{g}_i(e^w) = e^{\tilde{\varphi}_i(w)}$ widzimy, że $\tilde{\varphi}_i'(w) = \zeta_i(e^w)$, $w \in \mathbb{C}$, gdzie $\zeta_i$ jest odwzorowaniem holomorficznym danym wzorem $\zeta_i(\lambda) = \frac{\lambda \tilde{g}_i'(\lambda)}{\tilde{g}_i(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{C}_*$. Rozwijając $\zeta_i$ w szereg Laurenta dostajemy

$$\tilde{\varphi}_i(w) = a_i w + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_{in} e^{nw}$$

dla pewnych $a_i = a_i(z), a_{in} = a_{in}(z) \in \mathbb{C}$.

Tak więc istnieje odwzorowanie holomorficzne $\widehat{\varphi}_i(\cdot) = \widehat{\varphi}_i(z, \cdot)$ na $\mathbb{C}_*$ takie, że

$$\tilde{\varphi}_i(w) = a_i w + \widehat{\varphi}_i(e^w), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Ponieważ $e^{a_i w} = \frac{\tilde{g}_i(e^w)}{e^{\widehat{\varphi}_i(e^w)}}$ natychmiast stwierdzamy, że $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

A zatem $\varphi_i(z, w) = a_i(z) w + \widehat{\varphi}_i(z, e^w)$, $z, w \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. W szczególności

$$g(z, w) = (w^{a_1(z)} e^{\widehat{\varphi}_1(z,w)}, w^{a_2(z)} e^{\widehat{\varphi}_2(z,w)}), \quad (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}_*. \tag{2.4.1}$$

Wiadomo, że

$$a_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\frac{\partial g_i}{\partial \lambda}(z, \lambda)}{g_i(z, \lambda)} d\lambda, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wnioskujemy stąd, że $a_1$, $a_2$ są stałe (przypomnijmy, że $a_i(z) \in \mathbb{Z}$), więc $\widehat{\varphi}_i$ jest odwzorowaniem holomorficznym na $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$, $i = 1, 2$.

Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $a_2 = 0$. Istotnie, jeśli $a_1 a_2 \neq 0$ możemy rozważać złożenie $g$ z właściwym holomorficznym odwzorowaniem $F : \mathbb{C}_*^2 \to \mathbb{C}_*^2$ danym wzorem $F(z, w) = (z^{a_2}, \frac{w^{a_1}}{z^{a_2}})$.

Połóżmy

$$h(z, w) = (w^{a_1} e^{\widehat{\varphi}_1(z,w)}, \widehat{\varphi}_2(z, w)), \quad (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}_*.$$

Oczywiście odwzorowanie $h : \mathbb{C} \times \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_* \times \mathbb{C}$ jest właściwe.

Teraz, aby otrzymać sprzeczność, wystarczy postępować dokładnie tak jak w przypadku $\mathrm{Prop}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C} \times \mathbb{C}_*)$. □

**Wniosek 2.4.2.** $\mathrm{Prop}(A \times \mathbb{C}, A \times \mathbb{C}_*)$ *jest zbiorem pustym dla dowolnego obszaru* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$.

Dowód. W przypadku, gdy $\#(\mathbb{C} \setminus A) \leqslant 1$, rezultat wynika z Propozycji 2.4.1.

Załóżmy więc, że $\#(\mathbb{C} \setminus A) > 1$ i niech

$$f : A \times \mathbb{C} \to A \times \mathbb{C}_*$$

będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym. Na mocy Twierdzenia Uniformizacyjnego istnieje nakrycie uniwersalne $\pi : \mathbb{D} \to A$ oraz $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \times \mathbb{C}, \mathbb{D})$ takie, że

$$f(\pi(\lambda), w) = (\pi(\psi(\lambda, w)), f_2(\pi(\lambda), w)) \quad \text{dla} \quad (\lambda, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}.$$

Ustalmy dowolne $\lambda \in \mathbb{D}$ i zauważmy, że odwzorowanie $\psi(\lambda, \cdot)$ jest stałe. Właściwość $f$ pociąga za sobą właściwość odwzorowania

$$f_2(\pi(\lambda), \cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_*,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

**Uwaga 2.4.3.** Ponieważ

$$\phi : \mathbb{C}_* \ni z \mapsto z + 1/z \in \mathbb{C}$$

jest właściwe, to istnieją odwzorowanie holomorficzne właściwe z $\mathbb{C}_*^2$ na $\mathbb{C}^2$, z $\mathbb{C}_*^2$ na $\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*$ oraz z $\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*$ na $\mathbb{C}^2$. Oczywiście takie odwzorowania nie mogą być elementarne.

Z drugiej strony, Twierdzenie 2.2.4 oraz wyniki z Twierdzeń 2.1.1, 2.1.3 i 2.1.4 pozwalają stwierdzić, że jeśli istnieje odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy dwoma obszarami Reinhardta $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^2$ takimi, że prosta $\alpha\mathbb{R} + \beta$ nie jest zawarta w $\log \widehat{D}_1$ dla żadnych $\alpha \in \mathbb{Q}^2$, $\beta \in \mathbb{R}^2$, to wówczas istnieje odwzorowanie elementarne właściwe pomiędzy tymi obszarami.

ROZDZIAŁ 3

# Problem Serre'a dla niehiperbolicznych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$

## 3.1. Wprowadzenie do problemu Serre'a

W 1953 roku (zob. [**Ser**]), J.-P. Serre postawił następujące pytanie:

**Czy holomorficzna wiązka włóknista, z bazą Steina i włóknem Steina, sama również jest Steina?**

Poprzez $\mathfrak{S}$ będziemy oznaczać klasę obszarów $D$, dla których odpowiedź na problem Serre'a jest pozytywna (z włóknem będącym obszarem $D$). Mówiąc precyzyjniej, powiemy, że rozmaitość Steina $D$ należy do klasy $\mathfrak{S}$, jeśli dla dowolnej rozmaitości Steina $B$, dowolna wiązka włóknista $E \to B$ z bazą $B$ i włóknem $D$, jest Steina. Używając tej notacji można, pytanie postawione przez J.-P. Serre'a, sformułować w następujący sposób:

**Czy wszystkie rozmaitości Steina należą do klasy** $\mathfrak{S}$?

Prześledźmy pokrótce historię rozwiązywania tego problemu. I tak na przykład, odpowiedź na problem Serre'a okazała się być pozytywna w następujących przypadkach:

(i) gdy włókno jest 0-wymiarową rozmaitością (tzn. wiązka jest nakryciem holomorficznym) ([**Ste 1**]);
(ii) gdy włókno jest obszarem w $\mathbb{C}$ (problem rozwiązany niezależnie w pracach [**Siu 1**], [**Hir 2**] oraz [**Sib**]);
(iii) (uogólnienie poprzedniego punktu) gdy włókno jest 1-wymiarową rozmaitością Steina ([**Mok 1**]);
(iv) gdy włókno jest Banacha-Steina ([**Fis 1**], [**Fis 2**] i [**Fis 3**]), a więc w szczególności, gdy włókno jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^n$, silnie zupełnym ze względu na metrykę Carathéodory'ego ([**Hir 1**]);
(v) włókno jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^n$, z brzegiem klasy $\mathcal{C}^2$ ([**For-Die**]);
(vi) gdy włókno jest hiperwypukłym obszarem w $\mathbb{C}^n$ ([**Ste 2**]);
(vi) włókno jest ograniczonym obszarem pseudowypukłym w $\mathbb{C}^n$, z pierwszą liczbą Bettiego równą 0 ([**Siu 2**]).

Pewne klasy obszarów, dla których rozwiązanie problemu Serre'a okazywało się być pozytywne zostały jeszcze znalezione w pracach Königsbergera ([**Kön**]) i Pfluga ([**Pfl**]).

Zauważmy, że założenie o liczbach Bettiego w punkcie (vi) jest założeniem czysto topologicznym. Wydawało się więc, że odpowiedź na problem Serre'a jest pozytywna. Jednakże w 1977 roku H. Skoda pokazał, że $\mathbb{C}^2 \notin \mathfrak{S}$ (zob. [**Sko**]).

Niemniej wciąż przypuszczano, że rozwiązanie powinno być pozytywne w przypadku ograniczonym. Dlatego też w 1978 roku Y.-T. Siu przeformułował problem

Serre'a, stawiając w pracy [**Siu 3**] hipotezę, że holomorficzna wiązka włóknista z bazą Steina, której włókno jest relatywnie zwartym, otwartym podzbiorem rozmaitości Steina, sama również jest Steina.

W 1984 roku Coeuré i Loeb obalili także i tę hipotezę (zob. [**Coe-Loeb**]) - skonstruowali kontrprzykład z włóknem będącym ograniczonym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^2$.

W pracy [**Pfl-Zwo**] P. Pflug i W. Zwonek podali charakteryzacje wszystkich hiperbolicznych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ nie leżących w klasie $\mathfrak{S}$. Udowodnili następujące

**Twierdzenie 3.1.1** (zob. [**Pfl-Zwo**]). *Niech $D$ będzie pseudowypukłym hiperbolicznym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Wówczas $D \notin \mathfrak{S}$ wtedy i tylko wtedy gdy $D$ jest algebraicznie równoważny z obszarem Reinhardta $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^2_*$, dla którego istnieje macierz $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z})$ z wartościami własnymi $\lambda$ i $\frac{1}{\lambda}$, gdzie $\lambda > 1$, taka, że*

$$\log \tilde{D} = \{tv + sw : \ s > \varphi(t), \ t > 0\} \ (\textit{lub} \ \log \tilde{D} = \{tv + sw : \ s > \varphi(t), \ t < 0\}),$$

*gdzie $v, w \in \mathbb{R}^2$ są wektorami własnymi odpowiadającymi wartościom własnym $\lambda$ i $\frac{1}{\lambda}$ oraz $\varphi : (0, \infty) \to [0, \infty)$ (odpowiednio $\varphi : (-\infty, 0) \to [0, \infty)$) jest wypukłą funkcją spełniającą równość $\varphi(t\lambda) = \frac{1}{\lambda}\varphi(t)$, $t \in (0, \infty)$ (odpowiednio dla $t \in (-\infty, 0)$).*

**Definicja 3.1.2.** *Powiemy, że $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ działa multiplikatywnie na obszar Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$ jeśli odwzorowanie $\Phi_M$ (dane wzorem (4.3.1)) jest automorfizmem obszaru $D$.*

**Wniosek 3.1.3** (zob. [**Pfl-Zwo**]). *Niech $D$ będzie pseudowypukłym, hiperbolicznym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Wówczas $D \in \mathfrak{S}$ wtedy i tylko wtedy gdy nie istnieje macierz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z})$ działająca multiplikatywnie na obszar $D$, której promień spektralny jest większy od* 1.

W 2006 K. Oeljeklaus i D. Zaffran rozszerzyli w [**Oel-Zaf**] powyższy wniosek na ograniczone obszary Reinhardta w $\mathbb{C}^3$ (ale nie uzyskali już dokładnego opisu obszarów Reinhardta z klasy $\mathfrak{S}$).

Wspomnijmy także, że twierdzenie klasyfikacyjne dla ograniczonych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^d_*$ przy dowolnym $d \geqslant 2$ zostało uzyskane ostatnio przez D. Zaffrana:

**Twierdzenie 3.1.4** (zob. [**Zaf**]). *Niech $D$ będzie ograniczonym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n_*$. Wówczas $D \in \mathfrak{S}$ wtedy i tylko wtedy gdy nie istnieje macierz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z})$ działająca multiplikatywnie na obszar $D$, której promień spektralny jest większy od* 1.

Wydaje się, że powyższe twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich ograniczonych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^n$, a ograniczenie się jedynie do obszarów zawartych w $\mathbb{C}^n_*$ jest założeniem wyłącznie technicznym.

## 3.2. Przedstawienie wyników

Głównym wynikiem tej sekcji jest rozwiązanie problemu Serre'a w klasie niehiperbolicznych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Wykażemy mianowicie następujące

**Twierdzenie 3.2.1.** *Niech $D$ będzie pseudowypukłym, niehiperbolicznym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Wówczas $D \notin \mathfrak{S}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{C}_*^2 \subset D$ bądź $D$ jest algebraicznie równoważny z obszarem postaci*

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_*^2 : \ |z_1||z_2|^{p \pm \sqrt{q}} < 1\}, \tag{3.2.1}$$

*gdzie $p, q \in \mathbb{Q}, \ q > 0, \ \sqrt{q} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Przy okazji naszych rozważań otrzymamy twierdzenie charakteryzujące niehiperboliczne pseudowypukłe obszary Reinhardta, których grupa automorfizmów nie jest zwarta. Opisuje to poniższe

**Twierdzenie 3.2.2.** *Niech $D$ będzie niehiperbolicznym, pseudowypukłym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^2$.*

*Wówczas grupa* $\operatorname{Aut}(D)$ *nie jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy*

- *obraz logarytmiczny obszaru $D$ zawiera prostą zespoloną, lub*
- *(z dokładnością do permutacji współrzędnych i składowych) $D$ jest zawarty w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$, $\{0\} \times \mathbb{C}_* \subset D$ oraz $\log D = \{(t, s) : \ t < \psi(s), \ s \in \mathbb{R}\}$, gdzie $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wklęsłą funkcją spełniającą warunek $\psi(\beta + s) - \psi(s) = \alpha + ks, \ s \in \mathbb{R}$, dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \neq 0, \ k \in \mathbb{Z}_*$.*

**Uwaga 3.2.3.** Przykładami odwzorowań $\psi$ pojawiających się w Twierdzeniu 3.2.2 są funkcje $\psi(s) = as^2 + bs + c$, $s \in \mathbb{R}$, z odpowiednio dobranymi $a < 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Natychmiastową konsekwencją naszych rozważań jest

**Wniosek 3.2.4.** *Niech $D$ będzie niehiperbolicznym, pseudowypukłym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ takim, że $d(D) < 2$. Wówczas $D \in \mathfrak{S}$ wtedy i tylko wtedy gdy nie istnieje macierz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z})$ działająca multiplikatywnie na obszar $D$, której promień spektralny jest większy od* 1.

Naturalne jest pytanie o prawdziwość powyższego wniosku dla pseudowypukłych obszarów Reinhardta $D$ takich, że $d(D) = 2$. Zauważmy, że nie jest on prawdziwy dla $\mathbb{C}^2$ oraz $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$. Wynika to z elementarnego faktu, że nie istnieje macierz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z})$ o promieniu spektralnym większym niż 1, działająca multiplikatywnie na $\mathbb{C}^2$ bądź $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$.

Z kolei dla $\mathbb{C}_*^2$ Wniosek 3.2.4 pozostaje prawdziwy, dzięki dużo bogatszej grupie automorfizmów elementarnych - dla dowolnej macierzy $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z})$ takiej, że $|\det M| = 1$, odwzorowanie $\Phi_M$ jest automorfizmem $\mathbb{C}_*^2$.

Następujące dwa Twierdzenie będą wykorzystywane w naszych rozważaniach. Dostarczają one klasy obszarów, dla których rozwiązanie problemu Serre'a jest pozytywne. Pierwsze z nich to tak zwane *kryterium Stehlé'a.*

**Twierdzenie 3.2.5** (zob. [**Mok 2, Ste 3**]). *Niech $D$ będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. Jeśli istnieje plurisubharmoniczna, wyczerpująca i przyjmująca jedynie wartości rzeczywiste funkcja $u$ na $D$ taka, że $u \circ f - u$ jest ograniczona z góry dla dowolnego $f \in$* $\operatorname{Aut}(D)$, *to $D \in \mathfrak{S}$.*

**Uwaga 3.2.6.** Zauważmy, że kryterium Stehlé'a jest spełnione między innymi przez obszary, których grupa automorfizmów, wyposażona w topologię zbieżności jednostajnej, jest zwarta. Rzeczywiście, niech $u \in \mathcal{PSH}(D, \mathbb{R})$ będzie dowolną funkcją wyczerpującą dla $D$. Zdefiniujmy

$$v(z) := \sup\{u(f(z)) |\ f \in \mathrm{Aut}(D)\}. \tag{3.2.2}$$

Zwartość grupy automorfizmów $D$ implikuje, że $v^*$ jest dobrze określoną funkcją plurisubharmoniczną o wartościach rzeczywistych. Z nierówności $u \leqslant v$ wynika, że $v$ jest wyczerpująca. Ponadto, wprost z definicji

$$v \circ f = v, \quad f \in \mathrm{Aut}(D).$$

Stąd i z definicji regularyzacji górnej otrzymujemy, że $v^*(x) \leqslant v^*(f(x))$, $x \in D$, $f \in \mathrm{Aut}(D)$. Stosując tę nierówność do $f^{-1}$ widzimy, że

$$v^* \circ f = v^*, \quad f \in \mathrm{Aut}(D).$$

A zatem $v^*$ spełnia kryterium Stehlé'a.

**Twierdzenie 3.2.7** (zob. [**Mok 1**]). *Dowolna powierzchnia Riemanna należy do $\mathfrak{S}$.*

Dalsza część zorganizowana jest w następujący sposób. W Sekcji 3.3 przedstawiamy dowód Twierdzenia 3.2.1 dla obszarów Reinhardta typu wymiernego.

Następna sekcja poświecona jest rozwiązaniu problemu Serre'a w klasie obszarów Reinhardta typu niewymiernego. Ciekawy wydaje się otrzymany tu związek pomiędzy grupą automorfizmów obszaru Reinhardta drugiego typu a znanym *równaniem Pella*.

W Sekcji 3.5 rozważamy niehiperboliczne obszary Reinhardta, które po usunięciu osi $(\mathbb{C} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{C})$ stają się hiperboliczne.

Wydaje nam się, że rozwiązanie problemu Serre'a dla $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$ jest znane. Jednakże nie mogąc znaleźć tego w literaturze zamieściliśmy w ostatniej sekcji szkic wyjaśniający, jak łatwo zastosować do tego obszaru procedurę użytą w [**Dem 2**].

## 3.3. Przypadek „wymierny”

Będziemy potrzebować następującego wyniku:

**Lemat 3.3.1** ([**Ste 3**]). *Niech $B$ będzie rozmaitością Steina. Wówczas, dla dowolnego pokrycia zbiorami otwartymi $\{U_\alpha\}$ zbioru $B$ istnieje lokalnie skończone pokrycie $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ i rodzina ściśle plurisubharmonicznych, ciągłych funkcji $h_j$ w otoczeniu $\overline{C_j}$, gdzie $C_j = \bigcup_{i\leqslant j} B_i$, spełniające następujące warunki*

*(i) każdy $B_j$ jest relatywnie zwarty w pewnym $U_\alpha$,*
*(ii) $C_j$ jest Steina dla wszystkich $j$,*
*(iii) $h_j < 0$ w $C_j \setminus B_j$ i $h_j > 1$ w otoczeniu (branym relatywnie w $C_j$) zbioru $\overline{C_j \setminus C_{j-1}} \cap C_j$, $j \in \mathbb{N}$ ($C_0 := \emptyset$).*

**Twierdzenie 3.3.2.** *Dowolny obszar Reinhardta $D$ w $\mathbb{C}^2$ postaci (2.1.2) typu wymiernego należy do klasy $\mathfrak{S}$.*

DOWÓD. Rozważamy kolejno cztery przypadki.

($a$) Najpierw skupmy naszą uwagę na sytuacji, gdy włókno jest równe $D = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ |z||w| < 1\}$.

Rdzeiem naszej metody jest modyfikacja idei, której użył J.-L. Stehlé w dowodzie Lematu 3.3.1. Niech $\pi : E \to B$ będzie holomorficzną wiązką włóknistą z bazą Steina $B$ i włóknem $D$. Możemy założyć, że $E$ jest postaci (4.7.3) (patrz Dodatek)

Używając opisu grupy automorfizmów obszaru $D$ (zob. Twierdzenie 2.1.3) otrzymujemy, że dla dowolnego elementu $b \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ funkcja przejścia $\tau_{\alpha,\beta}$ musi być jednej z dwóch poniższych postaci:

$$\begin{cases} \tau_{\alpha,\beta}(b,z,w) = (b, zf_{\alpha,\beta}(b,zw), e^{i\theta_{\alpha,\beta}(b)}w/f_{\alpha,\beta}(b,zw)) \quad \text{lub} \\ \tau_{\alpha,\beta}(b,z,w) = (b, wf_{\alpha,\beta}(b,zw), e^{i\theta_{\alpha,\beta}(b)}z/f_{\alpha,\beta}(b,zw)), \end{cases}$$

($(z,w) \in D$), dla pewnej $f_{\alpha,\beta}(b,\cdot) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D})$ i $\theta_{\alpha,\beta}(b) \in \mathbb{R}$. Ponieważ $\tau_{\alpha,\beta}$ jest holomorficzna, więc odwzorowanie $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \ni b \mapsto e^{i\theta_{\alpha,\beta}(b)} \in \partial\mathbb{D}$ jest holomorficzne, a więc lokalnie stałe.

Niech $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to B$ będzie holomorficzną wiązkę włóknistą z bazą $B$ i włóknem $\mathbb{D}$, której funkcje przejścia dane są wzorami

$$\tilde{\tau}_{\alpha,\beta}(b,\lambda) = (b, e^{i\theta_{\alpha,\beta}(b)}\lambda), \ b \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta, \ \lambda \in \mathbb{D}.$$

Skoro włókno wiązki $\tilde{\pi}$ to $\mathbb{D}$, to z Twierdzenia 3.2.7 wynika, że $\tilde{E}$ jest Steina.

Stosując Lemat 3.3.1 do rodziny $\{\tilde{\pi}^{-1}(\Omega_\alpha)\}$ otrzymujemy lokalnie skończone pokrycie $\{B_j\}$ oraz rodzinę ściśle plurisubharmonicznych ciągłych funkcji $\{h_j\}$ spełniających warunki (i)-(iii) Lematu 3.3.1. Niech

$$p : E \ni [(b,z,w)] \mapsto [(b,zw)] \in \tilde{E}$$

będzie naturalną surjekcją pomiędzy $E$ i $\tilde{E}$.

Dla $j \in \mathbb{N}$ wybierzmy $\alpha_j$ takie, by obszar $B_j$ był relatywnie zwarty w $\tilde{\pi}^{-1}(\Omega_{\alpha_j})$. Niech $\tau_j := \tau_{\alpha_j}$ będzie jakąkolwiek trywializacją wiązki włóknistej $\pi : E \to B$, zdefiniowaną na $p^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(\Omega_{\alpha_j}))$. Połóżmy

$$l(b,z,w) = \max\{\log^+|z|, \log^+|w|\}, \quad (b,z,w) \in B \times \mathbb{C}^2.$$

Wybór $\{B_j\}$ gwarantuje, że dla dowolnych $i,j \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sup\{l(\tau_i \circ \tau_j^{-1}(b,z,w)) - l(b,z,w) : \ [b,z,w] \in p^{-1}(B_i \cap B_j)\} < \infty. \tag{3.3.1}$$

Będziemy teraz konstruować indukcyjnie odpowiednią rodzinę funkcji plurisubharmonicznych.

Połóżmy

$$v_1(x) = \exp\Big(h_1\big(p(x)\big) + l\big(\tau_1(x)\big)\Big), \quad x \in p^{-1}(B_1).$$

Zauważmy, że warunek (3.3.1) pozwala wybrać stałe $d \in (0,1)$ i $M > 0$ takie, że

$$dM\exp\Big(l\big(\tau_2(x)\big)\Big) \leqslant v_1(x) \leqslant 2M\exp\Big(l\big(\tau_2(x)\big)\Big), \quad x \in p^{-1}(B_1 \cap B_2). \tag{3.3.2}$$

Zdefiniujmy

$$\tilde{v}_2(x) = 2M\exp\Big(l\big(\tau_2(x)\big)\Big)\exp\Big(\big(1 - h_2(p(x))\big)\log\frac{d}{2}\Big), \quad x \in p^{-1}(B_2).$$

Z wyboru stałych $d, M$ wynika, że jeśli $h_2(p(x)) < 0$, $x \in p^{-1}(B_1 \cap B_2)$, to wówczas $\tilde{v}_2(x) < v_1(x)$. Ponadto, jeśli $h_2(p(x)) > 1$, $x \in p^{-1}(B_1 \cap B_2)$, to $\tilde{v}_2(x) > v_1(x)$. Tak więc kładąc

$$v_2(x) = \begin{cases} v_1(x), \quad x \in p^{-1}(B_1 \setminus B_2), \\ \max\{v_1(x), \tilde{v}_2(x)\}, \quad x \in p^{-1}(B_1 \cap B_2), \\ \tilde{v}_2(x), \quad x \in p^{-1}(B_2 \setminus B_1), \end{cases}$$

otrzymujemy dobrze zdefiniowaną plurisubharmoniczną i ciągłą funkcję na $p^{-1}(B_1 \cup B_2) = p^{-1}(C_2)$.

Podobnie definiujemy

$$\tilde{v}_3(x) = 2M' \exp\Big(l\big(\tau_3(x)\big)\Big) \exp\Big(1 - h_3\big(p(x)\big) \log \frac{d'}{2}\Big) \quad \text{dla} \quad x \in p^{-1}(B_3),$$

gdzie $d' \in (0,1)$ i $M' > 0$ są wybrane tak, by

$$d'M' \exp\Big(l\big(\tau_3(x)\big)\Big) \leqslant v_2(x) \leqslant 2M' \exp\Big(l\big(\tau_3(x)\big)\Big), \quad x \in p^{-1}(B_3 \cap C_2) \qquad (3.3.3)$$

Podobnie jak wcześniej rozszerzamy ją do funkcji $v_3$ plurisubharmonicznej na $p^{-1}(C_3)$ w następujący sposób:

$$v_3(x) = \begin{cases} v_2(x), \quad x \in p^{-1}(C_2 \setminus B_3), \\ \max\{v_2(x), \tilde{v}_3(x)\}, \quad x \in p^{-1}(C_2 \cap B_3), \\ \tilde{v}_3(x), \quad x \in p^{-1}(B_3 \setminus C_2). \end{cases}$$

Powtarzając indukcyjnie tę procedurę, otrzymujemy ciąg plurisubharmonicznych, ciągłych funkcji $v_j \in \mathcal{PSH}(p^{-1}(C_j))$ takich, że $v_j \leqslant v_{j+1}$ na $p^{-1}(C_j)$ oraz $v_j = v_{j+1}$ na $p^{-1}(C_j \setminus B_{j+1})$.

Skoro pokrycie $\{B_j\}$ jest lokalnie skończone, kładąc $v = \lim_j v_j$, definiujemy plurisubharmoniczną funkcję na $E$.

Niech $\tilde{u}$ będzie ściśle plurisubharmoniczną, wyczerpującą funkcją dla $\tilde{E}$. Z powyższej konstrukcji natychmiast wynika, że

$$u := \max\{\tilde{u} \circ p, v\} \qquad (3.3.4)$$

jest plurisubharmoniczną, wyczerpującą funkcja na $E$. Teraz, by wykazać, że $E$ Steina, wystarczy powtórzyć dokładnie rozumowanie N. Moka z dowodu twierdzenia ulepszającego kryterium Stehlé'a ([**Mok 2**], Appendix III).

($b$) Rozważmy przypadek, gdy włókno jest postaci

$$D = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ |z|^p |w|^q < 1\}$$

dla pewnych naturalnych, względnie pierwszych $p, q$, $(p,q) \neq (1,1)$.

Niech $\pi : E \to B$ będzie holomorficzną wiązką włóknistą z włóknem $D$. Używając Twierdzenia 2.1.3 nietrudno zauważyć, że funkcje przejścia muszą być postaci

$$\tau_{\alpha,\beta}(b,z,w) = \left( b, a_{\alpha,\beta}^{1/p}(b, z^p w^q) z, e^{i\theta_{\alpha,\beta}(b)} \frac{w}{a_{\alpha,\beta}^{1/q}(b, z^p w^q)} \right), \qquad (3.3.5)$$

gdzie $a_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}^*((\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times \mathbb{D})$ i $\theta_{\alpha,\beta}(b) \in \mathbb{R}$ (co więcej, można zauważyć, że $e^{i\theta_{\alpha,\beta}}$ musi być funkcją holomorficzną, więc jest lokalnie stała).

Niech $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to B$ będzie holomorficzną wiązką włóknistą z włóknem $\tilde{D} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z||w| < 1\}$, której funkcje przejścia są zdefiniowane w następujący sposób

$$\tilde{\tau}_{\alpha,\beta}(b, z, w) = \left(b, a_{\alpha,\beta}(b, zw)z, e^{iq\theta_{\alpha,\beta}(b)} \frac{w}{a_{\alpha,\beta}(b, zw)}\right). \tag{3.3.6}$$

Bezpośrednie obliczenia pozwalają stwierdzić, że

$$E \in [(b, z, w)] \mapsto [(b, z^p, w^q)] \in \tilde{E} \tag{3.3.7}$$

jest dobrze zdefiniowanym właściwym odwzorowaniem holomorficznym. Zatem, na mocy Twierdzenia 4.6.3, rozmaitość $E$ jest Steina wtedy i tylko wtedy gdy $\tilde{E}$ jest Steina. Z poprzedniego przypadku wynika, że $\tilde{E}$ jest Steina.

($c$) Teraz pokażemy, że $\mathcal{D} \times \mathcal{C} \in \mathfrak{S}$ gdy $\mathcal{D} \in \{\mathbb{D}, \mathbb{D}_*, \mathbb{A}(r)\}$, $\mathcal{C} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{C}_*\}$. Ponieważ nie ma znaczącej różnicy w dowodzie pomiędzy przypadkami $\mathcal{D}\times\mathbb{C}$ a $\mathcal{D}\times\mathbb{C}_*$, skupimy się jedynie na sytuacji, gdy $\mathcal{C}$ jest równe $\mathbb{C}$.

Niech $E$ będzie holomorficzną wiązką włóknistą z włóknem $\mathcal{D} \times \mathbb{C}$ i bazą Steina $\Omega = \bigcup_\alpha \Omega_\alpha$. Ponownie, na mocy Twierdzenia 2.1.4, funkcje przejścia wiązki $E$ muszą być postaci

$$\tau_{\alpha,\beta}(b, \lambda, z) = (b, m_{\alpha,\beta}(b, \lambda), f_{\alpha,\beta}(b, \lambda, z)),\ (b, \lambda, z) \in (\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times \mathcal{D} \times \mathbb{C}.$$

Wiadomo (zob. Twierdzenie 2.1.4), że $f_{\alpha,\beta}(x, \lambda, z) = g_{\alpha,\beta}(x, \lambda)z + h_{\alpha,\beta}(x, \lambda)$ dla $(x, \lambda, z) \in (\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ oraz $m_{\alpha,\beta}(x, \cdot) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ dla $x \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ (można nawet pokazać, że $m_{\alpha,\beta}(x, \cdot)$ nie zależy od zmiennej $x$ na składowych spójnych zbioru $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$).

Niech $\tilde{E}$ będzie holomorficzną wiązką włóknistą z bazą $\Omega$ i włóknem $\mathcal{D}$, której funkcje przejścia $\tilde{\tau}_{\alpha,\beta} \in \mathrm{Aut}((\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times \mathcal{D})$ są dane wzorami:

$$\tilde{\tau}_{\alpha,\beta}(b, \lambda) = (b, m_{\alpha,\beta}(b, \lambda)), \quad (b, \lambda) \in (\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times \mathcal{D}. \tag{3.3.8}$$

Na mocy Twierdzenia 3.2.7, $\tilde{E}$ jest Steina.

Teraz wystarczy zauważyć, że

$$E \ni [(x, (\lambda, z))] \mapsto [(x, \lambda)] \in \tilde{E}$$

jest holomorficzną wiązką włóknistą z bazą $\tilde{E}$ i włóknem równym $\mathbb{C}$. Stosując ponownie Twierdzenie 3.2.7, stwierdzamy, że $E$ jest Steina.

($d$) Aby zakończyć dowód Twierdzenia, wystarczy pokazać, że obszar postaci $D = \{(z, w) \in \mathbb{C}_* \times \mathbb{C} : |z^p||w^q| < 1\}$ należy do klasy $\mathfrak{S}$ dla $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$.

Postępujemy podobnie jak w dowodzie ($b$). Mianowicie, sprowadzimy sytuację do już rozwiązanego przypadku ($c$).

Przypuśćmy, że $\pi : E \to B$ jest holomorficzną wiązką włóknistą. Wówczas, używając argumentu z [**Edi-Zwo 1**], łatwo można sprawdzić, że funkcje przejścia muszą być postaci

$$\tau_{\alpha,\beta}(b, z, w) = (b, za^q_{\alpha,\beta}(b, z^p w^q), e^{i\theta_{\alpha,\beta}(b)} w a^{-p}_{\alpha,\beta}(b, z^p w^q)),$$
$$(b, z, w) \in (\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times D,$$

dla pewnych $a_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}^*((\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times \mathbb{D})$ oraz $\theta_{\alpha,\beta}(b) \in \mathbb{R}$. Widać, że $e^{i\theta_{\alpha,\beta}}$ są stałe na składowych spójnych $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Tak więc kładąc

$$\tilde{\tau}_{\alpha,\beta}(b, \lambda, z) = (b, e^{iq\theta_{\alpha,\beta}(b)}\lambda, za^q_{\alpha,\beta}(b, \lambda)), \quad (b, \lambda, z) \in (\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times \mathbb{D} \times \mathbb{C}_*,$$

otrzymujemy holomorficzną wiązkę włóknistą $\tilde{E}$ z bazą $\Omega$ i włóknem $\mathbb{D}\times\mathbb{C}_*$. Ponadto, odwzorowanie dane wzorem

$$E \ni [(x, z, w)] \mapsto [(x, z^p w^q, z)] \in \tilde{E} \tag{3.3.9}$$

jest właściwe.

Argument użyty w dowodzie (*b*) kończy dowód tego przypadku. $\square$

**Uwaga 3.3.3.** Zauważmy, że funkcja spełniająca kryterium Stehlé'a nie istnieje dla żadnego obszaru pojawiającego się w poprzednim twierdzeniu. Jako przykład weźmy $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. Łatwo widać, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}_*)$ odwzorowanie

$$\mathbb{D}\times\mathbb{C} \ni (\lambda, z) \mapsto (\lambda, f(\lambda)z) \in \mathbb{D}\times\mathbb{C}$$

jest automorfizmem $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. Wystarczy więc wybrać funkcję $f$ tak, by rosła odpowiednio szybko.

## 3.4. Przypadek „niewymierny”

Celem tej sekcji jest wykazanie następującego

**Twierdzenie 3.4.1.** *Niech* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. *Wówczas*

*(a)* $D_\alpha^* \notin \mathfrak{S}$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $\alpha = p \pm \sqrt{q}$ *dla pewnych* $p, q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$,

*(b)* $D_\alpha \in \mathfrak{S}$ *dla dowolnego* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,

*(c)* $D_{\alpha,r} \in \mathfrak{S}$ *dla dowolnego* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $r > 1$.

Dowód. (a) Z [**Shi 4**] (zob. również Twierdzenia 2.1.3 i 2.1.4) wynika, że automorfizmy zbioru $D_\alpha^*$ są postaci

$$(z_1, z_2) \mapsto (a z_1^{k_1} z_2^{k_2}, b z_1^{l_1} z_2^{l_2}), \tag{3.4.1}$$

gdzie $|a||b|^\alpha = 1$ i $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ są takie, że $k_1 l_2 - k_2 l_1 = \pm 1$, $\alpha = (k_2 + l_2\alpha)/(k_1 + l_1\alpha)$ oraz $k_1 + l_1\alpha > 0$.

Warunki te łatwo implikują, że jeśli $\alpha$ nie jest postaci $p \pm \sqrt{q}$ dla żadnych wymiernych $p, q$, to wówczas $k_1 = l_2 = 1$ oraz $k_2 = l_1 = 0$. Innymi słowy, dowolny automorfizm obszaru $D_\alpha^*$ jest postaci $(z_1, z_2) \mapsto (az_1, bz_2)$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a||b|^\alpha = 1$. Zatem, plurisubharmoniczna funkcja $u$ dana wzorem

$$u(z_1, z_2) = \max\left\{\frac{1}{1 - |z_1||z_2|^\alpha}, \log|z_1|, -\log|z_1|, \log|z_2|, -\log|z_2|\right\},$$

$(z_1, z_2) \in D_\alpha^*$, spełnia kryterium Stehlé'a. Stąd $D_\alpha^* \in \mathfrak{S}$.

Przypuśćmy teraz, że $\alpha = \frac{p}{n} \pm \sqrt{\frac{q}{n^2}}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Szukamy $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$, $k_1 + \alpha l_1 \geqslant 0$ takich, by (3.4.1) określało automorfizm $D_\alpha^*$. Następujące równania muszą być spełnione

$$\begin{cases} k_2 = l_1\left(\frac{q}{n^2} - \frac{p^2}{n^2}\right), \\ l_2 = k_1 + 2\frac{p}{n} l_1, \end{cases} \qquad \text{oraz} \quad |k_1 l_2 - k_2 l_1| = 1. \tag{3.4.2}$$

Rozważmy następujące równanie (nazywane często w literaturze *równaniem Pella*):

$$n^2 q = \frac{x^2 - 1}{y^2}. \tag{3.4.3}$$

Jak wiadomo (patrz Dodatek), Lagrange pokazał, że równanie (3.4.3) posiada nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych (przypomnijmy, że $q$ nie jest kwadratem liczby naturalnej). Niech $x, y$ będzie dowolnym, naturalnym rozwiązaniem tego równania. Połóżmy

$$l_1 = n^2 y, \quad k_1 = x - pny, \quad k_2 = y(q - p^2) \quad \text{oraz} \quad l_2 = x + pny. \tag{3.4.4}$$

Bezpośrednio z (3.4.3) wynika, że $x \pm ny\sqrt{q} > 0$, a stąd $k_1 + \alpha l_1 > 0$. Proste obliczenia pokazują, że każdy z warunków (3.4.2) jest spełniony przez tak dobrane liczy całkowite $k_i, l_i$, $i = 1, 2$.

Ponadto, ślad macierzy $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ jest większy od 2 więc, na mocy Twierdzenia 1 w [**Zaf**], $D \notin \mathfrak{S}$.

(b) Wiadomo (zob. [**Shi 4**] oraz Twierdzenie 2.1.4), że wszystkie automorfizmy obszaru $D_\alpha$ są elementarne. Ponadto, dowolny automorfizm obszaru $D_\alpha$ zachowuje oś $\{0\} \times \mathbb{C}_*$ (gdy $\alpha > 0$ oś $\mathbb{C} \times \{0\}$ jest także niezmiennikiem grupy automorfizmów). Wnioskujemy stąd, że automorfizmy obszaru $D_\alpha$ są postaci

$$(z_1, z_2) \mapsto (az_1, bz_2), \ (z_1, z_2) \in D_\alpha, \tag{3.4.5}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$, $|a||b|^\alpha = 1$. A zatem funkcje $u_+, u_-$ dane wzorami

$$\begin{aligned} u_+(z_1, z_2) &= \max\left\{\frac{1}{1 - |z_1||z_2|^\alpha}, \log|z_1|, \log|z_2|\right\}, \quad \text{gdy } \alpha > 0, \\ \text{oraz } u_-(z_1, z_2) &= \max\left\{u_+(z_1, z_2), -\log|z_2|\right\}, \quad \text{gdy } \alpha < 0, \end{aligned}$$

spełniają kryterium Stehlé'a.

(c) Podobnie jak wcześniej, z Twierdzenia 2.1.4 wynika, że grupa automorfizmów obszaru $D_{\alpha,r}$ składa się z odwzorowań następującej postaci:

$$(z_1, z_2) \mapsto (az_1^\epsilon, bz_2^\epsilon), \ (z_1, z_2) \in D_{\alpha,r}, \tag{3.4.6}$$

gdzie $\epsilon = \pm 1$ i $a, b \in \mathbb{C}$, $|a||b|^\alpha = 1$. Tak więc funkcja

$$u(z_1, z_2) = \max\left\{\frac{|z_1||z_2|^\alpha}{r|z_1||z_2|^\alpha - 1}, \frac{1}{r - |z_1||z_2|^\alpha}, \log^2|z_1|, \log^2|z_2|\right\},$$

$(z_1, z_2) \in D_\alpha$, spełnia kryterium Stehlé'a. □

## 3.5. Przypadek, gdy $D \cap \mathbb{C}_*^2$ jest hiperboliczny

Zauważmy najpierw, że dla niehiperbolicznego pseudowypukłego obszaru Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ takiego, że $D^{hyp}$ jest hiperboliczny, liczba $t(D^{hyp})$ jest równa albo 1 albo 0 (zob. Definicje 2.2.2 i 2.3.8).

Na początku skupimy naszą uwagę na przypadku $t(D^{hyp}) = 1$. Zaczynamy od następującego

**Lemat 3.5.1.** *Niech $D$ będzie niehiperbolicznym, pseudowypukłym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Załóżmy, że obraz logarytmiczny $D$ nie zawiera prostych afinicznych oraz, że grupa automorfizmów obszaru $D^{hyp}$ jest zwarta. Wówczas* $\mathrm{Aut}(D)$ *jest również zwarta.*

Dowód. Weźmy ciąg $(\varphi_n)_n \subset \operatorname{Aut}(D)$. Ponieważ dla dowolnego odwzorowania $\varphi \in \operatorname{Aut}(D)$ restrykcja $\varphi|_{D^{hyp}}$ jest automorfizmem $D^{hyp}$ (zob. Twierdzenie 2.3.9), możemy założyć, że $(\varphi_n|_{D^{hyp}})_n$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie w $D^{hyp}$. Stosując wzór Cauchyego widzimy, że ciąg $(\varphi_n)_n$ jest zbieżny do pewnej funkcji holomorficznej ma $D$. Zastosowanie powyższego argumentu do ciągu $(\varphi_n^{-1})_n$ natychmiast kończy dowód. □

Wyniki uzyskane w [**Shi 1**] i [**Kru**] w połączeniu z uwagami z [**Pfl-Zwo**] dostarczają opisu pseudowypukłych hiperbolicznych obszarów Reinhardta $D$, dla których $t(D^{hyp}) = 1$, i takich, że ich grupa automorfizmów nie jest zwarta. Najwygodniej będzie nam przypomnieć wersję sformułowaną w [**Pfl-Zwo**].

**Twierdzenie 3.5.2** (zob. [**Kru**],[**Shi 1**], oraz [**Pfl-Zwo**], Theorem 4)**.** *Niech $D$ będzie hiperbolicznym, pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że $t(D) = 1$. Wówczas grupa $\operatorname{Aut}(D)$ jest niezwarta wtedy i tylko wtedy gdy $D$ jest algebraicznie równoważny jednemu z następujących obszarów:*

*(a)* $\mathbb{D} \times \mathbb{A}(r, 1)$, *gdzie* $0 \leqslant r < 1$.
*W tym przypadku grupa automorfizmów składa się z odwzorowań postaci*
$$D \ni (z_1, z_2) \mapsto (a(z_1), b(z_2)) \in D,$$
*gdzie* $a \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ *oraz* $b \in \operatorname{Aut}(\mathbb{A}(r, 1))$.

*(b)* $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| < 1, \ 0 < |z_2| < (1 - |z_1|^2)^{p/2}\}$, *gdzie* $p > 0$.
*W tym przypadku grupa automorfizmów składa się z odwzorowań postaci*
$$D \ni (z_1, z_2) \mapsto \left(\alpha \frac{z_1 - \beta}{1 - \overline{\beta} z_1}, \gamma \frac{(1 - |\beta|^2)^{\frac{p}{2}}}{(1 - \overline{\beta} z_1)^p} z_2\right) \in D,$$
*gdzie* $|\alpha| = |\gamma| = 1, \ \beta \in \mathbb{C}$.

*(c)* $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ 0 < |z_2| < \exp(-|z_1|^2)\}$.
*W tym przypadku grupa automorfizmów składa się z odwzorowań postaci*
$$D \ni (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1 + \beta, \gamma \exp(-2\alpha\overline{\beta} z_1 - |\beta|^2) z_2) \in D,$$
*gdzie* $|\alpha| = |\gamma| = 1, \ \beta \in \mathbb{C}$.

**Twierdzenie 3.5.3.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie pseudowypukłym, niehiperbolicznym obszarem Reinhardta z $t(D^{hyp}) = 1$. Przypuśćmy dodatkowo, że obraz logarytmiczny obszary $D^{hyp}$ nie zawiera prostych afinicznych. Wówczas grupa automorfizmów obszaru $D$ jest zwarta. W szczególności, $D \in \mathfrak{S}$.*

Dowód. Ze względu na Lemat 3.5.1 wystarczy wykazać twierdzenie przy dodatkowym założeniu, że grupa $\operatorname{Aut}(D^{hyp})$ nie jest zwarta. Wówczas, na mocy Twierdzenia 3.5.2, z dokładnością do permutacji współrzędnych i mnożenia ich przez stałe, obszar $D$ musi być jednej z następujących postaci:

(a) $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1 z_2^k| < 1, \ |z_2| < 1\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,
(b) $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1 z_2^k| < 1, \ |z_2| < (1 - |z_1 z_2^k|^2)^{p/2}\}$, dla pewnych $p > 0, \ k \in \mathbb{Z}_{>0}$,
(c) $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_2| < \exp(-|z_1 z_2^k|^2))\}, \ k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ponadto, na mocy Twierdzenia 2.3.9, dowolny automorfizm jakiegokolwiek wymienionego wyżej obszaru zachowuje oś $\mathbb{C} \times \{0\}$. Fakt ten, razem z Twierdzeniem 3.5.2

implikują, że we wszystkich przypadkach (a), (b) i (c) grupa automorfizmów obszaru $D$ składa się z odwzorowań postaci

$$D \ni (z_1, z_2) \mapsto (az_1, bz_2) \in D,$$

gdzie $|a| = |b| = 1$. A zatem, $\mathrm{Aut}(D)$ jest we wszystkich przypadkach zwarta; sprzeczność. □

Przejdźmy teraz do pozostałego przypadku $t(D) = 0$, czyli do przypadku, gdy $D^{hyp} \subset \mathbb{C}_*^2$. Kluczowa rolę w naszym podejściu gra nietrywialny wynik Shimizu:

**Twierdzenie 3.5.4** (zob. [**Shi 1**]). $\mathrm{Aut}(D) = \mathrm{Aut}_{alg}(D)$ *dla dowolnego pseudowypukłego, hiperbolicznego obszaru Reinhardta* $D \subset \mathbb{C}_*^n$.

**Twierdzenie 3.5.5.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie niehiperbolicznym pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że $D^{hyp}$ jest hiperboliczny oraz $t(D^{hyp}) = 0$. Wówczas $D \in \mathfrak{G}$.*

*Co więcej, grupa automorfizmów $D$ jest niezwarta jeśli, z dokładnością do permutacji współrzędnych, $D$ jest zawarty w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$, $\{0\} \times \mathbb{C}_* \subset D$ oraz*

$$\log D = \{(t, s) : \ t < \psi(s), \ s \in \mathbb{R}\}, \tag{3.5.1}$$

*gdzie $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wklęsłą funkcją spełniającą własność $\psi(\beta + s) - \psi(s) = \alpha + ks$, $s \in \mathbb{R}$, przy pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_*$.*

Dowód. Używając inkluzji $\mathrm{Aut}(D)_{|D^{hyp}} \subset \mathrm{Aut}(D^{hyp})$ (zob. Twierdzenie 2.3.9) oraz Twierdzenia 3.5.4 widzimy, że dowolny automorfizm obszaru $D$ musi być algebraiczny. Ponadto, co najmniej jedna oś $\{0\} \times \mathbb{C}_*$, $\mathbb{C}_* \times \{0\}$ musi być zawarta w $D$ (bo w przeciwnym wypadku $D$ byłby hiperboliczny).

Rozważmy najpierw przypadek, gdy obie osie są zawarte w $D$. Z Lematów 2.3.3 i 2.3.5 wynika, że dowolny automorfizm obszaru $D$ zachowuje osie. Łatwo więc widzimy, że grupa $\mathrm{Aut}(D)$ składa się z odwzorowań postaci

$$D \ni (z_1, z_2) \mapsto (az_1, bz_2) \in D \quad \text{bądź} \tag{3.5.2}$$

$$D \ni (z_1, z_2) \mapsto (az_2, bz_1) \in D. \tag{3.5.3}$$

dla odpowiednich $a, b \in \mathbb{C}_*$. Pokażemy, że $|a| = |b| = 1$ w przypadku (3.5.2). Ponadto pokażemy, że istnieje $R > 0$ takie, że dla dowolnego automorfizmu spełniającego (3.5.3) zachodzi $|a| = R$ i $|b| = 1/R$. To będzie w szczególności oznaczać, że grupa $\mathrm{Aut}(D)$ jest zwarta.

Weźmy więc dowolny automorfizm $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$ postaci (3.5.2). Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $(\log|a|, \log|b|) \neq (0, 0)$. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy $\varphi^{(n)} = \varphi \circ \ldots \circ \varphi \in \mathrm{Aut}(D)$ i $\varphi^{(-n)} = (\varphi^{-1})^{(n)}$. Ponieważ $\varphi^{(n)}(z_1, z_2) = (a^n z_1, b^n z_2) \in D$ dla wszystkich $(z_1, z_2) \in D$, to przechodząc do obrazu logarytmicznego obszaru $D$ widzimy, że

$$\mathbb{R}(\log|a|, \log|b|) + \log D \subset \log D.$$

A to jest sprzeczne z hiperbolicznością $D^{hyp}$.

Załóżmy teraz, że $\varphi : (z_1, z_2) \mapsto (az_2, bz_1)$ jest automorfizmem obszaru $D$. Powtarzając powyższe rozumowanie do automorfizmu $\varphi^{(2)}(z_1, z_2) = (abz_1, abz_2)$ natychmiast stwierdzamy, że $|ab| = 1$. A zatem wystarczy pokazać, że dla dowolnego innego automorfizmu $\tilde{\varphi} : (z_1, z_2) \mapsto (a_1 z_2, b_1 z_1)$ obszaru $D$ zachodzą relacje: $|a_1| = |a|$

i $|b_1|=|b|$. To jednakże, wynika również z powyższego rozumowania zastosowanego do $\tilde{\varphi}\circ\varphi(z_1,z_2)=(a_1bz_1,ab_1z_2)$.

To kończy dowód zwartości $\mathrm{Aut}(D)$ w tym przypadku.

Rozpatrzmy sytuację, gdy tylko jedna oś jest zawarta w $D$, na przykład $\{0\}\times\mathbb{C}_*\subset D$. Skorzystamy tutaj z idei użytej przez P. Pfluga i W. Zwonka w [**Pfl-Zwo**].

Załóżmy, że grupa $\mathrm{Aut}(D)$ nie jest zwarta. Zauważmy, że $D\cap(\mathbb{C}\times\{0\})=\emptyset$. Podobnie jak wcześniej, używając Lematów 2.3.3 i 2.3.5 widzimy, że $\mathrm{Aut}(D)$ składa się z odwzorowań postaci

$$\Phi=\Phi_{a,b,k,\epsilon}:(z_1,z_2)\mapsto(az_1z_2^k,bz_2^\epsilon) \tag{3.5.4}$$

dla pewnych $a,b\in\mathbb{C}_*$, $\epsilon=\pm1$ i $k\in\mathbb{Z}$.

(†) Pokażemy, że istnieje automorfizm $\Phi_{a,b,k,\epsilon}$ obszaru $D$ taki, że $|b|\neq1$ oraz $\epsilon=1$ (wtedy także $k\neq0$).

Zauważmy najpierw, że musi istnieć automorfizm $D$ postaci (3.5.4), dla którego $k\neq0$. Rzeczywiście, przypuśćmy, że takiego automorfizmu nie ma. Powtarzając rozumowanie z pierwszej części dowodu widzimy, że $|a|=|b|=1$ dla wszystkich automorfizmów $\Phi_{a,b,0,1}$. Gdy $\epsilon=-1$ to istniałoby $R>0$ takie, że $|a|=R$ oraz $|b|=\frac{1}{R}$ dla wszystkich automorfizmów $\Phi_{a,b,0,-1}$. A to byłoby sprzeczne z faktem, że grupa $\mathrm{Aut}(D)$ nie jest zwarta.

Jeśli istnieje automorfizm $\Phi$ postaci (3.5.4) taki, że $\epsilon=1$ i $k\neq0$, to zachodzi (†). Rzeczywiście, liczymy

$$\Phi^{(n)}(z_1,z_2)=(a^nb^{kn(n-1)/2}z_1z_2^{nk},b^nz_2).$$

Używając ponownie argumentu z hiperbolicznością $D^{hyp}$ stwierdzamy, że faktycznie $|b|\neq1$.

Pozostał więc jeszcze do rozpatrzenia sytuacja, w której dowolny dowolny automorfizm postaci (3.5.4) z $k\neq0$ spełnia $\epsilon=-1$. Skoro

$$\Phi^{(2n)}_{a,b,k,-1}(z_1,z_2)=((a^2b^k)^nz_1,z_2),\ n\in\mathbb{Z},$$

widzimy, że $|a^2b^k|=1$. Ale grupa automorfizmów $D$ nie jest zwarta. Tak więc istnieje automorfizm $\Phi_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{k},-1}$ dla którego $|\tilde{b}|\neq|b|$ lub $k\neq\tilde{k}$. Jeśli $|\tilde{b}|\neq|b|$, to

$$\Phi_{a,b,k,-1}\circ\Phi_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{k},-1}=\Phi_{a\tilde{a}\tilde{b}^k,\frac{b}{\tilde{b}},\tilde{k}-k,1},$$

a to dowodzi (†). Natomiast w przeciwnym wypadku $k\neq\tilde{k}$ oraz $\Phi_{1,1,\tilde{k}-k,1}$ jest automorfizmem obszaru $D$, co jest niemożliwe.

A zatem wykazaliśmy (†).

Geometryczne własności pseudowypukłych obszarów Reinhardta łatwo pozwalają zauważyć, że dla $s\in\mathbb{R}$ istnieje (dokładnie jedna) liczba $\psi(s)\in\mathbb{R}$ taka, że $(\psi(s),s)\in\partial\log D$. Ponadto, konsekwencją inkluzji $\{0\}\times\mathbb{C}_*\subset D$ i wypukłości $\log D$ jest wklęsłość funkcji $\psi(\cdot)$. Połóżmy

$$v(z_1,z_2):=\log|z_1|-\psi(\log|z_2|).$$

Dla ustalonego $(z_1,z_2)\in D\cap\mathbb{C}_*^2$ kładziemy $(t,s)=(\log|z_1|,\log|z_2|)$. Niech $\Phi=\Phi_{a',b',k',\epsilon}$ będzie dowolnym automorfizmem danym wzorem (3.5.4). Oznaczmy $(t',s')=(\log|\Phi_1(z)|,\log|\Phi_2(z)|)$. Zauważmy, że $(t',s')=(\log|a'|+t+k's,\log|b'|+\epsilon s)$.

Ponieważ $\Phi((\partial D)\cap\mathbb{C}_*^2)) = (\partial\Phi(D))\cap\mathbb{C}_*^2$, stwierdzamy, że

$$(\psi(s'), s') = (\log|a'| + \psi(s) + k's, \log|b'| + \epsilon s). \tag{3.5.5}$$

A zatem $\psi(s') - t' = \psi(s) - t$. Innymi słowy

$$v\circ\Phi = v \quad \text{dla wszystkich} \quad \Phi\in\operatorname{Aut}(D). \tag{3.5.6}$$

Zdefiniujmy

$$u(z_1,z_2) := \max\left\{\log|z_2|, -\log|z_2|, -(v(z_1,z_2))^{-1}\right\}, \quad (z_1,z_2)\in D.$$

Standardowy argument (aproksymacja i wyliczenie formy Leviego) pokazuje, że $u$ jest plurisubharmoniczna. Ponadto, $u$ jest funkcją wyczerpującą na $D$. Za względu na (3.5.6) $u$ spełnia kryterium Stehlé'a.

Zauważmy, że własność (3.5.5) w połączeniu z (†) implikują

$$\psi(\log|b| + s) - \psi(s) = \log|a| + ks.$$

Stąd wynikają żądane własności funkcji $\psi$.

Odwrotnie, mając obszar $D\subset\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*$ spełniający (3.5.1) łatwo zauważyć, że odwzorowanie $\Phi$ zdefiniowane wzorem (3.5.4) z $b = e^\beta$, $a = e^\alpha$ i $\epsilon = 1$ jest automorfizmem $D$. Wypisanie wzorów na $\Phi^{(n)}$ natychmiast dowodzi, że grupa $\operatorname{Aut}(D)$ nie jest zwarta. □

Dowód Twierdzenia 3.2.2. Jeśli $\log D$ zawiera prostą afiniczną, to oczywiście grupa $\operatorname{Aut}(D)$ nie jest zwarta. W przypadku, gdy $D^{hyp}$ jest hiperboliczny, teza wynika z Twierdzeń 3.5.3 oraz 3.5.5. □

## 3.6. $\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*$

W 1977 H. Skoda jako pierwszy odpowiedział negatywnie na problem Serre'a. Pokazał mianowicie, że $\mathbb{C}^2\notin\mathfrak{S}$. Jego konstrukcja została później ulepszona przez J.P. Demaillego w [**Dem 1**] - autor, jako funkcje przejścia wziął lokalnie stałe automorfizmy wielomianowe $\mathbb{C}^2$. Następnie, w [**Dem 2**] J.P. Demailly skonstruował kontrprzykład do problemu Serre'a, w którym bazą był dysk lub płaszczyzna.

Przypomnimy tu tę konstrukcję i wskażemy jak zmodyfikować ją, aby mogła służyć także dla $\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*$. Bazą $\Omega$ jest dowolny obszar zawierający $3\mathbb{D}$. Kładziemy $\Omega_0 = \Omega\setminus\{-1,1\}$, $\Omega_1 = \Omega_0\cup\{1\}$, $\Omega_2 = \Omega_0\cup\{-1\}$. Funkcje przejścia $\tau_{i,j}:\Omega_i\times\mathbb{C}^2\to\Omega_j\times\mathbb{C}^2$, $i\neq j$ holomorficznej wiązki włóknistej $E$ są zdefiniowane następująco:

$$\tau_{0,1}(x;z_1,z_2) = (x;z_1,z_2\exp(z_1u(x))),$$
$$\tau_{0,2}(x;z_1,z_2) = (x,z_1\exp(z_2u(x)),z_2)$$

oraz $\tau_{1,2} = \tau_{0,1}^{-1}\circ\tau_{0,2}$, gdzie $u(x) = \exp(\frac{1}{x^2-1})$. Oczywiście, dowolna plurisubharmoniczna funkcja $V$ na $E$ indukuje funkcję plurisubharmoniczną $V_j$ taką, że $V_j = V_k\circ\tau_{k,j}$. Idea dowodu polega na porównywaniu wartości maksymalnych funkcji $V_j$ na polidyskach $\frac12\mathbb{D}\times(r\mathbb{D})^2$, $r >> 1$. Dokładniej, Demailly pokazał, że

$$M(V_0,\frac12\mathbb{D},\exp(r/32)) \leqslant M(V_0,\frac12\mathbb{D},\exp(\log^3 r)) + C, \quad r >> 1, \tag{3.6.1}$$

gdzie $M(V, \omega, r) = \max_{\omega \times (r\mathbb{D})^2} V$ a stała $C$ nie zależy od $r$. Kluczową rolę grała logarytmiczna wypukłość funkcji

$$(\rho, r) \mapsto M(V, \rho\mathbb{D}, r), \quad V \in \mathcal{PSH}(\Omega \times \mathbb{C}^2).$$

Bezpośrednie obliczenia pozwalają uzyskać logarytmiczną wypukłość funkcji

$$(\rho, r) \mapsto \max_{\rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D} \times \mathbb{A}(r)} \tilde{V}$$

dla dowolnej $\tilde{V} \in \mathcal{PSH}(\Omega \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}_*)$. Tak więc, rozważając $\tilde{M}$ zamiast $M$, gdzie $\tilde{M}(V, \omega, r) = \max_{\omega \times r\mathbb{D} \times \mathbb{A}(r)} V$ i powtarzając rozumowanie z pracy Demaillego, możemy zastąpić $M$ przez $\tilde{M}$ w nierówności (3.6.1). To jednakże, w połączeniu ze wspomnianą logarytmiczną wypukłością $\tilde{M}$ dowodzi, że $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_*$ nie leży w klasie $\mathfrak{S}$.

ROZDZIAŁ 4

# Dodatek

## 4.1. Obszary kołowe i quasi-kołowe

Przypomnijmy definicję i podstawowe własności obszarów *quasi-kołowych*. Niech $m_1, \ldots, m_n$ będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Mówimy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest $(m_1, \ldots, m_n)$-kołowy (lub krótko *quasi-kołowy*) jeśli

$$(\lambda^{m_1} x_1, \ldots, \lambda^{m_n} x_n) \in D \quad \text{dla dowolnych} \quad \lambda \in \partial\mathbb{D},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in D. \tag{4.1.1}$$

Jeśli powyższy wzór (4.1.1) zachodzi dla wszystkich $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, to wówczas obszar $D$ nazywamy $(m_1, \ldots, m_n)$-zbalansowanym (krótko *quasi-zbalansowanym* lub *zupełnym quasi-kołowym*).

**Uwaga 4.1.1.** Zgodnie z powyższą definicją, obszar kołowy (zbalansowany) to obszar $(1, \ldots, 1)-$kołowy (zbalansowany).

Dla $m = (m_1, \ldots, m_n)$-zbalansowanego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ definiujemy jego *$m$-funkcjonał Minkowskiego* następującym wzorem

$$\mu_{D,m}(x) := \inf\{\lambda > 0 :\ (\lambda^{-m_1} x_1, \ldots, \lambda^{-m_n} x_n) \in D\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^n. \tag{4.1.2}$$

Funkcja ta posiada podobne własności jak standardowy funkcjonał Minkowskiego obszarów zbalansowanych. Część z nich można znaleźć w [**Nik**]. Wymieńmy te najważniejsze:

$$\mu_{D,m}(\alpha^{m_1} x_1, \ldots, \alpha^{m_n} x_n) = |\alpha| \mu_D(x), \quad x \in \mathbb{C}^n,\ \alpha \in \mathbb{C}, \tag{4.1.3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{C}^n :\ \mu_{D,m}(x) < 1\}, \tag{4.1.4}$$

$$D \text{ jest pseudowypukły} \Leftrightarrow \log \mu_{D,m} \in \mathcal{PSH}(D). \tag{4.1.5}$$

**Przykład 4.1.2.** Połóżmy

$$\Phi_j : \mathbb{C}^n \ni (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant n} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_j} \in \mathbb{C} \tag{4.1.6}$$

$$\text{oraz} \quad \Phi := (\Phi_1, \ldots, \Phi_n). \tag{4.1.7}$$

Definiujemy $\mathbb{G}_n := \Phi(\mathbb{D}^n)$. Obszar $\mathbb{G}_n$ nazywamy zsymetryzowanym polidyskiem. Nietrudno zauważyć, że to zbiór $(1, 2, \ldots, n)$ zbalansowany, który nie jest kołowy.

## 4.2. Obszary Reinhardta

Powiemy, ze obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *Reinhardta* jeśli

$$(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) \in D \quad \text{dla dowolnych} \tag{4.2.1}$$
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \partial\mathbb{D} \text{ i } x = (x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

Ponadto, jeśli (4.2.1) zachodzi dla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \overline{\mathbb{D}}$, to $D$ nazywamy *zupełnym obszarem Reinhardta.*

**Uwaga 4.2.1.** Nietrudno zauważyć, że $D$ jest obszarem Reinhardta wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ obszar $D$ jest $m$-kołowy.

Dla $z \in \mathbb{C}^n_*$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ połóżmy $\log|z| := (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|)$ oraz $\exp(x) := (\exp(x_1), \dots, \exp(x_n))$. Dla obszaru Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$ definiujemy jego obraz logarytmiczny

$$\log D := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exp(x) \in D\}. \tag{4.2.2}$$

Wprost z definicji wynika, że

$$D \cap \mathbb{C}^n_* = \exp(\log D),$$

gdzie $\exp(X) = \{z : \ \log|z| \in X\}$, dla $X \subset \mathbb{R}^n$. A zatem, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między obszarami Reinhardta w $\mathbb{C}^n_*$ a obszarami $\mathbb{R}^n$ :

$$\{\text{obszary Reinhardta w } \mathbb{C}^n_*\} \ni D \mapsto \log D \in \{\text{obszary w } \mathbb{R}^n\}.$$

Obszary Reinhardta mają strukturę pozwalającą na łatwą geometryczną interpretację (zob. [**Jar-Pfl 5**]). I tak na przykład, mamy następującą charakteryzację pseudowypukłych obszarów Reinhardta:

**Propozycja 4.2.2.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem Reinhardta. Wtedy następujące warunki są równoważne*

*(i) $D$ jest pseudowypukły*

*(ii) $\log D$ jest obszarem wypukłym i*

$$\forall_{j=1,\dots,n} : \ D \cap (\mathbb{C}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-j}) \neq \emptyset \Rightarrow \widetilde{D}^{(j)} \subset D,$$

*gdzie* $\widetilde{D}^{(j)} = \{\lambda \cdot z : \ \lambda \in \{1\}^{j-1} \times \overline{\mathbb{D}} \times \{1\}^{n-j}, \ z \in D\}.$

## 4.3. Różne koncepcje hiperboliczności; hiperboliczność w obszarach Reinhardta

**Definicja 4.3.1.** *Powiemy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest $d$-hiperboliczny (gdzie $d$ jest pseudoodległością Carathéodory'ego, funkcją Lemperta bądź pseudoodległością Kobayashiego) jeśli $d(z, w) > 0$, o ile $z \neq w$.*

**Definicja 4.3.2.** *Powiemy, że obszar $D$ jest hiperboliczny w sensie Brody'ego, jeśli dowolna funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \to D$ jest stała.*

Zauważmy, że dowolny obszar ograniczony jest hiperboliczny w każdym sensie zdefiniowanym powyżej. Ponadto, mamy następujący ciąg implikacji:

$$c - \text{hyperboliczność} \Rightarrow k-\text{hyperboliczność} \Rightarrow \tilde{k} - \text{hyperboliczność}$$
$$\Rightarrow \text{hyperboliczność w sensie Brody'ego}.$$

Wprowadzone pojęcia hiperboliczności okazują się być równoważne w klasie pseudowypukłych obszarów Reinhardta (zob. [**Zwo 1**]). By sformułować to stwierdzenie precyzyjniej, będziemy potrzebować kilku pomocniczych oznaczeń.

Dla $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ i $z \in \mathbb{C}_*^n$, kładziemy

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n},$$

Dla macierzy $A = (A_k^j)_{j=1,\dots,m,\ k=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ i $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{C}_*^m$ definiujemy:

$$\Phi_A(z) := z^A := (z^{A^1}, \dots, z^{A^m}), \quad z \in \mathbb{C}_*^n, \tag{4.3.1}$$

$$\Phi_{A,b}(z) := (b_1 z^{A^1}, \dots, b_m z^{A^m}), \quad z \in \mathbb{C}_*^n. \tag{4.3.2}$$

Odwzorowania tej postaci będziemy nazywać *elementarnymi algebraicznymi* (bądź krótko odwzorowaniami *elementarnymi*).

Możemy teraz przypomnieć klasyfikację pseudowypukłych hiperbolicznych obszarów Reinhardta (zob. [**Zwo 1**]):

**Twierdzenie 4.3.3.** *Niech $D$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n$. Następujące warunki są równoważne:*

*(i) $D$ jest hiperboliczny w sensie Brody'ego (Kobayashiego, Carathéodory'ego);*

*(ii) (a) $\log D$ nie zawiera prostych afinicznych oraz*
*(b) $D \cap V_j$ jest albo pusty albo hiperboliczny (rozpatrywany jako obszar w $\mathbb{C}^{n-1}$);*

*(iii) $D$ jest algebraicznie równoważny z ograniczonym obszarem Reinhardta, tzn. istnieje $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$, $|\det A| = 1$ taka, że $\Phi_A(D)$ jest zbiorem ograniczonym oraz $(\Phi_A)|_D$ jest biholomorfizmem na obraz.*

## 4.4. Brzegi Szyłowa i Bergmana

Pojęcie brzegu Bergmana-Szyłowa zawdzięczamy zarówno S. Bergmanowi jak i G.E. Shilovowi. W 1931 roku S. Bergman, badając funkcje holomorficzne dwóch zmiennych wprowadził pojęcie *brzegu wyróżnionego* (zob. [**Ber**]). Zauważył wówczas, że dla dość dużej klasy obszarów, dowolna funkcja holomorficzna wielu zmiennych jest zdeterminowana przez swojej wartości na względnie małym, domkniętym podzbiorze topologicznego brzegu obszaru. Fakt ten nie ma oczywiście miejsca w przypadku funkcji holomorficznych jednej zmiennej.

Nieco później, w latach 40-tych dwudziestego wieku, G.E. Shilov, badając przemienne algebry Banacha, wprowadził pojęcie brzegu minimalnego, nazywanego dzisiaj brzegiem Szyłowa (zob. [**Ge-Ra-Shi**]).

**Definicja 4.4.1.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie otwartym zbiorem ograniczonym.*

- *Najmniejszy podzbiór domknięty $A \subset \overline{D}$ o tej własności, że*

$$\forall f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})\ \exists a \in A : \ |f(a)| = \max\{|f(z)| : \ z \in \overline{D}\}$$

*nazywamy* brzegiem Szyłowa *obszaru $D$ i oznaczamy przez $\partial_s D$.*

- *Najmniejszy podzbiór domknięty $B \subset \overline{D}$ taki, że*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) : \ \overline{D} \subset \Omega\ \exists b \in B : \ |f(b)| = \max\{|f(z)| : \ z \in \overline{D}\}$$

*nazywamy* brzegiem Bergmana *obszaru $D$ i oznaczamy przez $\partial_b D$.*

Pokazuje się, używając na przykład Lematu Kuratowskiego-Zorna, że brzegi Szyłowa i Bergmana ograniczonego zbioru otwartego istnieją i są dobrze zdefiniowane.

**Propozycja 4.4.2.** *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie otwarty i ograniczony. Wówczas $\partial_b D \subset \partial_s D \subset \partial D$.*

**Przykład 4.4.3.** Zauważmy, że:

(1) $\partial_s \mathbb{D}^n = \partial_b \mathbb{D}^n = (\partial \mathbb{D})^n$;
(2) $\partial_s \mathbb{B}_n = \partial_b \mathbb{B}_n = \partial \mathbb{B}_n$;
(3) dla obszaru $D := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ 0 < |z_1| < 1, \ |z_2| < |z_1|^{-\log|z_1|}\}$ zachodzi:

$$(\partial \mathbb{D})^2 = \partial_b D \subsetneq \partial_s D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| \leqslant 1, \ |z_2| = |z_1|^{-\log|z_1|}\}.$$

Po bardziej szczegółowe informacje dotyczące brzegów Szyłowa i Bergmana odsyłamy Czytelnika do [**Fuks**].

## 4.5. Odwzorowania holomorficzne właściwe

**Definicja 4.5.1.** *Niech $X, Y$ będą przestrzeniami topologicznymi. Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem* właściwym *jeśli przeciwobraz dowolnego zwartego podzbioru $Y$ jest zwartym podzbiorem $X$.*

Przypominamy tutaj najważniejsze własności odwzorowań holomorficznych właściwych. Po bardziej szczegółowe informacje odsyłamy czytelnika do książek [**Nar 2**], [**Rud 2**] oraz [**Kli**].

**Twierdzenie 4.5.2** (zob. [**Kli**])**.** *Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem z lokalnie zwartej przestrzeni $X$ w przestrzeń Hausdorffa $Y$. Jeśli $E$ jest podzbiorem $Y$ takim, że $f^{-1}(E)$ jest zwarty, to istnieje relatywnie zwarte otwarte otoczenie $U$ zbioru $f^{-1}(E)$ oraz istnieje otwarty zbiór $V$ w $Y$ takie, że $f(U) \subset V$ oraz $f : U \to V$ jest odwzorowaniem właściwym.*

**Twierdzenie 4.5.3** ([**Rud 2**])**.** *Niech $f : D \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym pomiędzy obszarami $D, G$ w $\mathbb{C}^n$. Wówczas $f$ jest surjektywne i otwarte.*

Oczywiście powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe bez założenia holomorficzności. Przykładowo, $\mathbb{C} \ni z \mapsto |z| \in \mathbb{C}$ jest ciągłym, niesurjektywnym odwzorowaniem właściwym.

**Twierdzenie 4.5.4** ([**Rud 2**])**.** *Niech $D, G$ będą obszarami w $\mathbb{C}^n$. Niech $f : D \to G$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym. Wówczas*

*(1) $f$ jest odwzorowaniem niezdegenerowanym, tzn. $\det[f'] \not\equiv 0$;*
*(2) dla dowolnego właściwego zbioru analitycznego $A$ w $D$ jego obraz $f(A)$ jest właściwym zbiorem analitycznym w $G$.*

*W szczególności, $f(\mathcal{V}_f)$ jest właściwym analitycznym podzbiorem $G$, gdzie $\mathcal{V}_f = \{x \in D : \ \det[f'(x)] = 0\}$.*

Zachowując oznaczenia z powyższego twierdzenia wprowadzamy następującą notację:

**Definicja 4.5.5.** *Punkt $w \in G$ nazywamy wartością* regularną *odwzorowania $f$ jeśli $w \notin f(\mathcal{V}_f)$. W przeciwnym wypadku mówimy, że $w$ jest wartością* krytyczną *$f$.*

Jedną z najważniejszych własności odwzorowań holomorficznych właściwych jest ich skończona krotność. Opisuje to poniższe

**Twierdzenie 4.5.6.** *Niech $f$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym pomiędzy obszarami $D$ i $G$ w $\mathbb{C}^n$. Wówczas istnieje liczba naturalna $k$ taka, że*

$$\#f^{-1}(w) = k \quad \text{gdy } w \text{ jest wartością regularną}$$

*oraz*

$$\#f^{-1}(w) < k, \quad \text{gdy } w \text{ jest wartością krytyczną odwzorowania } f.$$

*Liczbę $k$ nazywamy* krotnością *odwzorowania $f$.*

Z Twierdzenia 4.5.2 łatwo wynika, że skończona krotność jest cechą charakterystyczną jedynie dla odwzorowań lokalnie właściwych. Mówiąc precyzyjniej:

**Twierdzenie 4.5.7** ([**Rud 2**]). *Załóżmy, że $\Omega$ jest obszarem w $\mathbb{C}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ odwzorowaniem holomorficznym oraz $f^{-1}(w)$ jest zbiorem zwartym dla każdego $w \in \mathbb{C}^n$. Ustalmy $p \in \Omega$. Wówczas każde otoczenie punktu $p$ zawiera spójne otoczenie $D$ punktu $p$ takie, że restrykcja $f$ do $D$ jest odwzorowaniem właściwym z obszaru $D$ na obszar $f(D)$.*

**Uwaga 4.5.8.** Zauważmy, że odwzorowanie holomorficzne właściwe pomiędzy obszarami w $\mathbb{C}^n$ jest krotności 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono biholomorfizmem.

Przypuśćmy, że $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem holomorficznym pomiędzy obszarami Riemanna $X, Y$. Jak wiadomo (zob. np. [**Jar-Pfl 3**]) $f$ rozszerza się do odwzorowania holomorficznego $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ pomiędzy obwiedniami holomorficzności obszarów $X$ i $Y$. W sytuacji, gdy $f$ jest odwzorowaniem biholomorficznym, rozszerzając $f^{-1}$ do odwzorowania holomorficznego $\widehat{Y} \to \widehat{X}$ natychmiast stwierdzamy, że $\widehat{f}$ jest także biholomorficzne.

Nasuwa się tu naturalne pytanie, czy właściwość $f$ implikuje właściwość $\widehat{f}$. Pozytywną odpowiedź daje następujące

**Twierdzenie 4.5.9** ([**Ker**]). *Niech $X$, $Y$ będą obszarami Riemanna nad $\mathbb{C}^n$ oraz $f \in \operatorname{Prop}(X, Y)$. Niech $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ będzie rozszerzeniem odwzorowania $f$.*

*Wówczas $\widehat{f} \in \operatorname{Prop}(\widehat{X}, \widehat{Y})$.*

Powyższe twierdzenie zostało sformułowanie i udowodnione przez H. Kernera w roku 1960 (zob. [**Ker**]). Jednakże w literaturze bardzo często spotykana i cytowana jest jego szczególna wersja, udowodniona 35 lat później przez F. Berteloota i S. Pinchuka, dotycząca sytuacji gdy $X$ i $Y$ są obszarami w $\mathbb{C}^n$, których obwiednie holomorficzności również są obszarami w $\mathbb{C}^n$. Dlatego też podamy tu szkic dowodu Twierdzenia 4.5.9 pochodzący z [**Jar-Pfl 3**]. W tym celu potrzebować będziemy następującego wyniku:

**Lemat 4.5.10.** *Niech $X, Y$ będą obszarami Riemanna nad $\mathbb{C}^n$ i niech $F : X \to Y$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Załóżmy, że $X$ jest pseudowypukły. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

*(1) $F$ jest odwzorowaniem właściwym;*
*(2) dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(X)$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz istnieją $c_1, \dots, c_k \in \mathcal{O}(Y)$ takie, że*

$$f^k + \sum_{j=1}^{k} (c_j \circ F) f^{k-j} \equiv 0.$$

Dowód Twierdzenia 4.5.9. Niech $\alpha : X \to \widehat{X}$, $\beta : Y \to \widehat{Y}$ będą maksymalnymi rozszerzeniami holomorficznymi. Ustalmy $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\widehat{X})$. Na mocy Lematu 4.5.10 istnieje $k \in \mathbb{K}$ oraz istnieją funkcje $c_1, \dots, c_k \in \mathcal{O}(Y)$ takie, że

$$(\widehat{f} \circ \alpha)^k + \sum_{j=1}^{k} (c_j \circ F)(\widehat{f} \circ \alpha)^{k-j} \equiv 0.$$

Niech $\widehat{c}_j \in \mathcal{O}(\widehat{Y})$ będzie rozszerzeniem $c_j$, tzn. $\widehat{c}_j \in \mathcal{O}(\widehat{Y})$ oraz $\widehat{c}_j \circ \beta = c_j$, $j = 1, \dots, k$. Na mocy zasady identyczności

$$\widehat{f}^k + \sum_{j=1}^{k} (\widehat{c}_j \circ \widehat{F}) \widehat{f}^{k-j} \equiv 0.$$

Ponowne użycie Lematu 4.5.10 kończy dowód. $\square$

**Przykład 4.5.11.** (A). Zbiór $\mathrm{Prop}(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n)$ składa się z odwzorowań postaci

$$f(z) = (B_1(z_{\sigma(1)}), \dots, B_n(z_{\sigma(n)})), \quad z \in \mathbb{D}^n,$$

gdzie $B_1, \dots, B_n$ są niestałymi, skończonymi iloczynami Blaschkego, natomiast $\sigma$ jest permutacją $n$ elementową.

(B). Twierdzenie Alexandera ([**Ale**])

$$\mathrm{Prop}(\mathbb{B}_n, \mathbb{B}_n) = \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_n) = \{U \circ \chi_a : \ U \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^n), \ a \in \mathbb{B}_n\}, \quad n \geqslant 2,$$

gdzie $\mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$ oznacza grupę izomorfizmów unitarnych przestrzeni $\mathbb{C}^n$, natomiast dla $a \in (\mathbb{B}_n)_*$

$$\chi_a(z) := \frac{1}{||a||^2} \frac{\sqrt{1 - ||a||^2}(||a||^2 z - \langle z, a\rangle a) - ||a||^2 a + \langle z, a\rangle a}{1 - \langle z, a\rangle}$$

oraz $\chi_0 := id$.

## 4.6. Rozmaitości Steina

Przypominamy tu podstawowe fakty dotycząc rozmaitości Steina, które będą nam w dalszej części potrzebne. Po bardziej szczegółowe informacje odsyłamy czytelnika do [**Hör**].

**Definicja 4.6.1.** *Niech $M$ będzie rozmaitością zespoloną wymiaru $n$. Mówimy, że $M$ jest* rozmaitością Steina *jeśli spełnione są następujące warunki:*

*(1) $M$ jest przeliczalna w nieskończoności.*

*(2) (Holomorficzna wypukłość) Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset\subset M$ jego otoczka holomorficzności $\widehat{K}_{\mathcal{O}(M)} := \{z \in M : \ |f(z)| \leqslant \max_K |f|, \ f \in \mathcal{O}(M)\}$ jest zwartym podzbiorem $M$.*
*(3) (Holomorficzne rozdzielanie) Dla dowolnych $z, w \in M$, $z \neq w$, istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(M)$ taka, że $f(z) \neq f(w)$.*
*(4) Dla dowolnego $z \in M$ istnieją funkcje $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(M)$ tworzące w otoczeniu punktu $z$ lokalny układ współrzędnych.*

Przypomnijmy podstawowe własności rozmaitości Steina:

**Twierdzenie 4.6.2.**

*a) Obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest Steina wtedy i tylko wtedy gdy jest obszarem holomorficzności.*
*b) (Twierdzenie Grauerta) $M$ jest rozmaitością Steina wtedy i tylko wtedy gdy $M$ jest rozmaitością zespoloną, na której istnieje ściśle plurisubharmoniczna, funkcja wyczerpująca.*
*c) Bycie rozmaitością Steina jest niezmiennikiem odwzorowań biholomorficznych.*
*d) Holomorficznie wypukłe obszary Riemanna są rozmaitościami Steina.*

Zaznaczmy tutaj, że fakt, iż obwiednie holomorficzności zwykle nie są obszarami w $\mathbb{C}^n$ (a tworzą „wielolistne" obszary nad $\mathbb{C}^n$, czyli tzw. obszary Riemanna) był jednym z głównych powodów dla którego w 1951 roku K. Stein wprowadził nową klasę - rozmaitości Steina (wspomnijmy, że nazwa ta została po raz pierwszy użyta już w 1952 przez H. Cartana). Jak się bowiem okazuje, obwiednia holomorficzności obszaru jest obszarem, który zwykle „*nie mieści się*" w $\mathbb{C}^n$, ale tworzy wielolistny obszar nad $\mathbb{C}^n$, mianowicie obszar Riemanna. Definicja rozmaitości Steina jest naturalna i pozwala oczekiwać, że geometryczna teoria funkcji analitycznych zachowuje się na nich podobnie jak na obszarach holomorficzności.

Jak się okazuje, bycie rozmaitością Steina jest niezmiennikiem odwzorowań holomorficznych właściwych:

**Twierdzenie 4.6.3** ([**Nar 1**], (zob. także [**Gra**] oraz [**Jar-Pfl 3**])). *Niech $X, Y$ będą rozmaitościami zespolonymi oraz niech $F : X \to Y$ będzie odwzorowaniem holomorficznym właściwym z $X$ na $Y$. Załóżmy, że włókna $F$ są zbiorami dyskretnymi w $X$. Wówczas*

$$X \text{ jest Steina} \Longleftrightarrow Y \text{ jest Steina.}$$

## 4.7. Holomorficzne wiązki włókniste

**Definicja 4.7.1** (Holomorficzna wiązka włóknista). *Niech $E, B, X$ będą rozmaitościami zespolonymi. Niech $\pi : E \to B$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Powiemy, że para $(E, \Pi)$ jest* holomorficzną wiązką włóknistą, *jeśli dla dowolnego punktu $b \in B$ istnieje jego otoczenie $U$ i odwzorowanie biholomorficzne $h : \pi^{-1}(U) \to U \times X$ takie, że*

$$\operatorname{proj}_U h = \pi|_{\pi^{-1}(U)}, \tag{4.7.1}$$

*gdzie* $\mathrm{proj}_U$ *oznacza rzutowanie na U. Ponadto, odwzorowanie h pojawiające się w (4.7.1) nazywamy* trywializacją.

**Przykład 4.7.2.** Najprostszymi przykładami holomorficznych wiązek włóknistych są iloczyny kartezjańskie

$$B \times X \to B,$$

z bazą $B$ i włóknem $X$. Takie wiązki (bądź te biholomorficzne z nimi) nazywamy *wiązkami trywialnymi.*

**Definicja 4.7.3.** *Niech $E$ będzie dowolną wiązką włóknistą z włóknem $X$. Automorfizmy postaci*

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} \in \mathrm{Aut}((\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times X),$$

*gdzie $\tau_\alpha$, $\tau_\beta$ są trywializacjami (ze skojarzonymi obszarami $\Omega_\alpha \times X, \Omega_\beta \times X$, odpowiednio) są tak zwanymi* funkcjami przejścia.

Zauważmy, że wprost z definicji wynika tożsamość:

$$\tau_{\alpha,\beta} \circ \tau_{\beta,\gamma} = \tau_{\alpha,\gamma} \quad \text{na} \quad (\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \cap \Omega_\gamma) \times X. \tag{4.7.2}$$

Odwróćmy teraz tę procedurę. Mając obszary $(\Omega_\alpha)_\alpha$ i rodzinę funkcji $(\tau_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta} \in \mathrm{Aut}((\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \times X)$ spełniających warunek (4.7.2) możemy zdefiniować holomorficzna wiązkę włóknistą z bazą $B = \bigcup_\alpha \Omega_\alpha$ i włóknem $X$ w następujący sposób:

$$E = \left( \bigsqcup_\alpha (\Omega_\alpha \times X) \right) / \sim, \tag{4.7.3}$$

sklejając $\Omega_\alpha \times X$ poprzez identyfikację: $(x_\alpha, z_\alpha) \sim (x_\beta, z_\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_\alpha = x_\beta \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ oraz $\tau_{\alpha,\beta}(x_\beta, z_\beta) = (x_\alpha, z_\alpha)$.

A zatem, możemy założyć, że wszystkie rozważane wiązki włókniste są postaci (4.7.3).

## 4.8. Funkcja jądrowa Bergmana

Niech $D$ będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. Przez $L^2_h(D)$ oznaczamy zbiór funkcji holomorficznych na $D$ całkowalnych z kwadratem. Jest to ośrodkowa przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle := \int_D f \bar{g} d\mathcal{L}^{2n}, \quad f, g \in L^h_h(D).$$

Normę indukowaną przez ten iloczyn oznaczamy przez $||f||_D := \sqrt{\langle f, f \rangle}$, $f \in L^2_h(D)$.

Nietrudno zauważyć (używając na przykład wzoru całkowego Cauchy'ego), że dla dowolnego $z \in D$ ewaluacja

$$L^2_h(D) \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

jest ciągłym funkcjonałem liniowym. Twierdzenie Riesza o reprezentacji daje istnienie funkcji $k_D(\cdot, z) \in L^2_h(D)$, $z \in D$ spełniających następującą własność reprodukcji

$$\langle f, k_D(\cdot, z) \rangle = f(z), \quad f \in L^2_h(D), \ z \in D.$$

Funkcję $k_D : D \times D \to \mathbb{C}$ nazywamy *funkcją jądrową Bergmana.*

Poniżej przedstawiamy część najważniejszych własności funkcji Bergmana. Po bardziej szczegółowe własności odsyłamy czytelnika do monografii [**Jar-Pfl 2**].

**Twierdzenie 4.8.1.** *Niech $D, G$ będą obszarami w $\mathbb{C}^n$. Wówczas*

*(1)* $k_D(z,w) = \overline{k_D(w,z)}$, $z, w \in D$;

*(2)* $(z,w) \mapsto k_D(z,\overline{w})$ *jest funkcją holomorficzną na* $D \times \tilde{D}$;

*(3) dla dowolnego odwzorowania biholomorficznego* $F : D \to G$

$$k_G(F(z), F(w)) \det[F'(z)]\overline{\det[F'(w)]} = k_D(z,w), \quad z, w \in D;$$

*(4) bardziej ogólnie: jeśli* $F : D \to G$ *jest odwzorowaniem właściwym to*

$$k_G(w, F(z))\overline{\det[F'(z)]} = \sum_i \det[U_i'(w)] k_D(U_i(w), z), \quad z \in D, \ w \in G,$$

*gdzie* $F^{-1} = \{U_1, \dots, U_k\}$.

**Przykład 4.8.2.** Zachodzą wzory:

$$k_{\mathbb{D}^n}(z,w) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - z_j \overline{w_j}}, \quad z, w \in \mathbb{D}^n,$$

$$k_{\mathbb{B}_n}(z,w) = \frac{n!}{\pi^n}(1 - \langle z, w \rangle)^{-(n+1)}, \quad z, w \in \mathbb{B}_n.$$

## 4.9. $\mathbb{C}$-wypukłość

Wiadomo, że obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym, jeśli jego przecięcie z dowolną prostą rzeczywistą jest ściągalne (to znaczy jest spójne i jednospójne). A zatem, w naturalny sposób wprowadza się pojęcie $\mathbb{C}$-wypukłości:

**Definicja 4.9.1.** *Powiemy, że obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest $\mathbb{C}$-wypukły, jeśli jego przecięcie z dowolną prostą zespoloną jest zbiorem ściągalnym.*

Pokazuje się, że dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ mamy następujący ciąg implikacji:

$$D \text{ jest wypukły} \Longrightarrow D \text{ jest } \mathbb{C}\text{-wypukły} \Longrightarrow D \text{ jest pseudowypukły.}$$

Interesujący jest następujący fakt (zob. [**Jac**]):

**Twierdzenie 4.9.2.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem $\mathbb{C}$-wypukłym z brzegiem klasy $\mathcal{C}^2$.*

*Wówczas odległość Carathéodory'ego i funkcja Lemperta obszaru $\Omega$ pokrywają się.*

## 4.10. Twierdzenie Kroneckera

Powiemy, że liczby rzeczywiste $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są *$\mathbb{Z}$-liniowo niezależne* jeśli dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ zachodzi następująca implikacja:

$$x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Ponadto, powiemy, że $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ są *$\mathbb{Q}$-liniowo niezależne* jeśli dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$ zachodzi implikacja

$$x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Zauważmy, że $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są $\mathbb{Z}$-liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ są $\mathbb{Q}$-liniowo niezależne.

Następujący wynik można znaleźć w [**Har-Wri**]

**Twierdzenie 4.10.1** (Twierdzenie Kroneckera)**.** *Załóżmy, że* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *są* $\mathbb{Z}$ *liniowo niezależne. Wówczas zbiór* $\{(e^{2\pi i\ k\alpha_1}, \ldots, e^{2\pi i\ k\alpha_n}) :\ n \in \mathbb{N}\}$ *jest gęsty w* $(\partial\mathbb{D})^n$.

## 4.11. Równanie Pella

Równanie diofantyczne postaci

$$x^2 - ny^2 = 1, \tag{4.11.1}$$

gdzie $x$ i $y$ są liczbami oraz $n$ jest liczbą naturalną niebędącą kwadratem żadnej liczby całkowitej, nazywamy *równaniem Pella.*

Lagrange pokazał, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ nie będącej kwadratem liczby całkowitej, równanie (4.11.1) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

W V wieku p.n.e. w Indiach i Grecji rozważane było równanie Pella z $n = 2$. Powodem był jego związek z liczbą $\sqrt{2}$ - jeśli $x$i $y$ są rozwiązaniami tego równania, to $\frac{x}{y}$ jest „dość dobrą" aproksymacją $\sqrt{2}$.

Tej samej idei używał później Archimedes do aproksymacji $\sqrt{3}$.

W 250 p.n.e. Diophantus rozważał ogólniejszą postać równania Pella:

$$x^2 - ny^2 = c, \tag{4.11.2}$$

gdzie $x$ i $y$ są liczbami całkowitymi, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}$.

Jak się okazuje, równanie to nie zawsze musi mieć rozwiązanie (można łatwo sprawdzić, $x^2 - 3y^2 = -1$ nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych).

Pokazuje się, że jeśli równanie (4.11.2) posiada rozwiązanie, to ma ich wówczas nieskończenie wiele.

Po dużo więcej informacji i głębszy rys historyczny dotyczący równania Pella odsyłamy zainteresowanego czytelnika do [**Bar**]

## 4.12. Klasyczne obszary Cartana

**Definicja 4.12.1.** *Obszar* $D \subset \mathbb{C}^n$ *nazywamy obszarem symetrycznym, jeśli dla dowolnego* $a \in D$ *istnieje* $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$ *taki, że* $\varphi^2 = \mathrm{id}$, $\varphi(a) = a$ *oraz* $a$ *jest punktem izolowanym zbioru* $\mathrm{Fix}(\varphi) := \{z \in D :\ \varphi(z) = z\}$.

Zgodnie z twierdzeniem Cartana, wszystkie, poza przypadkiem gdy $n = 16$ lub $n = 27$, nierozkładalne, ograniczone symetryczne obszary są holomorficznie równoważne jednemu z następujących obszarów:

$$\mathcal{R}_I^{n,m} = \{z \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) :\ 1 - zz^* > 0\},$$
$$\mathcal{R}_{II}^n = \{z \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) :\ 1 - zz^* > 0,\ z = z^t\},$$
$$\mathcal{R}_{III}^n = \{z \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) :\ 1 - zz^* > 0,\ z = -z^t\},$$
$$\mathcal{R}_{IV}^n = \{z \in \mathbb{C}^n :\ |z_1^2 + \ldots + z_n^2| + 1 - 2(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2) > 0,\ |z_1^2 + \ldots + z_n^2| < 1\}.$$

Poniżej przedstawiamy podstawowe geometryczne własności tych obszarów. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do [**Hua**].

(1) $\partial_s \mathcal{R}_I^{n,n} = \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U}$ to zbiór macierzy unitarnych.

Grupa automorfizmów $\mathcal{R}_I^{n,n}$ składa się z odwzorowań

$$z \mapsto (Az+B)(Cz+D)^{-1},$$

gdzie macierz blokowa $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbb{C})$ spełnia warunki:

$$M^* H M = H, \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbb{C}), \quad \det M = 1.$$

W szczególności, grupa automorfizmów zachowujących 0 składa się z odwzorowań postaci $z \mapsto uzv$, gdzie $u, v \in \mathcal{U}$.

(2) $\partial_s \mathcal{R}_{II}^n = \mathcal{U} \cap \mathcal{M}_{n,n}^s(\mathbb{C})$.

Grupa automorfizmów $\mathcal{R}_{II}^n$ składa się z odwzorowań

$$z \mapsto (Az+B)(Cz+D)^{-1},$$

gdzie macierz blokowa $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ spełnia warunki:

$$M^* H M = H,\ M^t J M = J, \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tak więc, podgrupa automorfizmów zachowujących 0 składa się z odwzorowań postaci $z \mapsto uzu^t$, gdzie $u, v \in \mathcal{U}$.

(3) $\partial_s \mathcal{R}_{III}^n = \{x \in \mathcal{U} : \ x = -x^t\}$.

Grupa automorfizmów $\mathcal{R}_{III}^n$ składa się z odwzorowań

$$z \mapsto (Az+B)(Cz+D)^{-1},$$

gdzie macierz blokowa $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbb{C})$ spełnia warunki:

$$M^* H M = H,\ M^t K M = K, \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podgrupa automorfizmów zachowujących 0 składa się z odwzorowań postaci $z \mapsto uzu^t$, gdzie $u, v \in \mathcal{U}$, $u = -u^t$, $v = -v^t$.

(4) $\partial_s \mathcal{R}_{IV}^n = \{e^{i\theta} x : \ \theta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{S}^{n-1}, \}$ gdzie $\mathbb{S}^{n-1}$ oznacza $n-1-$wymiarową sferę jednostkową w $\mathbb{R}^n$.

Grupa automorfizmów $\mathcal{R}_{IV}$ składa się z odwzorowań

$$z \mapsto \left\{ \left[ \left( \frac{1}{2}(z\cdot z+1), \frac{i}{2}(z\cdot z-1) \right) A^t + zB^t \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \left( \frac{1}{2}(z\cdot z), \frac{i}{2}(z\cdot z-1) \right) C^t + D^t \right\},$$

gdzie $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$ oraz $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ spełniają związki:

$$MGM^t = G, \quad \det M = 1, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix}.$$

# Spis symboli

## Symbole ogólne

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych: $1, 2, 3, \ldots$;
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych;
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych;
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych;
$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych;
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ - koło jednostkowe na płaszczyźnie zespolonej;
$\mathbb{A}(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}$ - pierścień, $r < R$, $R > 0$;
$\mathbb{A}(r) = \mathbb{A}(\frac{1}{r}, r)$, $r > 1$;
$||z|| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots |z_n|^2}$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \ ||z|| < 1\}$ - kula euklidesowa w $\mathbb{C}^n$;
$|z^\alpha| = |z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_n|^{\alpha_n}$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$;
$\mathcal{L}^n$ - $n-$wymiarowa miara Lebesgue'a;
$\mathcal{L}^M$ - miara Lebesgue'a na podrozmaitości $M$;
$\mathcal{O}(M, N)$ - zbiór odwzorowań holomorficznych pomiędzy rozmaitościami $M$ oraz $N$;
$\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}(M, \mathbb{C})$;
$\mathcal{O}^*(M) = \mathcal{O}(M, \mathbb{C}^*)$;
$\mathcal{PSH}(D)$ - zbiór funkcji plurisubharmonicznych na obszarze $D \subset \mathbb{C}^n$;
$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ - przestrzeń macierzy $n \times m$ wymiarowych o współczynnikach ze zbioru $\mathbb{K}$;
$\mathcal{M}^s_{2\times 2}(\mathbb{K})$ - przestrzeń symetrycznych macierzy $n\times m$ wymiarowych o współczynnikach z $\mathbb{K}$;
$a^t$ - transpozycja macierzy $a \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$;
$a^*$ - inwolucja (samosprzężenie) macierzy $a \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$;
$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + \ldots z_n\overline{w_n}$, $z, w \in \mathbb{C}^n$ - iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$;
$z \cdot w = (z_1 w_1, \ldots, z_n w_n)$, $z, w \in \mathbb{C}^n$;
$\mathrm{Aut}(D)$ - grupa automorfizmów obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ wyposażona w topologię zbieżności lokalnie jednostajnej;
$\mathrm{Prop}(D, G)$ - zbiór odwzorowań holomorficznych właściwych pomiędzy obszarami $D \subset \mathbb{C}^n$ i $G \subset \mathbb{C}^m$;
$\rho(x)$ - promień spektralny macierzy $x \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$;
$\mathrm{Fix}(\varphi)$ - zbiór punktów stałych odwozorowania $\varphi$.

## Rozdział 1



## Rozdział 2



## Rozdział 3

# Bibliografia


[Abo] A. ABOUHAJAR, *Function theory related to $H^\infty$ control*, Ph.D. thesis, Newcastle University, 2007.

[Ab-Wh-Yo] A. ABOUHAJAR, M. WHITE I N. YOUNG, *A Schwarz lemma for a domain related to mu-synthesis*, Journal of Geometric Analysis **17** (2007), no. 4, 717–750.

[Agl-You] J. AGLER I N. YOUNG, *The hyperbolic geometry of the symmetrized bidisc*, Journal of Geometric Analysis **14** (2004), no. 3, 375–403.

[Agr] M.L. AGRANOVSKII, *Möbius spaces of functions on the Shilov boundaries of classical domains of tubular type*, Sibirsk. Mat. Zh. **29** (1988), no. 5, 11–23.

[Ale] H. ALEXANDER, *Proper holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 137–146.

[And] E. ANDERSÉN, *Complete vector fields on $\mathbb{C}^n_*$*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 4, 1079–1085.

[Bar] E.J. BARBEAU, *Pell's Equation, Problem Books in Mathematics*, Springer-Verlag, (2003).

[Barr] D.E. BARRETT, *Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin*, Comment. Math. Helv, **59** (1984), 550–564.

[Bel 1] S. BELL, *Analytic hypoellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem and extendability of holomorphic mappings*, Acta Math. **147** (1981), no. 1-2, 109–116.

[Bel 2] S. BELL, *Proper holomorphic mappings between circular domains*, Comment. Math. Helv. **57** (1982), no. 4, 532–538.

[Ber] S. BERGMAN, *Über ausgezeichnete Randflächen in der Theorie der Functionen von Zwei komplexen Veränderlichen*, Math. Ann. **104** (1931), 611–636.

[Ber-Pin] F. BERTELOOT I S. PINCHUK, *Proper holomorphic mappings between bounded complete Reinhardt domains*, Math. Z. **219** (1995), 343–356.

[Bou] M. BOUTAT, *Proper holomorphic mappings between quasi-circular domains and complete circular domains*, Bull. Sci. math. **133** (2009) 335–347.

[Coe-Loeb] G. COEURÉ I J.-J. LOEB, *A counterexample to the Serre problem with a bounded domain in $\mathbb{C}^2$ as fiber*, Ann. Math., 122 (1985), 329–334.

[Dem 1] J.P. DEMAILLY, *Différents exemples de fibré holomorphes non de Stein*, Séminaire P. Lelong - H. Skoda, 1976-77, 15–41, Lecture Notes in Math., 694.

[Dem 2] J.P. DEMAILLY, *Un exemple de fibré holomorphe non de Stein á fibre $C^2$ au-dessus du disque ou du plan*, Séminaire P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Analyse) **24** (1983/84) Lecture Notes in Math. 1198, Springer, 88–97.

[Din-Sel] G. DINI I A. SELVAGGI PRIMICERIO, *Proper holomorphic mappings between generalized pseudoellipsoids*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **158** (1991) 219–229.

[Edi-Zwo 1] A. EDIGARIAN I W. ZWONEK, *Proper holomorphic mappings in some class of unbounded domains*, Kodai Math J. **22** (1999), 305–312.

[Edi-Zwo 2] A. EDIGARIAN I W. ZWONEK, *Geometry of the symmetrized polydisc*, Arch. Math. (Basel) 84 (2005), 364–374.

[Edi-Zwo 3] A. EDIGARIAN I W. ZWONEK, *Schwarz lemma for the tetrablock*, Bulletin of the London Mathematical Society, **41** (2009), no. 3, 506-514.

[Fed] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Berlin, Springer, 1996.

[Fis 1] G. FISCHER, *Holomorph Vollständige Faserbündel*, Math. Ann. **1980** (1969), 341–348.

[Fis 2] G. Fischer, *Hilbert spaces of holomorphic functions on bounded domains*, Manuscripta Math. **3** (1970), 305–314.

[Fis 3] G. Fischer, *Fibrés holomorphes au-dessus d'un espace de Stein*, in *Espaces Analytiques*, Bucarest Acad. Rep. Soc. Roumanie (1981), 57–69.

[For-Die] J. Fornæes i K. Diederich, *Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Invent. Math. **39** (1977), 129–141.

[Fr-Ma-Vi] B.L. Fridman, D. Ma, J.-P. Vigué, *Isolated fixed point set for holomorphic maps*, J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 8087.

[Fuks] B.A. Fuks, *Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables*, Amer. Math. Soc. (1965).

[Ge-Ra-Shi] I. Gelfand, D. Raikov i G.E. Shilov, *Commutative normed rings.* (Translated from the Russian), Chelsea Publishing Co., New York (1964).

[Gra] H. Grauert, *Charakterisierung der holomorph-vollstndigen komplexen Räume*, Math. Ann. 129 (1955), 233–259

[Har-Wri] G.H. Hardy i E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publ., 1978.

[Isa-Kru] A.V. Isaev i N.G. Kruzhilin, *Proper holomorphic Maps between Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$, Michigan Math. **54** (2006), 33–64.

[Hen-Nov] G.M. Henkin i R. Novikov, *Proper mappings of classical domains*, Lecture Notes in Math. **1043**, (1984), 625–627.

[Hir 1] A. Hirschowitz, *Sur certains fibrés holomorphes à base et fibre Stein (corrections),* Comptes Rendus **278** (1974), série A, 89–91.

[Hir 2] A. Hirschowitz, *Domaines de Stein et fonctions holomorphes bornées,* Math. Ann. **213** (1975), 185–193.

[Hör] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, third edition, North-Holland Mathematical Library, 7. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[Hua] L.K. Hua, *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains*, AMS. (1963), Providence.

[Jac] D. Jacquet, $\mathbb{C}$*-convex domains with* $\mathcal{C}^2$ *boundary,* Complex Var. Elliptic Equ. 51 (2006), no. 4, 303-312.

[Jak-Jar] P. Jakóbczak i M. Jarnicki, *Lectures on Holomorphic Functions of Sceveral Complex Variables*, plik zawierający wersję elektroniczną dostępny pod adresem `http://www.im.uj.edu.pl/MarekJarnicki/mjp.php`.

[Jar-Pfl 1] M. Jarnicki i P. Pflug, *Non-extendable holomorphic functions in Reinhardt domains*, Ann. Polon. Math. **46** (1985), 129–140.

[Jar-Pfl 2] M. Jarnicki i P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, Walter de Gruyter, 1993.

[Jar-Pfl 3] M. Jarnicki i P. Pflug, *Extension of Holomorpic Functions*, Walter de Gruyter, 2000.

[Jar-Pfl 4] M. Jarnicki i P. Pflug, *On automorphisms of the symmetrized bidisc,* Arch. Math. 83 (2004), 264-266.

[Jar-Pfl 5] M. Jarnicki i P. Pflug, *First Steps in Several Complex Variables: Reinhardt domains,* EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Kaup] W. Kaup, *Über das Randverhalten von holomorphen Automorphismen beschränkter Gebiete*, Manuscripta Math. 3 (1970) 257-270.

[Ker] H. Kerner, *Über die Fortsetzung holomorpher Abbildungen*, Arch. Math. (Basel) **11** (1960), 44–49.

[Kli] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, The Clarendon Press 1991.

[Kön] K. Königsberger, *Über die Holomorphie-Vollständigkeit lokal trivialer Faserräume*, Math. Ann. **189** (1970), 178–184.

[Kos 1] Ł. Kosiński, *Proper holomorphic mappings in the special class of Reinhardt domains*, Ann. Polon. Math. **92** (2007), 285–297.

[Kos 2] Ł. Kosiński, *Holomorphically contractible families of functions and pseudometrics for some class of Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^n$, C. R. Acad. Bulgare Sci. **61** (2008), no 9.

[Kos 3] Ł. Kosiński, *Erratum to: "Proper holomorphic mappings in the special class of Reinhardt domains" (Ann. Polon. Math. 92 (2007), 285–297)*, Ann. Polon. Math. **95** (2009), no. 3, 301–302.

[Kos 4] Ł. Kosiński, *Proper holomorphic mapppings between Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$, Mich. Math. Journal. **58** (2009), no. 3, 711–721.

[Kos 5] Ł. Kosiński, *Serre problem for unbounded pseudoconvex Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$, preprint, **arXiv:0904.3877**.

[Kos 6] Ł. Kosiński, *Geometry of quasi-circular domains and applications to tetrablock*, przyjęte do druku w Proc. of Amer. Math. Soc.

[Kru] N.G. Kruzhilin, *Holomorphic automorphisms of hyperbolic Reinhardt domains*, Math. USSR-Izv. **32** (1989), 15–38.

[Lan] M. Landucci, *Proper holomorphic mappings between some nonsmooth domains,* Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV) **CLV** (1989), 193-203.

[Lan-Spi] M. Landucci i A. Spiro, *Proper holomorphic maps between complete Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$, Complex Variables Theory Appl. **29** (1996), 9–25.

[LeB] P. LeBarz, *À propos des revêtements ramifiés d'espaces de Stein*, Math. Ann. **222** (1976), no. 1, 63–69.

[Mok 1] N. Mok, *Le problème de Serre pour les surfaces de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 290 (1980) **4**, A179–A180.

[Mok 2] N. Mok, *The Serre problem on Riemann surfaces*, Math. Ann., (258) (1981), 145–168.

[Mok 3] N. Mok, *Nonexistence of proper holomorphic maps between certain classical bounded symmetric domains*, Chinese Annals of Mathematics - *Series B* **29**, No.2 (2008), 135–146.

[Nar 1] R. Narasimhan, *A note on Stein spaces and their normalizations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 16 (1962), 327–333.

[Nar 2] R. Narasimhan, *Several Complex Variables*, Chicago (1971).

[Nik] N. Nikolov, *The symmetrized polydisc cannot be exhausted by domains biholomorphic to convex domains*, Ann. Polon. Math., **88** (2006), 279-283.

[Nis 1] Y. Nishimura, *Applications holomorphes injectives à jacobien constant de deux variables*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), no. 4, 697–709.

[Nis 2] Y. Nishimura, *Analytic automorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *which preserve the coordinate axes*, The Madison Symposium on Complex Analysis (Madison, WI, 1991), Contemp. Math., **137**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1992) 351–365.

[Oel-Zaf] K. Oeljeklaus i D. Zaffran, *Steinness of bundles with fiber a Reinhardt bounded domain*, Bull. Soc. math. France **134** 4 (2006), 451–473.

[Pes] E. Peschl, *Automorphismes holomorphes de l'espace à n dimensions complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **242** (1956), 1836–1838.

[Pfl] P. Pflug, *Quadratintegrable holomorphe Funktionen und die Serre Vermutung*, Math. Ann. **216** (1975), no. 3, 285–288.

[Pfl-Zwo] P. Pflug i W. Zwonek, *The Serre problem with Reinhardt fibers*, Annales de l'Institut Fourier **54** (2004), 129–146.

[Rud 1] W. Rudin, *Holomorphic maps that extend to automorphisms of a ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), no. 3, 429–432.

[Rud 2] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 241, Springer-Verlag, New York - Berlin, 1980.

[Ser] J.-P. Serre, *Queulques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, Colloque sut les Fonctions de Plurieurs Variables Complexes, Bruxelles (1953).

[Shi 1] S. Shimizu, *Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containig the origin*, Tôhoku Math. J. **40** (1988), 119–152.

[Shi 2] S. Shimizu, *Automorphisms of bounded Reinhardt domains*, Japan. J. Math. **1** (1989), 385–414.

[Shi 3] S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$, Osaka J. Math. **28** (1991), 609-621.

[Shi 4] S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$, II, Kodai Math. J, **15** (1992), 430-444.

[Sib] N. Sibony, *Fibrés holomorpes et métrique de Carathéodory,* C. R. Acard. Sci. Paris **279** (1974), 261–264.

[Siu 1] Y.-T. Siu, *All plane domains are Banach-Stein,* Manuscripta Math. **14** (1974), 101–105.

[Siu 2] Y.-T. Siu, *Holomorphic fiber bundles whose fibers are bounded Stein domains with zero first Betti number,* Math. Ann. **219** (1976), 171–192.

[Siu 3] Y.-T. Siu, *Pseudoconvexity and the problem of Levi,* Bull. A.M.S. **84** (1978), 481–512.

[Sko] H. Skoda, *Fibré holomorphes á base fibre et á fibre de Stein,* Invent. Math. **43** (1977), 97–107.

[Ste 1] J.-L. Stehlé, *Überlagerungen holomorph vollständiger komplexer Raüme*, Arch. Math. **VII** (1956) 354–361.

[Ste 2] J.-L. Stehlé, *Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certaines fibrés analytiques*, Compte Rendus, **279**, série A, (1974) 235–238.

[Ste 3] J.-L. Stehlé, *Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certaines fibrés analytiques*, In Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1973/74 (ed. P. Lelong, P. Doulbeaut, H. Skoda), Lecture Notes in Mathematics 474. Springer, Berlin (1975)m 155–179.

[Sun] T. Sunada, *Holomorphic equivalence problems for bounded Reinhardt domains*, Math. Ann. **235** (1978), 111–128.

[Tu 1] Z.-H. Tu, *Rigidity of proper holomorphic mappings between equidimensional bounded symmetric domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1035–1042.

[Tu 2] Z.-H. Tu, *Rigidity of proper holomorphic mappings between nonequidimensional bounded symmetric domains*, Math. Z. **240** (2002), 13–35.

[Tu 3] Z.-H. Tu, *Rigidity of proper holomorphic mappings between bounded symmetric domains*, Geometric function theory in several complex variables, pp.310–316, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2004.

[Tum-Hen] A.E. Tumanov i G.M. Khenkin, *Local characterization of holomorphic automorphisms of Siegel domains*, (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. **17**0 (1983), no. 4, 49–61.

[Viv] L.R. Vivas, *Remarks on Automorphisms of* $\mathbb{C}_* \times \mathbb{C}_*$ *and their basins*, Complex Var. Elliptic Equ. **54** (2009), no. 3-4, 401–407.

[You] N. Young, *The automorphism group of the tetrablock*, Journal of the London Mathematical Society , **77** (2008), no. 3, 757–770.

[Zaf] D. Zaffran, *Holomorphic functions on bundles over annuli*, Math. Ann. 341 (2008), no. **4**, 717–733.

[Zwo 1] W. Zwonek, *On hyperbolicity of pseudoconvex Reinhardt domains*, Arch. Math, **72** (1999), 304–314.

[Zwo 2] W. Zwonek, *Completeness, Reinhardt domains and the method of complex geodesics in the theory of invariant functions*, Dissertationes Mathematicae **388** (2000).