Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki

Funkcje Bergmana obszarów w $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^n$

Piotr Jucha

promotor:
dr hab. Włodzimierz Zwonek

Kraków 2004

SPIS TREŚCI

WSTĘP

W latach dwudziestych ubiegłego wieku Stefan Bergman (zob. listę publikacji w [Ber 1950]) zainicjował badania funkcji holomorficznych całkowalnych z kwadratem. Wprowadził również, ściśle z nimi związane, funkcję jądrową oraz metrykę, które później zostały nazwane jego imieniem. Motywacją była próba rozwiązania problemu klasyfikacji obszarów w $\mathbb{C}^n$, który zrodził się pod koniec dziewiętnastego wieku i pozostaje jednym z największych wyzwań współczesnej analizy zespolonej wielu zmiennych. Poincaré pokazał mianowicie, że — w przeciwieństwie do płaszczyzny zespolonej, gdzie mamy twierdzenie Riemanna o odwzorowaniach konforemnych — już kula jednostkowa w $\mathbb{C}^2$ nie jest biholomorficzna z bidyskiem. Jądro oraz metryka Bergmana, jako niezmienniki biholomorfizmów, były naturalnymi obiektami, które mogły decydować, czy lub kiedy dwa obszary są podobne w rozumieniu analizy zespolonej.

W naturalny sposób pojawiło się także pytanie o zupełność obszarów względem metryki Bergmana oraz wyczerpywalność (dążenie jądra Bergmana do nieskończoności przy zbliżaniu się do brzegu). Bremermann ([Bre 1955]) udowodnił, że każdy obszar wyczerpywalny lub zupełny w sensie Bergmana musi być pseudowypukły. Przykład koła jednostkowego bez środka na płaszczyźnie pokazuje, że żadna z implikacji odwrotnych nie może zachodzić.

Bezpośrednie badanie obiektów wprowadzonych przez Bergmana oraz własności z nimi związanych (zupełność) wiązało się ze znacznymi trudnościami technicznymi. Dopiero kryterium Kobayashiego ([Kob 1959]) znacznie ułatwiło i przez długi czas było niemal jedynym narzędziem wykorzystywanym do badania zupełności w sensie Bergmana. Kobayashi zapytał czy, podany przez niego, warunek wystarczający na zupełność jest również warunkiem koniecznym. Przez długi czas pytanie to pozostawało bez odpowiedzi — dopiero Zwonek ([2001]) wskazał kontrprzykład.

Problem zupełności ma długą historię. W 1981 roku Ohsawa ([Ohs 1981]) udowodnił, że ograniczone obszary pseudowypukłe z brzegiem klasy $\mathcal{C}^1$ są zupełne w sensie Bergmana, następnie Jarnicki i Pflug pokazali ([Jar–Pfl 1989]), że ograniczone i pseudowypukłe obszary zbalansowane z ciągłym funkcjonałem Minkowskiego są zupełne. Obszary z obydwu wspomnianych klas są hiperwypukłe. Stąd pytanie, czy hiperwypukłość implikuje zupełność. Herbort ([Her 1999]) oraz Błocki i Pflug ([Bło–Pfl 1998]) udowodnili, że istotnie tak jest. Już wcześniej Ohsawa ([Ohs 1993]) pokazał, że z hiperwypukłości wynika wyczerpywalność. A na płaszczyźnie zespolonej, wyczerpywalność pociąga za sobą zupełność (zob. [Chen 2000]). Widać zatem, że te trzy pojęcia (hiperwypukłość, wyczerpywalność i zupełność) są ze sobą ściśle związane. Jednakże żadne dwa z nich nie są równoważne — wystarczy wspomnieć o różnych obszarach typu Zalcmana, które są doskonałymi przykładami rozróżniającymi te własności.

Skoro problem zupełności obszarów hiperwypukłych został rozstrzygnięty, kierunek dalszych badań wyznaczają różne typy obszarów niehiperwypukłych oraz, najmniej do tej pory zbadanych, obszarów nieograniczonych. Sukces metod związanych z teorią potencjału i pluripotencjału w badaniach problemu zupełności pozwala mieć nadzieję, że ich zastosowanie w nowych sytuacjach również przyniesie efekty.

W Rozdziale I niniejszej pracy definiujemy wszystkie niezbędne pojęcia i przedstawiamy główne, poznane do tej pory, rezultaty badań. Zakres materiału tam zaprezentowanego podyktowany jest jego związkiem z głównymi tezami tej rozprawy oraz z zainteresowaniami autora i nie pretenduje do miana kompletnego przeglądu wyników z tej dziedziny. Skupiamy się głównie na wspomnianych wyżej własnościach hiperwypukłości, wyczerpywalności i zupełności w sensie Bergmana. Przyjrzymy się dokładniej związkom między nimi oraz ich charakteryzacjom w pewnych przypadkach (obszary płaskie i obszary Reinhardta) ze szczególnym uwzględnieniem aspektów związanych z teorią potencjału.

W Rozdziale II podejmujemy próbę charakteryzacji zupełności w sensie Bergmana na płaszczyźnie zespolonej za pomocą pojęć związanych z teorią potencjału. Podajemy pewne wyniki częściowe, których dowody bazują na metodach użytych w [Zwo 2002] przy charakteryzacji wyczerpywalności.

Wnioski z Rozdziału II dotyczące specjalnych obszarów zebraliśmy w Rozdziale III. Dowodzimy pełnej charakteryzacji ze względu na zupełność dużej rodziny obszarów typu Zalcmana. Jest to odpowiedź na pytanie postawione przez Pfluga w [Pfl 2000]. Zestawiamy warunki typu Wienera dla tych obszarów równoważne zupełności, wyczerpywalności i hiperwypukłości.

Rozdział IV poświęcony jest nieograniczonym obszarom Reinhardta. Podajemy charakteryzację tych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ oraz c–hiperbolicznych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^n$, które są zupełne w sensie Bergmana.

Pracę zamyka Dodatek, w którym zostały zebrane niektóre klasyczne twierdzenia i definicje, wykorzystywane we wcześniejszych rozdziałach, spis ważniejszych oznaczeń oraz lista cytowanej literatury. Chcielibyśmy podkreślić, że szeroki przegląd materiału, dotyczącego zagadnień związanych z funkcjami Bergmana, znajdzie Czytelnik w [Jar–Pfl 1993] i [Jar–Pfl 2004].

Autor chciałby złożyć szczególne podziękowania dr. hab. Włodzimierzowi Zwonkowi — za liczne propozycje problemów, cenne wskazówki i dyskusje, ogromną pomoc w trakcie pisania tej pracy oraz za cierpliwość; prof. Peterowi Pflugowi — za gościnność, zachętę do zajęcia się niektórymi problemami oraz trafne uwagi i wskazówki; prof. Markowi Jarnickiemu — za inspirację do zajmowania się matematyką i wprowadzenie w świat analizy zespolonej; oraz innym osobom, które przyczyniły sie bezpośrednio lub pośrednio do powstania tej pracy.

W trakcie pisania tej rozprawy, autor przebywał na stypendium DAAD w Carl von Ossietzky Univerität w Oldenburgu.

ROZDZIAŁ I

WPROWADZENIE

1.1. Funkcje Bergmana

Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. Oznaczmy przez $L^2_h(D)$ zbiór funkcji holomorficznych na D całkowalnych z kwadratem. Jest to ośrodkowa przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g\rangle_D := \int_D f\overline{g}\, d\mathcal{L}^{2n}, \qquad f, g \in L^2_h(D),$$

gdzie $\mathcal{L}^{2n}$ oznacza $2n$–wymiarową miarę Lebesgue'a. Normę w tej przestrzeni oznaczmy przez $\|f\|_D, f \in L^2_h(D)$.

Zauważmy, że z formuły całkowej Cauchy'ego (lub z Lematu D.5) wynika ciągłość funkcjonału liniowego

$$L^2_h(D) \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

dla dowolnego punktu $z \in D$. Dzięki twierdzeniu Riesza o reprezentacji (Twierdzenie D.33), istnieje rodzina funkcji $K_D(\cdot, z) \in L^2_h(D)$, $z \in D$, o następującej własności reprodukcji

$$\langle f, K_D(\cdot, z)\rangle_D = f(z), \qquad f \in L^2_h(D),\ z \in D.$$

Funkcję

$$K_D : D \times D \to \mathbb{C}$$

nazywać będziemy *funkcją jądrową Bergmana*, a funkcję jej wartości na przekątnej zbioru D

$$k_D(z) := K_D(z, z), \qquad z \in D,$$

jądrem Bergmana.

Niektóre własności funkcji jądrowej i jądra Bergmana zebrane są w poniższej obserwacji.

Obserwacja 1.1 ([Jar–Pfl 1993]). *Niech D, D_j $(j = 1, 2, \dots,)$ będą obszarami w $\mathbb{C}^n$.*

(a) $K_D(z, w) = \langle K_D(\cdot, w), K_D(\cdot, z)\rangle_D = \overline{K_D(w, z)}$, $z, w \in D$.
(b) *Odwzorowanie $(z, w) \mapsto K_D(z, \overline{w})$ jest holomorficzne w $D \times D^\star$, gdzie $D^\star := \{\overline{z} : z \in D\}$.*

(c) *Jeżeli* $(\varphi_j)_{j\in J}$ *jest bazą ortonormalną przestrzeni* $L_h^2(D)$, *gdzie* $J \neq \varnothing$ *jest skończonym lub przeliczalnym zbiorem wskaźników, to*

$$K_D(z,w) = \sum_{j\in J} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}, \qquad z,w\in D$$

$$\text{oraz} \qquad k_D(z) = \sum_{j\in J} |\varphi_j(z)|^2, \qquad z\in D.$$

(d) *Zachodzi wzór*

$$k_D(z) = \sup\{|f(z)|^2 : f\in L_h^2(D), \|f\|_D \leqslant 1\}, \qquad z\in D.$$

(e) *Jeżeli* $D_1 \subset D_2$, *to* $k_{D_1} \geqslant k_{D_2}$.

(f) *Jeżeli* $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ *jest sumą wstępującego ciągu obszarów, to* $K_{D_j} \to K_D$ *lokalnie jednostajnie na* $D\times D$ *oraz* $k_{D_j} \to k_D$ *malejąco na* D *(przy* $j\to\infty$*).*

(g) *Jeżeli* $D = \bigcap_{j=1}^{\infty} D_j$ *jest przecięciem zstępującego ciągu obszarów, to* $K_{D_j} \to K_D$ *lokalnie jednostajnie na* $D\times D$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $k_{D_j} \to k_D$ *punktowo na* D *(przy* $j\to\infty$*).*

(h) *Niech* G *będzie obszarem w* $\mathbb{C}^n$ *oraz niech* $F : D\to G$ *będzie odwzorowaniem biholomorficznym. Wtedy*

$$K_G(F(z),F(w))\det F'(z)\overline{\det F'(w)} = K_D(z,w), \qquad z,w\in D.$$

(i) *Jeżeli* G *jest obszarem w* $\mathbb{C}^m$, *to*

$$K_{D\times G}((z_1,w_1),(z_2,w_2)) = K_D(z_1,z_2)K_G(w_1,w_2), \qquad z_1,z_2\in D, w_1,w_2\in G.$$

(j) *Zachodzą wzory:*

$$K_{\mathbb{B}_n}(z,w) = \frac{n!}{\pi^n}(1-\langle z,w\rangle)^{-(n+1)}, \qquad z,w\in\mathbb{B}_n,$$

$$K_{\Delta(0,1)^n}(z,w) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-z_j\overline{w}_j)^2}, \qquad z,w\in\Delta(0,1)^n.$$

Przy następującym założeniu dla obszaru D:

$$k_D(z) > 0, \qquad z\in D, \tag{1.1}$$

funkcja $\log k_D$ jest plurisubharmoniczna na D i można dobrze zdefiniować półokreśloną dodatnio formę hermitowską

$$B_D(z;X) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\log k_D(z)X_j\overline{X}_k, \qquad z\in D, X\in\mathbb{C}^n.$$

Indukowaną przez nią pseudometrykę

$$\beta_D(z;X) := \sqrt{B_D(z;X)}, \qquad z\in D, X\in\mathbb{C}^n,$$

nazywamy *pseudometryką Bergmana.*

Pseudoodległością Bergmana nazywamy funkcję

$$b_D(z,w) := \inf\{L_{\beta_D}(\alpha) : \alpha\in\mathcal{C}^1([0,1],D), \alpha(0)=z, \alpha(1)=w\}, \qquad z,w\in D,$$

gdzie

$$L_{\beta_D}(\alpha) := \int_0^1 \beta_D(\alpha(t);\alpha'(t))\,dt$$

oznacza długość krzywej α względem pseudometryki β_D.

Obserwacja 1.2 ([Jar–Pfl 1993]). *Dla obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ spełniającego warunek* (1.1)*, zachodzi*

(a) $\beta_D(z;\lambda X) = |\lambda|\beta_D(z;X), \quad z \in D, X \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}.$
(b) $\beta_D(z;X_1+X_2) \leqslant \beta_D(z;X_1) + \beta_D(z;X_2), \quad z \in D, X_1, X_2 \in \mathbb{C}^n.$
(c) $\beta_D : D \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ *jest ciągła.*
(d) $b_D : D \times D \to \mathbb{R}_+$ *jest ciągła.*
(e) *Zachodzi wzór*

$$\beta_D(z;X) = \frac{M_D(z;X)}{\sqrt{k_D(z)}}, \quad z \in D, X \in \mathbb{C}^n,$$

gdzie

$$M_D(z;X) := \sup\{|f'(z)X| : f \in L^2_h(D), \|f\|_D = 1, f(z) = 0\}, \quad z \in D, X \in \mathbb{C}^n.$$

(f) *Niech $G \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem, spełniającym warunek* (1.1)*, oraz niech $F : D \to G$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym. Wtedy*

$$\begin{aligned} \beta_G(F(z);F'(z)X) &= \beta_D(z;X), & z \in D, X \in \mathbb{C}^n,\\ b_G(F(z),F(w)) &= b_D(z,w), & z,w \in D. \end{aligned}$$

(g) *Jeżeli G jest obszarem w $\mathbb{C}^m$, spełniającym warunek* (1.1)*, to dla $z_1 \in D, z_2 \in G$ oraz $X_1 \in \mathbb{C}^n, X_2 \in \mathbb{C}^m$ zachodzi*

$$\beta_{D\times G}((z_1,z_2);(X_1,X_2)) = \sqrt{\beta^2_D(z_1;X_1) + \beta^2_G(z_2;X_2)}.$$

(i) *Zachodzą wzory:*

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbb{B}_n}(z;X) &= \sqrt{n+1}\left(\frac{\|X\|^2}{1-\|z\|^2} + \frac{|\langle z,X\rangle|^2}{(1-\|z\|^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z \in \mathbb{B}_n, X \in \mathbb{C}^n,\\ \beta_{\Delta(0,1)^n}(z;X) &= \sqrt{2}\left(\sum_{j=1}^n \frac{|X_j|^2}{(1-|z_j|^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z \in \Delta(0,1)^n, X \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

(j) *Jeśli* $\operatorname{diam} D \leqslant R < +\infty$*, to*

$$\begin{aligned} \beta_D(z;X) &\geqslant \frac{\|X\|}{R}, & z \in D, X \in \mathbb{C}^n,\\ b_D(z_1,z_2) &\geqslant \frac{\|z_1-z_2\|}{R}, & z_1, z_2 \in D. \end{aligned}$$

Warunek (1.1) nie zawsze jest spełniony. Jednak nawet w przypadku, gdy on zachodzi, pozostaje jeszcze problem dodatniej określoności pseudometryki Bergmana oraz oznaczoności pseudoodległości Bergmana.

Definicja 1.3. Dodatnio określoną pseudometrykę Bergmana nazywamy *metryką Bergmana*, a pseudoodległość Bergmana, spełniającą warunek $b_D(z,w) = 0 \iff z = w, z, w \in D$ — *odległością Bergmana*.

O obszarze D, dla którego zachodzi warunek (1.1) i ponadto β_D jest metryką, mówimy, że jest *β–hiperboliczny*.

Dla obszaru D rozważmy dwa warunki

$$\forall z \in D \;\; \exists f \in L_h^2(D) : \; f(z) \neq 0, \tag{1.2}$$

$$\forall z \in D, X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \;\; \exists f \in L_h^2(D) : \; f(z) = 0, f'(z)X \neq 0. \tag{1.3}$$

Obserwacje 1.1(d) oraz 1.2(e) pozwalają wyciągnąć następujące wnioski

Wniosek 1.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem.*

(a) *Jądro Bergmana k_D jest dodatnio określone w D wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek* (1.2)*.*
(a) *Jeżeli warunek* (1.2) *jest spełniony, to obszar D jest β–hiperboliczny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek* (1.3)*.*

Zauważmy, że jeśli obszar D jest ograniczony, to obydwa warunki (1.2) i (1.3) są spełnione.

Jednym z istotnych faktów dotyczących zachowania się funkcji Bergmana, jest następujące twierdzenie o lokalizacji.

Twierdzenie 1.5 ([Die–For–Her 1984], [Ohs 1984], por. [Jar–Pfl 1993]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem pseudowypukłym oraz niech $z_0 \in \partial D$. Dla dowolnych otwartych otoczeń $U_1 \subset\subset U_2$ punktu z_0 istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego $z \in V \cap U_1, X \in \mathbb{C}^n$, gdzie V oznacza dowolną spójną składową zbioru $D \cap U_2$, zachodzi*

(a) $\frac{1}{C} M_V(z;X) \leqslant M_D(z;X) \leqslant M_V(z;X)$,
(b) $\frac{1}{C} k_V(z) \leqslant k_D(z) \leqslant k_V(z)$,
(c) $\frac{1}{C} \beta_V(z;X) \leqslant \beta_D(z;X) \leqslant C\beta_V(z;X)$.

Inne własności oraz przykłady jąder i metryk Bergmana Czytelnik znajdzie np. w [Jar–Pfl 1993] i [Jar–Pfl 2004].

1.2. Wyczerpywalność i b–zupełność

Definicja 1.6. Mówimy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *zupełny w sensie Bergmana* (lub krótko *b–zupełny*), jeśli przestrzeń metryczna (D, b_D) jest zupełna, tzn. każdy ciąg Cauchy'ego względem odległości Bergmana (lub krócej *b_D–ciąg Cauchy'ego*) jest zbieżny w topologii naturalnej w D.

Mówimy, że obszar D jest *b–zupełny w punkcie* $z_0 \in \partial D$, jeśli nie istnieje b_D–ciąg Cauchy'ego zbieżny do z_0 w topologii naturalnej.

Obszar D nazywamy *wyczerpywalnym w punkcie* $z_0 \in \partial D$, jeżeli

$$\lim_{D \ni z \to z_0} k_D(z) = +\infty. \tag{1.4}$$

Mówimy, że D jest *wyczerpywalny*, jeśli jest wyczerpywalny w każdym swoim punkcie brzegowym.

W obszarze ograniczonym $D \subset \mathbb{C}^n$, zbieżność w topologii naturalnej b_D–ciągu Cauchy'ego jest równoznaczna z jego zbieżnością do pewnego punktu brzegowego D. W związku z tym mamy następującą równoważność

OBSERWACJA 1.7. *Obszar ograniczony $D \subset \mathbb{C}^n$ jest b–zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest b–zupełny w każdym swoim punkcie brzegowym.*

Z punktu widzenia zupełności w sensie Bergmana warto zajmować się jedynie obszarami pseudowypukłymi.

TWIERDZENIE 1.8 ([Bre 1955]). *Każdy obszar b–zupełny jest pseudowypukły. Każdy obszar wyczerpywalny jest również pseudowypukły.*

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Kontrprzykładem jest trójkąt Hartogsa $D := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < |w| < 1\}$ (zob. [Jar–Pfl 1993]), który nie jest b–zupełny, lub zbiór $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na płaszczyźnie zespolonej (nie jest ani b–zupełny, ani wyczerpywalny).

Kobayashi postawił pytanie ([Kob 1959]):

Które obszary pseudowypukłe sa b–zupełne?

Sformułował również kryterium, które ciągle pozostaje najważniejszym narzędziem w badaniu b–zupełności.

TWIERDZENIE 1.9 ([Kob 1959], [Kob 1962]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem spełniającym warunki* (1.2) *i* (1.3) *oraz niech $\mathcal{F}$ będzie gęstym podzbiorem $L_h^2(D)$.*
Załóżmy, że zachodzi warunek

$$\begin{gathered}\text{dla dowolnego ciągu } (z_k)_{k=1}^{\infty} \subset D, \text{ niemającego punktu skupienia w } D,\\ \text{dla dowolnego } f \in \mathcal{F} \text{ istnieje podciąg } (z_{k_j})_{j=1}^{\infty} \text{ taki, że}\\ \lim_{j\to\infty} \frac{|f(z_{k_j})|}{\sqrt{k_D(z_{k_j})}} = 0.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Wtedy D jest b–zupełny.

Ohsawa ([Ohs 1984]) zauważył, że prawdziwa jest lokalna wersja powyższego kryterium, tzn. dla dowolnego punktu $z_0 \in \partial D$ wystarczy sprawdzić warunek (1.5) dla zbioru $D \cap U$, gdzie U jest pewnym otwartym otoczeniem z_0.

W dalszej części pracy będziemy posługiwać się głównie pojęciem b–zupełności w punkcie, dlatego sformułujemy Twierdzenie 1.9 w innej postaci.

TWIERDZENIE 1.10. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem ograniczonym i niech $z_0 \in \partial D$. Załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest gęstym podzbiorem $L_h^2(D)$, oraz że zachodzi następujący warunek*

$$\begin{gathered}\text{dla dowolnego ciągu } (z_k)_{k=1}^{\infty} \subset D, \text{ zbieżnego do } z_0, \text{ i dla dowolnego } f \in \mathcal{F}\\ \text{istnieje podciąg } (z_{k_j})_{j=1}^{\infty} \text{ taki, że}\\ \lim_{j\to\infty} \frac{|f(z_{k_j})|}{\sqrt{k_D(z_{k_j})}} = 0.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Wtedy D jest b–zupełny w punkcie z_0.

Dowód. Skorzystamy z następującego lematu

Lemat 1.11 ([Pfl 1982]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem pseudowypukłym oraz niech $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subset D$ będzie ciągiem Cauchy'ego względem odległości Bergmana b_D, zbieżnym do $z_0 \in \partial D$.*

Wtedy istnieje funkcja $f \in L_h^2(D), \|f\| = 1$ oraz ciąg $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}, |\lambda_k| = 1$, taki, że

$$\lambda_k \frac{K_D(\cdot, z_k)}{\sqrt{k_D(z_k)}} \overset{L_h^2(D)}{\longrightarrow} f, \qquad (k \to \infty).$$

Przypuśćmy, że D nie jest b–zupełny w punkcie z_0. Istnieje zatem b_D–ciąg Cauchy'ego $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subset D$ zbieżny do z_0. Weźmy funkcję f z Lematu 1.11 oraz funkcję $g \in \mathcal{F}$ taką, że $\|f - g\|_D < \frac{1}{2}$. Z własności jądra Bergmana mamy następującą nierówność

$$\frac{|g(z_{k_j})|}{\sqrt{k_D(z_{k_j})}} \geqslant \frac{|f(z_{k_j})|}{\sqrt{k_D(z_{k_j})}} - \|f - g\|_D \geqslant \frac{|f(z_{k_j})|}{\sqrt{k_D(z_{k_j})}} - \frac{1}{2},$$

gdzie $(z_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ jest podciągiem z warunku (1.6). Przechodząc z j do nieskończoności i stosując warunek (1.6) do wyrażenia z lewej strony nierówności oraz Obserwację 1.1(d) do ilorazu z prawej, otrzymujemy sprzeczność. □

Kobayashi postawił również hipotezę, że twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 1.9 jest prawdziwe. Okazała się ona błędna — wynika to z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.12 ([Zwo 2001]). *Istnieje ograniczony b–zupełny obszar*[(1)] *$D \subset \mathbb{C}$, dla którego zachodzi*

$$\liminf_{z \to \partial D} k_D(z) < +\infty.$$

Uwaga 1.13. *Warunek* (1.5) *w Twierdzeniu* 1.9 *można zastąpić następującym* (*zob.* [Bło 2004])

$$\limsup_{z \to \partial D} \frac{|f(z)|}{\sqrt{K_D(z)}} < \|f\|_D.$$

Dotychczas nie wiadomo, czy po takiej modyfikacji twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

Trzy pojęcia związane z kategorią obszarów pseudowypukłych — hiperwypukłość, wyczerpywalność i b–zupełność — stały się przedmiotem intensywnych badań w ostatnich kilkudziesięciu latach. Znamy dzisiaj wszystkie związki, jakie między nimi zachodzą.

---

(1) Obszar D podany jest efektywnie:

$$D := \Delta(0,1) \setminus \Big(\bigcup_{j=2}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{j^5-1} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j) \cup \{0\} \Big),$$

gdzie $x_{j,k} = \frac{1}{j^5} \exp\left(\frac{2\pi i k}{j^5}\right)$ oraz $r_j := \exp(-j^{19})$ dla $j \geqslant 2, k = 0, \ldots, j^5 - 1$.

Hiperwypukłość a wyczerpywalność.

TWIERDZENIE 1.14 ([Ohs 1993]). *Ograniczone obszary hiperwypukłe w $\mathbb{C}^n$ są wyczerpywalne.*

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (kontrprzykładem jest np. trójkąt Hartogsa albo pewne obszary typu Zalcmana — zob. Twierdzenie 1.39).

Dla obszarów na płaszczyźnie zespolonej, których dopełnienie nie jest zbiorem polarnym, klasyczna i zespolona funkcja Greena są sobie równe. Z ich własności (zob. Dodatek) wynika

OBSERWACJA 1.15. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym. D jest hiperwypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest regularny (gdy każdy jego punkt brzegowy jest punktem regularnym).*

Mamy następujące twierdzenie, dotyczące wyczerpywalności w punkcie.

TWIERDZENIE 1.16 ([Pfl–Zwo 2002]). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym oraz niech $z_0 \in \partial D$. Jeżeli z_0 jest punktem regularnym, to D jest wyczerpywalny w z_0.*

Wyczerpywalność w punkcie nie implikuje regularności (zob. Twierdzenie 1.39).

Wyczerpywalność a b–zupełność.

Ogólnie w $\mathbb{C}^n$ dla $n > 1$ wyczerpywalność nie implikuje b–zupełności (np. trójkąt Hartogsa). Inaczej jest na płaszczyźnie zespolonej.

TWIERDZENIE 1.17 ([Hed 1972], [Chen 2000]). *Niech D będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}$. Wtedy dla każdego punktu $z_0 \in \partial D$ zbiór funkcji holomorficznych w D, które są ograniczone w pewnym otoczeniu z_0, jest gęsty w $L^2_h(D)$.*

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

TWIERDZENIE 1.18 ([Chen 2000]). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym oraz niech $z_0 \in \partial D$. Jeśli D jest wyczerpywalny w punkcie z_0, to D jest również b–zupełny w z_0.*
W szczególności, ograniczone obszary wyczerpywalne w $\mathbb{C}$ są b–zupełne.

Wynik ten, jednakże przy dodatkowym założeniu, można uogólnić na obszary w $\mathbb{C}^n$.

TWIERDZENIE 1.19 ([Bło 2000]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem ograniczonym spełniającym następujący warunek:*

$$\begin{aligned} &\textit{dla dowolnego } z_0 \in \partial D \textit{ istnieje baza otoczeń } (U_j)_{j=1}^{\infty} \textit{ punktu } z_0 \\ &\qquad \textit{taka, że } D \cup U_j \textit{ jest pseudowypukły dla każdego } j \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Wtedy, jeśli D jest wyczerpywalny, to jest również b–zupełny.

Zauważmy, że warunek (1.7) jest zawsze spełniony dla obszarów płaskich.

Z zupełności w sensie Bergmana nie wynika natomiast wyczerpywalność, nawet dla obszarów tłustych (takich, że $D = \overline{\operatorname{int} D}$) na płaszczyźnie (zob. [Zwo 2001] oraz Twierdzenie 1.39).

Hiperwypukłość a b–zupełność.

Jednym z najogólniejszych i najważniejszych wyników jest poniższe twierdzenie udowodnione niezależnie przez Herborta oraz Błockiego i Pfluga.

TWIERDZENIE 1.20 (zob. [Bło–Pfl 1998], [Her 1999]). *Ograniczone obszary hiperwypukłe w $\mathbb{C}^n$ są b–zupełne.*

Kluczową rolę w dowodzie tego twierdzenia odgrywają oszacowania pochodzące z teorii pluripotencjału i dotyczące zbiorów podpoziomicowych zespolonej funkcji Greena (zob. Definicja D.30).

Rozważmy następujący warunek dla funkcji Greena pseudowypukłego obszaru ograniczonego $D \subset \mathbb{C}^n$ z biegunem w $w \in D$:

$$\lim_{w \to \partial D} \mathcal{L}^{2n}(\{z \in D : g_D(w,z) < -1\}) = 0. \tag{1.8}$$

Warunek (1.8) jest spełniony w przypadku, gdy D jest ograniczonym obszarem hiperwypukłym ([Bło–Pfl 1998], [Her 1999]) i implikuje zarówno wyczerpywalność, jak i b–zupełność ([Chen 1999], [Her 1999]). Żadna z implikacji odwrotnych nie jest prawdziwa (zob. [Her 1999] oraz [Zwo 2000a]).(2)

Z kolei na płaszczyźnie zespolonej, z Twierdzenia 1.16 i Twierdzenia 1.18 wynika

TWIERDZENIE 1.21. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym i niech $z_0 \in \partial D$ będzie punktem regularnym. Wtedy D jest b–zupełny w z_0.*

Z uwag dotyczących związku b–zupełności i wyczerpywalności wynika, że istnieją ograniczone obszary pseudowypukłe i b–zupełne, ale nie hiperwypukłe, np. pewne obszary typu Zalcmana ([Chen 1999], zob. Twierdzenie 1.39). Herbort ([Her 1999]) podał inny przykład takiego obszaru, będący pseudowypukłym obszarem Reinhardta.

Skoro problem zupełności został rozwiązany w klasie ograniczonych obszarów hiperwypukłych, więc naturalne jest skupienie się na obszarach niehiperwypukłych lub (i) nieograniczonych.

Wspomnianymi dwiema klasami obszarów, które obejmują pewne obszary b–zupełne, ale niehiperwypukłe, zajmiemy się w innych częściach pracy (obszarami Reinhardta — w Rozdziale 1.3 i Rozdziale IV, obszarami typu Zalcmana — w Rozdziale III).

Zacytujmy jeszcze dwa wyniki, które dotyczą zupełności w sensie Bergmana obszarów niekoniecznie hiperwypukłych.

TWIERDZENIE 1.22 ([Chen–Zhang 2000]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem ograniczonym, którego brzeg jest lokalnie wykresem pewnej funkcji ciągłej. Wtedy D jest b–zupełny.*

TWIERDZENIE 1.23 ([Jar–Pfl–Zwo 2000]). *Ograniczone pseudowypukłe obszary zbalansowane w $\mathbb{C}^n$ są b–zupełne.*(3)

Pomimo dużego zainteresowania problematyką związaną z funkcjami Bergmana, niewiele jest wyników dotyczących obszarów nieograniczonych (zob. [Chen–Zhang 2002], [Chen–Kam–Ohs 2004]). Oto niektóre z nich:

(2) Dla pseudowypukłych ograniczonych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ warunek (1.8) jest równoważny b–zupełności (zob. [Zwo 2000a]).

(3) Zbalansowane obszary pseudowypukłe, dla których funkcjonał Minkowskiego nie jest ciągły, nie są hiperwypukłe.

Twierdzenie 1.24 ([Chen–Zhang 2002]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem pseudowypukłym.*[(4)] *Jeśli zachodzi warunek:*

$$\begin{gathered}\text{dla dowolnego } w \in D \text{ istnieje } a > 0 \text{ takie, że} \\ \text{zbiór } \{z \in D : g_D(w,z) < -a\} \text{ jest relatywnie zwarty w } D,\end{gathered} \tag{1.9}$$

to D posiada metrykę Bergmana.

Jeśli, ponadto,

$$\begin{gathered}\text{dla dowolnego ciągu punktów } (z_k)_{k=1}^{\infty} \subset D, \text{ niemającego punktu skupienia w } D, \\ \text{istnieją podciąg } (z_{k_j})_{j=1}^{\infty} \text{ i liczba } a > 0 \text{ takie, że} \\ \text{dla dowolnego zbioru zwartego } K \\ \text{zachodzi } \{z \in D : g_D(z_{k_j}, z) < -a\} \subset D \setminus K, \text{ dla dostatecznie dużych } j,\end{gathered} \tag{1.10}$$

to D jest zupełny w sensie Bergmana.

Wniosek 1.25 ([Chen–Zhang 2002]). *Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. Jeśli istnieje ujemna ściśle plurisubharmoniczna funkcja wyczerpująca na D, to D jest b–zupełny.*

Twierdzenie 1.26 ([Chen–Kam–Ohs 2004]). *Niech*

$$D := \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathcal{I}m\, w > \rho(z)\},$$

gdzie ρ jest nieujemną funkcją plurisubharmoniczną na $\mathbb{C}^n$ taką, że $\lim_{|z|\to\infty} \rho(z) = +\infty$.

Wtedy $k_D > 0$ oraz D jest b–zupełny.

Na uwagę zasługuje również fakt, że zupełność w sensie Bergmana można badać lokalnie.

Twierdzenie 1.27 ([Nik 2003]). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, którego dopełnienie nie jest zbiorem polarnym.*

Jeżeli dla każdego punktu $z_0 \in \partial D$ istnieje otwarte otoczenie U takie, że każda składowa spójna zbioru $D \cap U$ jest b–zupełna, to D jest również b–zupełny.

Jeżeli D jest b–zupełny, to dla dowolnego koła Δ, zbiory $D \cap \Delta$ oraz $D \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta})$ są b–zupełne.

Powyżej zakładamy, że punkt ∞ jest punktem brzegowym dowolnego obszaru nieograniczonego.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej własności wyczerpywalności obszarów. Poza faktem, że hiperwypukłość oraz warunek (1.8) implikują wyczerpywalność w przypadku obszarów ograniczonych, mamy jeszcze jedno ogólne twierdzenie w $\mathbb{C}^n$.

Twierdzenie 1.28 ([Pfl 1975], zob. [Jar–Pfl 1993]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem pseudowypukłym. Załóżmy, że punkt $z_0 \in \partial D$ spełnia następujący „warunek zewnętrznego stożka" („outer cone condition")*

$$\begin{gathered}\text{istnieją liczby } r \in (0,1], a \geqslant 1 \text{ oraz ciąg } (w_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^n \setminus D \\ \text{takie, że } \lim_{k\to\infty} w_k = z_0 \text{ oraz } D \cap B(w_k, r\|w_k - z_0\|^a) = \varnothing.\end{gathered}$$

Wtedy D jest wyczerpywalny w punkcie z_0.

(4) Oryginalne twierdzenie jest sformułowane ogólniej — dla rozmaitości Steina.

Wyczerpywalność i b–zupełność a teoria potencjału.

Dla ograniczonych obszarów na płaszczyźnie zespolonej mamy pełną charakteryzację wyczerpywalności w języku teorii potencjału.

Wprowadźmy najpierw następującą funkcję potencjałową dla obszaru $D \subset \mathbb{C}$ (zob. [Zwo 2001] i [Pfl–Zwo 2003]):

$$\gamma_D(z) := \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^3(-\log \operatorname{cap}(\overline{\Delta}(z,\delta) \setminus D))}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.11}$$

gdzie $\operatorname{cap} B$ oznacza pojemność logarytmiczną zbioru borelowskiego $B \subset \mathbb{C}$ (zob. Dodatek).

Obserwacja 1.29. *Niech D będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}$.*

(a) *Funkcja γ_D jest ciągła na D i półciągła z dołu na $\overline{D}$. Ponadto $\gamma_D \equiv +\infty$ na $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$.*

(b) *Zachodzą następujące oszacowania:*

$$\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{2k}}{-\log \operatorname{cap}(A_k(z) \setminus D)} \leqslant \gamma_D(z) \leqslant 8\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}}{-\log \operatorname{cap}(A_k(z) \setminus D)}, \qquad z \in \overline{D},$$

gdzie

$$A_k(z) := \{w \in \mathbb{C} : \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant |w-z| \leqslant \frac{1}{2^k}\}.$$

Charakteryzacja wyczerpywalności (przedstawiona poniżej) dla pewnego typu obszarów płaskich (np. obszarów typu Zalcmana) przyjmuje prostszą postać warunku typu Wienera (por. Twierdzenie D.26 oraz Twierdzenia 1.38 i 1.39).

Twierdzenie 1.30 ([Zwo 2001]). *Niech D będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}$ i niech $z_0 \in \partial D$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) $\lim_{D \ni z \to z_0} \gamma_D(z) = +\infty$.

(b) *D jest wyczerpywalny w z_0.*

O bliskim związku funkcji γ oraz jądra Bergmana świadczy również poniższe twierdzenie, z którego, w szczególności, wynika kryterium na wyczerpywalność.

Twierdzenie 1.31 ([Pfl–Zwo 2003]). *Ustalmy $d > 1$. Istnieje stała $C > 0$ taka, że:*

(a) *Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$ takiego, że* $\operatorname{diam} D < d$ *zachodzi*

$$C\gamma_D(z) \leqslant k_D(z), \qquad z \in D.$$

(b) *Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$ takiego, że* $\frac{1}{d} < \operatorname{diam} D < d$ *zachodzi*

$$k_D(z) \leqslant C \max\{1, \gamma_D(z)(\log \gamma_D(z))^2\}, \qquad z \in D.$$

Związek wyczerpywalności z teorią potencjału (Twierdzenie 1.30) oraz charakteryzacja b–zupełnych obszarów typu Zalcmana ([Juc 2004]), uzyskana przy użyciu podobnych metod, skłaniają do podjęcia próby charakteryzacji b–zupełności dowolnego obszaru na płaszczyźnie zespolonej.

Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Zdefiniujmy funkcję

$$\widehat{\gamma}_D(z) := \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D\right)}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Dla obszaru $D \subset \mathbb{C}$, punktu $z_0 \in \overline{D}$ oraz dla krzywej $\alpha : [0,1] \to \overline{D}$ rozważmy następujący warunek:

$$\alpha : [0,1) \to D \text{ klasy } \mathcal{C}^1, \quad \alpha'(t) \neq 0, t \in [0,1), \quad \lim_{t\to 1}\alpha(t) = z_0, \quad \int_0^1 |\alpha'(t)|\,dt < +\infty. \tag{1.12}$$

W Rozdziale II udowodnimy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1.32 (Twierdzenie 2.3). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym oraz niech $z_0 \in \partial D$. Jeśli obszar D nie jest b–zupełny w punkcie z_0, to istnieje krzywa $\alpha : [0,1] \to \overline{D}$ taka, że krzywa $\alpha_{|[0,1)}$ spełnia warunek* (1.12), *oraz:*

$$\textit{istnieje stała } M > 0 \textit{ taka, że } \widehat{\gamma}_D(\alpha(t)) \leqslant M \textit{ dla każdego } t \in [0,1]. \tag{1.13}$$

Twierdzenie 1.33 (Wniosek 2.6). *Jeśli $D \subset \mathbb{C}$ jest obszarem ograniczonym takim, że $\widehat{\gamma}_D(z_0) = +\infty$ dla punktu $z_0 \in \partial D$, to D jest b–zupełny w punkcie z_0.*

W szczególności, jeśli $\widehat{\gamma}_D(z) = +\infty$ dla wszystkich $z \in \partial D$, to obszar D jest b–zupełny.

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 1.33 nie jest prawdziwe. Co więcej, z b–zupełności obszaru D w z_0 nie wynika, że $\widehat{\gamma}_D(z_0) = +\infty$, ani nawet $\lim_{D\ni z\to z_0}\widehat{\gamma}_D(z) = +\infty$ (por. kryterium na wyczerpywalność w Twierdzeniu 1.30). W Przykładzie 2.7 konstruujemy b–zupełny obszar D taki, że dla punktu $0 \in \partial D$ mamy $\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$ i $\liminf_{D\ni z\to 0}\widehat{\gamma}_D(z) < +\infty$.

Nie wiadomo, czy twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 1.32 jest prawdziwe. Jednakże, przy dodatkowym założeniu dla obszaru D i punktu z_0, można udowodnić jego słabszą wersję.

Twierdzenie 1.34 (Twierdzenie 2.8). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym oraz $z_0 \in \partial D$. Załóżmy, że istnieje krzywa α, która spełnia warunek* (1.12) *oraz dwa poniższe:*

$$\textit{istnieje stała } \theta \in (0,1] \textit{ taka, że } \operatorname{dist}(\alpha(t), \partial D) \geqslant \theta|\alpha(t) - z_0|,\ t \in [0,1), \tag{1.14}$$

$$\textit{istnieje stała } R > 0 \textit{ taka, że } \int_{\alpha^{-1}(A_j(z_0))} |\alpha'(t)|\,dt \leqslant \frac{R}{2^j},\ j \geqslant 1. \tag{1.15}$$

Wtedy, jeśli $\widehat{\gamma}_D(z_0) < +\infty$, to D nie jest b–zupełny w punkcie z_0.

Warunek (1.15) w powyższym twierdzeniu wydaje się być jedynie technicznym założeniem. Natomiast warunku (1.14) nie można zastąpić warunkiem słabszym postaci

$\operatorname{dist}(\alpha(t), \partial D) \geqslant \theta|\alpha(t) - z_0|^a$, gdzie $a > 1$ — pokazuje to Przykład 2.9. Oczywiście, nie można oczekiwać, że warunek (1.14) okaże się warunkiem koniecznym na to, aby obszar D nie był zupełny w punkcie z_0.(5) Jednakże powyższe twierdzenia pozwalają na wysunięcie pewnej hipotezy:

HIPOTEZA. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym oraz niech $z_0 \in \partial D$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *Obszar D nie jest b–zupełny w punkcie z_0.*
(b) *Istnieje krzywa $\alpha : [0, 1) \to D$ spełniająca warunki* (1.12) *i* (1.13).

Jednym z narzędzi, użytych w Twierdzeniach 1.30–1.34, jest Lemat 1.35.

Wprowadźmy najpierw kolejny obiekt związany z teorią potencjału. Dla zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}$, zdefiniujmy następującą funkcję holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus K$

$$f_K(\zeta) := \begin{cases} \displaystyle\int_K \frac{d\mu_K(\lambda)}{\zeta - \lambda}, & \text{jeśli } \operatorname{cap} K > 0 \\ 0, & \text{jeśli } \operatorname{cap} K = 0 \end{cases}, \qquad \zeta \in \mathbb{C} \setminus K, \tag{1.16}$$

gdzie μ_K jest miarą równowagi zbioru K (zob. Dodatek).

LEMAT 1.35 ([Zwo 2001] i [Pfl–Zwo 2003]). *Ustalmy liczbę $d > 1$. Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego obszaru ograniczonego $D \subset \mathbb{C}$ takiego, że $0 \in D$ oraz $\operatorname{diam} D < d$ i dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Delta(0, \frac{1}{4})$ rozłącznego z D, zachodzi nierówność*

$$\|f_K\|_D^2 \leqslant -C \log \operatorname{cap} K. \tag{1.17}$$

UWAGA 1.36. *Założenie w powyższym lemacie, że $0 \in D$ można zastąpić przez $0 \in \partial D$.*

Rzeczywiście, możemy to zrobić, ponieważ przesuwając obszar D o pewien dostatecznie mały wektor, uzyskamy $0 \in D$, a zbiór K nadal będzie zawarty w $\Delta(0, \frac{1}{4})$. Natomiast na samą nierówność (1.17) z tezy translacja nie ma żadnego wpływu.

Obszary typu Zalcmana.

DEFINICJA 1.37. *Obszarami typu (L) w sensie Zalcmana* lub, krócej, *obszarami typu Zalcmana* albo *obszarami typu (L)* będziemy nazywać obszary postaci:

$$D := \Delta(0, 1) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta}(x_k, r_k) \cup \{0\} \right),$$

gdzie $x_k > x_{k+1} > 0$, $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$, $\overline{\Delta}(x_k, r_k) \subset \Delta(0, 1)$ oraz $\overline{\Delta}(x_k, r_k) \cap \overline{\Delta}(x_l, r_l) = \varnothing$, dla $k, l \geqslant 1, k \neq l$.

Obszary te były badane w kontekście zupełności w sensie Bergmana (zob. [Ohs 1993], [Chen 1999], [Chen 2001]). Pflug ([Pfl 2000]) postawił pytanie:

Które obszary typu (L), spełniające warunek $x_k = \frac{1}{2^k}$ są b–zupełne?

W Rozdziale III odpowiadamy na to pytanie, podając następujące ogólne charakteryzacje b–zupełności i wyczerpywalności obszarów typu (L).

(5) Jeżeli usuniemy z obszaru D pewien zbiór polarny P (np. przeliczalny zbiór gęsty), to nie wpłynie to na b–zupełność w punkcie z_0, ponieważ $k_D(z) = k_{D\setminus P}(z), z \in D \setminus P$. Funkcje całkowalne z kwadratem przedłużają się przez zbiory polarne (zob. [Pfl–Zwo 2002]).

Twierdzenie 1.38 (Wniosek 3.3). *Niech D będzie obszarem typu (L). Wtedy:*

(a) *D jest wyczerpywalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\gamma_D(0) = +\infty.$$

(b) *D jest b–zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\widehat{\gamma}_D(0) = +\infty.$$

Twierdzenie 1.39 (Twierdzenie 3.7, por. również [Juc 2004]). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem typu (L) spełniającym następujący warunek:*

$$\textit{istnieje liczba } \ \Theta \in (0,1) \ \ \textit{taka, że} \ \ \frac{x_{k+1}}{x_k} \leqslant \Theta \ \ \textit{dla każdego} \ \ k \geqslant 1.$$

Wtedy:

(a) *D jest wyczerpywalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{x_k^2 \log r_k} = +\infty.$$

(b) *D jest b–zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k \sqrt{-\log r_k}} = +\infty.$$

(c) *Jeśli ponadto istnieje $\Theta' > 0$ takie, że $\Theta' \leqslant \frac{x_{k+1}}{x_k}, (k \geqslant 1)$, to D jest hiperwypukły wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log x_k}{\log r_k} = +\infty.$$

1.3. Pseudowypukłe obszary Reinhardta

Definicja 1.40. *Obszarem Reinhardta* nazywamy obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ taki, że dla dowolnego $z \in D, \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ zachodzi $(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) \in D$.

Dla punktu $z \in \mathbb{C}_*^n$, oznaczmy $\log|z| := (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\log D := \{\log|z| : z \in D \cap \mathbb{C}_*^n\}$.

Z definicji obszarów Reinhardta wynika, że odwzorowanie

$$\{\text{obszary Reinhardta w } \mathbb{C}^n\} \ni D \mapsto \log D \in \{\text{obszary w } \mathbb{R}^n\}$$

jest bijekcją.

Oznaczmy dodatkowo

$$V_j := \{z \in \mathbb{C}^n : z_j = 0\}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Pseudowypukłe obszary Reinhardta scharakteryzowane są w następujący sposób:

Twierdzenie 1.41 (zob. [Vla 1966], [Jak–Jar 1998]). *Obszar Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$ jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy* $\log D$ *jest wypukły oraz dla dowolnego* $j = 1, \dots, n$ *i* $\lambda \in \overline{\Delta}(0,1)$

$$\textit{jeśli}\ \ D \cap V_j \neq \varnothing \ \ \textit{i}\ \ (z', z_j, z'') \in D, \quad \textit{to}\ \ (z', \lambda z_j, z'') \in D.$$

Dodatkowo mamy następujące twierdzenie dotyczące hiperwypukłości:

Twierdzenie 1.42 ([Zwo 2000b], [Zwo 2000a], por. [Car–Ceg–Wik 1999]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *D jest ograniczony oraz dla każdego $j = 1, \dots, n$*

$$\textit{jeśli}\ \ \overline{D} \cap V_j \neq \varnothing, \quad \textit{to}\ \ D \cap V_j \neq \varnothing.$$

(b) *D jest hiperwypukły.*

Dla wypukłego zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz punktu $a \in \Omega$ zdefiniujmy

$$\mathfrak{C}(\Omega, a) := \{v \in \mathbb{R}^n : a + \mathbb{R}_+ v \subset \Omega\}.$$

Wiadomo, że zbiór $\mathfrak{C}(\Omega, a)$ jest domkniętym stożkiem wypukłym o wierzchołku w punkcie $0 \in \mathbb{R}^n$. Ponadto, jego definicja nie zależy od wyboru punktu $a \in \Omega$.

Podobnie, dla dowolnego pseudowypukłego obszaru Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$ zdefiniujmy stożki:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}(D) &:= \{v \in \mathbb{R}^n : a + \mathbb{R}_+ v \subset \log D\}, \\
\widetilde{\mathfrak{C}}(D) &:= \{v \in \mathbb{R}^n : \text{istnieje } \lim_{t \to +\infty} \exp(a + tv) \in D\}, \\
\mathfrak{C}'(D) &:= \mathfrak{C}(D) \setminus \widetilde{\mathfrak{C}}(D).
\end{aligned}$$

Definicje nie zależą od punktu $a \in \log D$, ponieważ, zgodnie z Twierdzeniem 1.41, $\log D$ jest wypukły.

Możemy teraz sformułować twierdzenie — charakteryzację ograniczonych b–zupełnych obszarów Reinhardta.

Twierdzenie 1.43 ([Zwo 1999a], [Zwo 2000a]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *D jest b–zupełny.*
(b) $\mathfrak{C}'(D) \cap \mathbb{Q}^n = \varnothing$.

W Rozdziale IV udowodnimy analogon tego twierdzenia dla nieograniczonych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$.

Twierdzenie 1.44 (Twierdzenie 4.1). *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta (niekoniecznie ograniczonym) takim, że* $\log D$ *nie zawiera linii prostych. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *D jest b–zupełny.*
(b) $\mathfrak{C}'(D) \cap \mathbb{Q}^2 = \varnothing$.

Będziemy potrzebować kilku faktów, dotyczących przestrzeni funkcji holomorficznych całkowalnych z kwadratem.

Dla obszaru Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$ zdefiniujmy:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(D) := \{z^\alpha \in L^2_h(D) : \alpha \in \mathbb{Z}^n\},$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(D) := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : z^\alpha \in L^2_h(D)\},$$
$$J(D) := \{j \in \{1, \ldots, n\} : V_j \cap D \neq \varnothing\}.$$

Obserwacja 1.45. *Dla pseudowypukłego obszaru Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$, przestrzeń* $\operatorname{Span}\mathcal{E}(D)$*, czyli najmniejsza podprzestrzeń liniowa, zawierająca zbiór $\mathcal{E}(D)$, jest gęsta w $L^2_h(D)$.*

Lemat 1.46 ([Zwo 1999a], [Zwo 2000a]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta oraz niech $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Wtedy*

$$z^\alpha \in L^2_h(D) \iff \forall\, v \in \mathfrak{C}(D) \setminus \{0\} : \langle \alpha + \mathbf{1}, v\rangle < 0.$$

Z powyższego lematu wynika, że jeśli obszar $\log D \subset \mathbb{R}^n$ zawiera linię prostą, to przestrzeń $L^2_h(D)$ jest trywialna. Przekonamy się, że jest to warunek równoważny.

Lemat 1.47 ([Jar–Pfl 1985]). *Niech C będzie otwartym stożkiem w $\mathbb{R}^n$ niezawierającym linii prostych. Wtedy istnieje niepusty otwarty zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ taki, że dla dowolnego $u \in U$*

$$C \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle < 0\}.$$

Z Obserwacji 1.45 oraz z Lematu 1.46 i Lematu 1.47 można wyciągnąć natychmiastowy wniosek:

Obserwacja 1.48. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Zbiór $\log D$ zawiera linię prostą wtedy i tylko wtedy, gdy $L^2_h(D) = \{0\}$.*

W szczególności, jeśli $\log D$ nie zawiera żadnej linii prostej, to zbiory $\mathcal{E}(D)$ i $\mathcal{A}(D)$ są niepuste.

Wprowadźmy rodzinę specjalnych odwzorowań algebraicznych w $\mathbb{C}^n$.

Dla $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ i dla $z \in \mathbb{C}^n$ takich, że $z_j \neq 0$, gdy $\alpha_j < 0$, zdefiniujmy

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}.$$

Dla $A = [A^j_k]_{j,k=1,\ldots,n} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, zdefiniujmy odwzorowanie:

$$\Phi_A(z) := (z^{A^1}, \ldots, z^{A^n}),$$

gdzie $z \in \mathbb{C}^n$ jest takie, że z^{A^j} jest dobrze określone dla $j = 1, \ldots, n$ (A^j oznacza tu j–ty wiersz macierzy A).

Obserwacja 1.49 ([Zwo 2000a]). *Niech $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Odwzorowanie $\Phi_A : \mathbb{C}^n_* \to \mathbb{C}^n_*$ jest biholomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $|\det A| = 1$.*

Będą nas interesować tylko te odwzorowania algebraiczne, które spełniają warunek $|\det A| = 1$ lub równoważny:

$$A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}, \quad \text{oraz} \quad \det A \neq 0.$$

Takie odwzorowania tworzą grupę ze względu na składanie.

Przypomnijmy definicję *pseudoodległości Carathéodory'ego* (zob. [Jar–Pfl 1993]).

DEFINICJA 1.50. Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ oraz punktów $z, w \in D$, niech

$$c_D(z,w) := \sup\{p(f(z), f(w)) : f \in \mathcal{O}(D, \Delta(0,1))\},$$

gdzie

$$p(\mu,\nu) := \tanh^{-1}\left|\frac{\mu-\nu}{1-\mu\overline{\nu}}\right|, \qquad \mu,\nu \in \Delta(0,1),$$

jest odległością Poincarégo.

Mówimy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ jest *c–hiperboliczny*, jeśli $c_D(z,w) > 0$ dla $z \neq w, z, w \in D$.

Podamy teraz charakteryzację c–hiperbolicznych obszarów Reinhardta.

TWIERDZENIE 1.51 (por. [Zwo 2000a]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *D jest c–hiperboliczny.*
(b) *Każde odwzorowanie holomorficzne $F : \mathbb{C} \to D$ jest stałe.*
(c) $\log D$ *nie zawiera linii prostych,*
$D \cap V_j$ jest albo pusty albo c–hiperboliczny (rozpatrywany jako obszar w $\mathbb{C}^{n-1}$).
(d) *D jest algebraicznie biholomorficzny z ograniczonym obszarem Reinhardta (tzn. istnieje $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}, |\det A| = 1$, takie, że $\Phi_A(D)$ jest ograniczony oraz $\Phi_A\big|_D$ jest biholomorfizmem na obraz).*

Z powyższej charakteryzacji oraz z Twierdzenia 1.43 wynika następujące

TWIERDZENIE 1.52 (TWIERDZENIE 4.2). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym c–hiperbolicznym obszarem Reinhardta. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *D jest b–zupełny.*
(b) $\mathfrak{C}'(D) \cap \mathbb{Q}^n = \varnothing$.

ROZDZIAŁ II

ZUPEŁNOŚĆ OBSZARÓW W $\mathbb{C}$

Dotychczasowe wyniki badań w zakresie funkcji Bergmana i zupełności w sensie Bergmana dowodzą ścisłego związku tych pojęć z teorią potencjału na płaszczyźnie zespolonej i teorią pluripotencjału w $\mathbb{C}^n$. Wspomnijmy tu jedynie najbardziej ogólne rezultaty — hiperwypukłość implikuje zarówno wyczerpywalność (Twierdzenie 1.14) jak i b–zupełność (Twierdzenie 1.21) w klasie ograniczonych obszarów w $\mathbb{C}^n$, a na płaszczyźnie zespolonej istnieje pełna charakteryzacja wyczerpywalności za pomocą kryterium typu Wienera (Twierdzenie 1.30). Bardziej szczegółowa lista wyników znajduje się w Rozdziale I.

Dzięki szacowaniom wywodzącym się z teorii potencjału (uzyskanym przy użyciu metod podobnych do tych z pracy [Zwo 2002]), udało się odpowiedzieć na pytanie Pfluga, dotyczące klasyfikacji b–zupełnych obszarów typu Zalcmana oraz podać inny kontrprzykład do hipotezy Kobayashiego ([Juc 2004]). W naturalny sposób pojawiło się zatem pytanie o całkowite rozwiązanie problemu charakteryzacji płaskich obszarów b–zupełnych. Udało się nam uogólnić rezultaty z pracy [Juc 2004] — przedstawiamy poniżej pewne warunki wystarczające (Twierdzenie 2.3, Wniosek 2.6) i konieczne (Twierdzenie 2.8) na b–zupełność obszaru ograniczonego w jego punkcie brzegowym. Niestety, do tej pory nie udało się znaleźć warunku równoważnego. Jednak wspomniane wyniki częściowe oraz inne rezultaty zebrane w tym rozdziale, przyczyniają się do zrozumienia problemu i pozwalają na sformułowanie pewnej hipotezy (Hipoteza 2.10).

Wprowadźmy najpierw funkcję potencjałową określoną na $\mathbb{C}$, która będzie odgrywać istotną rolę w dalszych rozważaniach.

Definicja 2.1. Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Zdefiniujmy:

$$\widehat{\gamma}_D(z) := \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D\right)}}, \qquad z\in\mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Funkcja $\widehat{\gamma}_D$ jest modyfikacją funkcji γ_D (zob. (1.11)) wprowadzonej w [Zwo 2002]. Posiada też podobne własności (por. Obserwacja 1.29).

Obserwacja 2.2. *Niech $D\subset\mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym. Wtedy:*

(a) $\widehat{\gamma}_D(z) < +\infty$ *dla* $z\in D$ *oraz* $\widehat{\gamma}_D(z) = +\infty$ *dla* $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}$.
(b) *Funkcja* $\widehat{\gamma}_D$ *jest półciągła z dołu na* $\mathbb{C}$ *i ciągła na* D.
(c) *Zachodzą następujące oszacowania dla* $z\in\overline{D}$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{2^j}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(A_j(z)\setminus D\right)}} \leqslant \widehat{\gamma}_D(z) \leqslant 4\sum_{j=2}^{\infty}\frac{2^j}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(A_j(z)\setminus D\right)}}, \tag{2.2}$$

gdzie

$$A_j(z) := \{w \in \mathbb{C} : \frac{1}{2^{j+1}} \leqslant |w - z| \leqslant \frac{1}{2^j}\}.$$

(d) *Jeżeli* $\widehat{\gamma}_D(z) < +\infty$*, to również* $\gamma_D(z) < +\infty$*.*

(e) *Jeżeli* $r > 1$*, to dla* $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{r}\widehat{\gamma}_D(z) - f(z) \leqslant \widehat{\gamma}_{rD}(rz) \leqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\log 4r}{\log 4}}\,\widehat{\gamma}_D(z), \tag{2.3}$$

gdzie f *jest nieujemną i ciągłą funkcją na* $\mathbb{C}$*.*

(f) *Jeżeli* $G \subset \mathbb{C}$ *jest obszarem ograniczonym takim, że* $D \subset G$*, to* $\widehat{\gamma}_D(z) \geqslant \widehat{\gamma}_G(z)$ *dla* $z \in \mathbb{C}$*.*

Niech D będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}$ oraz niech $z_0 \in \overline{D}$. Rozważmy następujący warunek dla krzywej $\alpha: [0,1] \to \overline{D}$:

$$\alpha: [0,1) \to D \text{ klasy } \mathcal{C}^1, \quad \alpha'(t) \neq 0, t \in [0,1), \quad \lim_{t\to 1} \alpha(t) = z_0, \quad \int_0^1 |\alpha'(t)|\, dt < +\infty. \tag{2.4}$$

Krzywą o skończonej długości, której pochodna się nie zeruje, można sparametryzować w taki sposób, żeby moduł pochodnej nowej parametryzacji był stały[(6)]. W związku z tym warunek (2.4) dla krzywej α jest równoważny warunkowi poniższemu:

$$\alpha: [0,1) \to D \text{ klasy } \mathcal{C}^1, \quad \lim_{t\to 1} \alpha(t) = z_0, \quad \exists\, A > 0: |\alpha'(t)| = A, t \in [0,1). \tag{2.4'}$$

Dodajmy, że stała A powyżej jest równa długości krzywej α.

Jednym z dwóch głównych rezultatów, wiążących teorię potencjału z zupełnością w sensie Bergmana, jest poniższe twierdzenie. Jest ono uogólnieniem wyniku z [Juc 2004] i uzasadnia wprowadzenie funkcji $\widehat{\gamma}_D$.

TWIERDZENIE 2.3. *Niech* $D \subset \mathbb{C}$ *będzie obszarem ograniczonym oraz niech* $z_0 \in \partial D$*. Jeśli obszar* D *nie jest b–zupełny w punkcie* z_0*, to istnieje krzywa* $\alpha: [0,1] \to \overline{D}$ *taka, że krzywa* $\alpha\big|_{[0,1)}$ *spełnia warunek* (2.4)*, oraz:*

$$\textit{istnieje stała } M > 0 \textit{ taka, że } \widehat{\gamma}_D(\alpha(t)) \leqslant M \textit{ dla każdego } t \in [0,1]. \tag{2.5}$$

Główną rolę w dowodzie powyższego twierdzenia odgrywają Twierdzenie 2.4 i techniczny Lemat 2.5. Twierdzenie 2.4, które wykorzystamy wielokrotnie w innych częściach tego rozdziału, zasługuje na wyróżnienie jako odrębny wynik.

TWIERDZENIE 2.4. *Niech* $D \subset \mathbb{C}$ *będzie obszarem ograniczonym takim, że* $z_0 \in \partial D$*. Jeżeli* D *nie jest b–zupełny w* z_0*, to istnieje krzywa* α*, spełniająca warunek* (2.4)*, o skończonej długości względem metryki Bergmana i taka, że jądro Bergmana jest ograniczone na* $\alpha([0,1))$*.*

[(6)] Jeżeli moduł pochodnej parametryzacji jest stale równy 1, to jest to tzw. parametryzacja normalna.

Lemat 2.5. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem takim, że $\Delta(0, \frac{1}{2}) \setminus \Delta(0, \frac{1}{2^9}) \subset D \subset \Delta(0,1)$, $0 \in \overline{D}$ oraz krzywa $\alpha: \ [0,1) \to D$ spełnia warunek* (2.4') *dla punktu 0. Załóżmy, że istnieje stała $T > 0$ taka, że*

$$\sup_{k \geqslant 1} \frac{2^{2k}}{-\log \operatorname{cap}(A_k(0) \setminus D)} \leqslant T. \tag{2.6}$$

Wtedy

$$\int_0^1 M_D\big(\alpha(t); \alpha'(t)\big)\, dt \geqslant \widetilde{T}\, \widehat{\gamma}_D(0), \tag{2.7}$$

gdzie stała $\widetilde{T} > 0$ zależy jedynie od T oraz od średnicy obszaru D.

Bezpośrednio z Twierdzenia 2.3 możemy wyciągnąć wniosek, z którego będziemy korzystać w następnym rozdziale.

Wniosek 2.6. *Jeśli $D \subset \mathbb{C}$ jest obszarem ograniczonym takim, że $\widehat{\gamma}_D(z_0) = +\infty$ dla punktu $z_0 \in \partial D$, to D jest b–zupełny w punkcie z_0.*

W szczególności, jeśli $\widehat{\gamma}_D(z) = +\infty$ dla wszystkich $z \in \partial D$, to obszar D jest b–zupełny.

Warunek $\widehat{\gamma}_D(z_0) = +\infty$ nie jest warunkiem koniecznym dla b–zupełności obszaru D w punkcie $z_0 \in \partial D$. W Przykładzie 2.7 konstruujemy obszar zupełny w sensie Bergmana, dla którego ten warunek nie zachodzi w pewnym punkcie brzegowym.

Przez analogię do Twierdzenia 1.30, można wysunąć przypuszczenie, że b–zupełność w punkcie z_0 jest równoważna temu, że $\lim_{D \ni z \to z_0} \widehat{\gamma}_D(z) = +\infty$. Jednakże obszar z poniższego przykładu wyklucza również taką możliwość.

Przykład 2.7. *Niech D będzie obszarem określonym w następujący sposób:*

$$D := \Delta(0,1) \setminus \Big(\bigcup_{j=2}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^j - 1} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j) \cup \{0\} \Big),$$

gdzie $x_{j,k} := \frac{1}{2^j} e^{i \frac{2\pi k}{2^j}}$, dla $k = 0, \dots, 2^j - 1$, oraz $r_j > 0$ są takie, że $-\log r_j = 2^{3j} j^4$.

Tak zdefiniowany obszar D jest b–zupełny, jednakże zachodzi $\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$ oraz $\liminf_{D \ni z \to 0} \widehat{\gamma}_D(z) < +\infty$.

W szczególności, D nie jest wyczerpywalny (w zerze).

Nie wiadomo, czy twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 2.3 jest prawdziwe. Jednakże, przy dodatkowym założeniu dla obszaru D i punktu z_0, można udowodnić jego słabszą wersję.

Twierdzenie 2.8. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym oraz $z_0 \in \partial D$. Załóżmy, że istnieje krzywa α, która spełnia warunek* (2.4) *oraz dwa poniższe:*

$$\textit{istnieje stała } \theta \in (0,1] \textit{ taka, że } \operatorname{dist}(\alpha(t), \partial D) \geqslant \theta |\alpha(t) - z_0|, \ t \in [0,1), \tag{2.8}$$

$$\textit{istnieje stała } R > 0 \textit{ taka, że } \int_{\alpha^{-1}(A_j(z_0))} |\alpha'(t)|\, dt \leqslant \frac{R}{2^j}, \ j \geqslant 1. \tag{2.9}$$

Wtedy, jeśli $\widehat{\gamma}_D(z_0) < +\infty$, to D nie jest b–zupełny w punkcie z_0.

Zwróćmy uwagę, że założenia Twierdzenia 2.8 dotyczące krzywej α są spełnione dla punktu $z_0 \in \partial D$, jeśli można wpisać w obszar D pewien kąt o wierzchołku w z_0. W szczególności, zachodzi to np. dla obszarów typu Zalcmana (zob. Rozdział III).

Warunek (2.9) w założeniu twierdzenia jest, zdaniem autora, czysto techniczny. Natomiast warunku (2.8) nie można zastąpić warunkiem słabszym $\operatorname{dist}(\alpha(t), \partial D) \geqslant \theta|\alpha(t) - z_0|^a$, gdzie $a > 1$ — pokazuje to Przykład 2.9.

PRZYKŁAD 2.9. *Niech $a \in (1,2)$ oraz $R > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Wybierzmy $p, q \in \mathbb{N}$ takie, że $1 + \frac{p}{q} < a$. Zdefiniujmy obszar D w następujący sposób:*

$$D := D_1 \cup D_{R,a},$$

gdzie

$$D_{R,a} := \{z \in \Delta(0,1) : \mathcal{R}e\, z > 0, |\mathcal{I}m\, z| < R(\mathcal{R}e\, z)^a\}$$

oraz

$$D_1 := \Delta(0,1) \setminus \left(\bigcup_{j=2}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^{pj}-1} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j) \cup \{0\} \right),$$

przy czym $x_{j,k} := \frac{1}{2^{qj}} e^{i\frac{2\pi k}{2^{pj}}}$, dla $k = 0, \ldots, 2^{pj} - 1$, i $r_j > 0$ są takie, że $-\log r_j = 2^{(2q+p)j} j^4$.

Wtedy:

- *krzywa $\alpha(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t, t \in [0,1)$, spełnia warunki (2.4') i (2.9) oraz istnieje $t_0 \in (0,1)$ takie, że*

$$\operatorname{dist}(\alpha(t), \partial D) \geqslant \frac{R}{2}|\alpha(t)|^a, \qquad \text{dla } t > t_0;$$

- *$\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$;*
- *D jest b–zupełny.*

Powyższe wyniki skłaniają do wysunięcia pewnej hipotezy, która może charakteryzować b–zupełność.

HIPOTEZA 2.10. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym oraz niech $z_0 \in \partial D$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *Obszar D nie jest b–zupełny w punkcie z_0.*
(b) *Istnieje krzywa $\alpha : [0,1) \to D$ spełniająca warunki (2.4) i (2.5).*

2.1. Dowody twierdzeń

DOWÓD OBSERWACJI 2.2. Dowód nie odbiega zasadniczo w szczegółach od dowodu Obserwacji 1.29 (por. [Zwo 2002], [Pfl–Zwo 2003]).

(a). Jeżeli $z \in D$, to $\overline{\Delta}(z, \varepsilon) \subset D$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Wtedy $-\log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta) \setminus D\right) = +\infty$ dla $0 < \delta < \varepsilon$ i $\widehat{\gamma}_D(z) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^2 \sqrt{-\log \operatorname{cap}(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D)}} < +\infty$.

Jeżeli natomiast $z \notin \overline{D}$, to $D \cap \overline{\Delta}(z,\varepsilon) = \varnothing$ dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ i, dzięki Twierdzeniu D.23(f), $\widehat{\gamma}_D(z) \geqslant \int_0^\varepsilon \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log\delta}} = +\infty$.

(b). Ustalmy punkt $w \in \mathbb{C}$ oraz liczbę $t > 0$ taką, że $\widehat{\gamma}_D(w) > t$. Istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że $\int_{\delta_0}^{\frac14} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log\operatorname{cap}(\overline{\Delta}(w,\delta)\setminus D)}} > t$.

Dla punktu $z \in \mathbb{C}$ takiego, że $0 < |w-z| < \delta < \frac14$ zachodzi nierówność (dzięki Twierdzeniu D.23(d))

$$\frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(w,\delta)\setminus D\right)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D\right)}} + \frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(w,\delta)\setminus\overline{\Delta}(z,\delta)\right)}},$$

a po scałkowaniu mamy

$$t < \widehat{\gamma}_D(z) + \int_{\delta_0}^{\frac14} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(w,\delta)\setminus\overline{\Delta}(z,\delta)\right)}}.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki oraz z dowolności t wynika, że $\liminf_{z\to w}\widehat{\gamma}_D(z) \geqslant \widehat{\gamma}_D(w)$.

Jeżeli $z, w \in D$, to w analogiczny sposób otrzymujemy oszacowanie

$$|\widehat{\gamma}_D(w) - \widehat{\gamma}_D(z)| \leqslant \int_\varepsilon^{\frac14} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(w,\delta)\setminus\overline{\Delta}(z,\delta)\right)}} + \int_\varepsilon^{\frac14} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus\overline{\Delta}(w,\delta)\right)}},$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest taką liczbą, że $\overline{\Delta}(z,\varepsilon) \cup \overline{\Delta}(w,\varepsilon) \subset D$. Stosując ponownie twierdzenie Lebesgue'a dostajemy, że $\lim_{z\to w}\widehat{\gamma}_D(z) = \widehat{\gamma}_D(w)$.

(c). Weźmy $z \in \overline{D}$. Korzystając z Twierdzenia D.23(d) oraz z subaddytywności funkcji $x \mapsto \sqrt{x}, x \geqslant 0$, dostajemy

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_D(z) &= \sum_{k=2}^\infty \int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D\right)}} \leqslant \sum_{k=2}^\infty 2^{k+1}\frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\frac{1}{2^k})\setminus D\right)}} \\
&\leqslant \sum_{k=2}^\infty 2^{k+1}\sum_{j=k}^\infty \frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(A_j(z)\setminus D\right)}} = \sum_{j=2}^\infty\sum_{k=2}^j 2^{k+1}\frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(A_j(z)\setminus D\right)}} \\
&\leqslant 4\sum_{j=2}^\infty \frac{2^j}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(A_j(z)\setminus D\right)}}.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony, mamy

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_D(z) &= \sum_{j=2}^\infty \int_{\frac{1}{2^{j+1}}}^{\frac{1}{2^j}} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D\right)}} \geqslant \sum_{j=2}^\infty 2^{j-1}\frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(A_{j+1}(z)\setminus D\right)}} \\
&= \frac14\sum_{j=3}^\infty \frac{2^j}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\left(A_j(z)\setminus D\right)}}.
\end{aligned}$$

(d). Własność ta wynika z nierówności w punkcie (c), Obserwacji 1.29(b) oraz własności szeregów.

(e). Ustalmy $r > 1$ oraz $z \in \mathbb{C}$. Dokonamy zmiany zmiennych ($\delta \rightsquigarrow r\delta$) w całce poniżej:

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_{rD}(rz) &= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^2 \sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(rz,\delta) \setminus rD\right)}} \\ &= \frac{1}{r} \int_0^{\frac{1}{4r}} \frac{d\delta}{\delta^2 \sqrt{-\log r - \log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta) \setminus D\right)}}. \end{aligned}$$

Wynika stąd lewa nierówność we wzorze (2.3). Funkcję f definiujemy w następujący sposób

$$f(z) := \frac{1}{r} \int_{\frac{1}{4r}}^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^2 \sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta) \setminus D\right)}},$$

a jej ciągłości dowodzimy postępując podobnie jak w punkcie (b).

Aby udowodnić prawą nierówność, wystarczy zauważyć, że dla $\delta \in (0, \frac{1}{4r})$

$$\frac{-\log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta) \setminus D\right)}{-\log r - \log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta) \setminus D\right)} \leqslant \frac{\log 4r}{\log 4}.$$

Rzeczywiście, mamy $-\log \operatorname{cap}\left(\overline{\Delta}(z,\delta) \setminus D\right) \geqslant \log 4r$, a funkcja $x \mapsto \frac{x}{-\log r + x}$, $x \geqslant \log 4r$, jest malejąca.

(f). Własność ta wynika z monotoniczności pojemności logarytmicznej (Twierdzenie D.23(a)) oraz z monotoniczności funkcji $x \mapsto \frac{1}{-\log x}$, $x \geqslant 0$. $\square$

Dowód Twierdzenia 2.3. Bez straty ogólności możemy założyć, że $z_0 = 0$ oraz $\Delta(0, \frac{3}{4}) \setminus \overline{\Delta}(0, \frac{1}{2^{10}}) \subset D \subset \Delta(0, \frac{3}{4})$. Z wyjściowym zbiorem D postępujemy kolejno w następujący sposób: przesuwamy o wektor $-z_0$; jeżeli $d_D := \sup_{z \in D} |z| < \frac{1}{2^{10}}$, to przekształcamy go przez homotetię $z \mapsto rz$, gdzie $r > \frac{1}{d_D 2^{10}} > 1$; bierzemy sumę z $\Delta(0, \frac{3}{4}) \setminus \overline{\Delta}(0, \frac{1}{2^{10}})$ i część wspólną z $\Delta(0, \frac{3}{4})$. Powyższe przekształcenia nie wpływają na zupełność obszaru D (Obserwacja 1.2(f) i Twierdzenie 1.27) oraz zachowują ograniczoność funkcji $\widehat{\gamma}_D$ (Obserwacja 2.2(e)).

Z Twierdzenia 2.4 wynika istnienie krzywej α o skończonej długości względem metryki Bergmana, spełniającej warunek (2.4') (równoważny warunkowi (2.4)), wzdłuż której jądro Bergmana k_D jest ograniczone od góry przez pewną uniwersalną stałą. Twierdzenie 1.31(a) i Obserwacja 1.29(a),(b) implikują istnienie stałej $T > 0$ takiej, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{2j}}{-\log \operatorname{cap}\left(A_j(\alpha(t)) \setminus D\right)} \leqslant T, \qquad t \in [0,1]. \tag{2.10}$$

Przypuśćmy, że funkcja $\widehat{\gamma}_D$ nie jest ograniczona na obrazie krzywej α. Wtedy istnieje rosnący ciąg punktów $(t_k)_{k=10}^{\infty} \subset [0,1]$ taki, że $\alpha(t_k) \in \Delta(0, \frac{1}{2^k})$ i $\widehat{\gamma}_D(\alpha(t_k)) > k$. Dla każdego punktu $\alpha(t_k)$ spełnione są założenia Lematu 2.5 z krzywą $\widetilde{\alpha}(s) := \alpha(st_k), s \in [0,1)$. Rzeczywiście, po przesunięciu obszaru D o wektor $-\alpha(t_k)$ mamy

$\Delta(0,\frac{1}{2})\setminus\Delta(0,\frac{1}{2^9})\subset D\subset\Delta(0,1)$, a warunek (2.10) gwarantuje, że zachodzi nierówność (2.6) z tą samą stałą T.

Z tezy Lematu 2.5 wynika, że

$$\int_0^{t_k} M_D\big(\alpha(t);\alpha'(t)\big)\,dt=\int_0^1 M_D\big(\widetilde{\alpha}(s);\widetilde{\alpha}'(s)\big)\,ds\geqslant\widetilde{T}\,\widehat{\gamma}_D(\alpha(t_k)),\qquad k\geqslant 10,$$

gdzie stała $\widetilde{T}>0$ nie zależy od k. Mamy zatem

$$\int_0^1 M_D\big(\alpha(t);\alpha'(t)\big)\,dt\geqslant\lim_{k\to\infty}\widetilde{T}k=+\infty,$$

co wobec Obserwacji 1.2(e) oznacza, że

$$L_{\beta_D}(\alpha)=\int_0^1\beta_D\big(\alpha(t);\alpha'(t)\big)\,dt=+\infty.$$

Jest to sprzeczne z założeniem o α, więc $\widehat{\gamma}_D$ musi być ograniczona od góry na $\alpha([0,1))$ przez pewną stałą $M>0$. Z półciągłości funkcji $\widehat{\gamma}_D$ (Obserwacja 2.1(b)) wynika, że również $\widehat{\gamma}_D(0)\leqslant M$. $\square$

Dowód Twierdzenia 2.4.

Krok 1. Istnieje krzywa $\alpha:\ [0,1)\to D$ klasy $\mathcal{C}^1$ spełniająca warunek (2.4) oraz taka, że $L_{\beta_D}(\alpha)<+\infty$.

Z założenia twierdzenia wynika, że istnieje b_D–ciąg Cauchy'ego $(z_k)_{k=1}^{\infty}\subset D$ zbieżny do punktu z_0. Z tego ciągu wybieramy podciąg (będziemy numerować go tymi samymi indeksami) taki, że $b_D(z_k,z_{k+1})<\frac{1}{2^{k+1}}$. Następnie każdą parę punktów z_k,z_{k+1} łączymy krzywą o długości względem metryki Bergmana nieprzekraczającej $\frac{1}{2^k}$. Po „sklejeniu" wszystkich kawałków dostajemy krzywą (oznaczmy ją $\alpha:\ [0,1)\to D$) o skończonej długości w sensie Bergmana, która nie jest klasy $\mathcal{C}^1$ co najwyżej w punktach $\alpha^{-1}(z_k)$. Możemy jednak ją wygładzić, zachowując skończoność jej długości, ponieważ metryka i odległość Bergmana są ciągłe (Obserwacja 1.2(c),(d)).

Ze względu na fakt, że dla obszarów ograniczonych odległość euklidesowa jest ograniczona od góry przez odległość Bergmana pomnożoną przez pewną stałą (zob. Obserwacja 1.2(j)), krzywa α ma skończoną długość (w zwykłym sensie).

Krok 2. Jądro Bergmana k_D jest ograniczone na $\alpha([0,1))$.

Przypuśćmy, że jądro Bergmana k_D nie jest ograniczone na tej krzywej. Wtedy istnieje ciąg $(w_k)_{k=1}^{\infty}\subset\alpha([0,1))$ taki, że $\lim_{k\to\infty}w_k=z_0$ oraz $\lim_{k\to+\infty}k_D(w_k)=+\infty$. Ciąg $(w_k)_{k=1}$ jest również b_D–ciągiem Cauchy'ego, ponieważ krzywa α ma skończoną długość względem β_D. Dzięki Twierdzeniu 1.11 (por. [Pfl 1982], [Chen 1999]) istnieje podciąg $(w_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ oraz funkcja $f\in L_h^2(D)$ takie, że

$$\frac{|f(w_{k_j})|}{\sqrt{k_D(w_{k_j})}}\to 1,\quad j\to\infty.$$

Przestrzeń funkcji z $L_h^2(D)$ ograniczonych w otoczeniu z_0 jest gęsta w $L_h^2(D)$ (Twierdzenie 1.17). Dlatego istnieje funkcja $g\in L_h^2(D)$ taka, że $\limsup_{D\ni z\to z_0}|g(z)|<\infty$ oraz

$\|g - f\|_D \leqslant \frac{1}{2}$. Korzystając z ogólnych własności jądra Bergmana (Obserwacja 1.1), dostajemy

$$\frac{|g(w_{k_j})|}{\sqrt{k_D(w_{k_j})}} \geqslant \frac{|f(w_{k_j})|}{\sqrt{k_D(w_{k_j})}} - \|f - g\|_D \geqslant \frac{|f(w_{k_j})|}{\sqrt{k_D(w_{k_j})}} - \frac{1}{2}.$$

Po przejściu z j do nieskończoności otrzymujemy żądaną sprzeczność, co kończy dowód. $\square$

Dowód Lematu 2.5. Bez straty ogólności możemy założyć, że $|\alpha(0)| < \frac{1}{2}$. Zdefiniujmy następujące zbiory:

$$B_m := \left\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in \left[\frac{2\pi}{16}(m-1), \frac{2\pi}{16}m\right]\right\}, \qquad \text{dla } \ m = 1 \ldots, 16.$$

Następnie, dla każdego $j \geqslant 1$, oznaczmy przez K_j jeden spośród zbiorów $A_j(0) \cap B_m \setminus D$, $m = 1, \ldots, 16$, spełniający warunek

$$\frac{1}{-\log \operatorname{cap}(A_j(0) \setminus D)} \geqslant \frac{1}{-\log \operatorname{cap}(K_j)} \geqslant \frac{1}{-16 \log \operatorname{cap}(A_j(0) \setminus D)}. \tag{2.11}$$

Taki zbiór istnieje, dzięki Twierdzeniu D.23(d).

Przypomnijmy definicję funkcji f_K, dla zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}$:

$$f_K(\zeta) := \begin{cases} \displaystyle\int_K \frac{d\mu_K(\lambda)}{\zeta - \lambda}, & \text{jeśli } \operatorname{cap} K > 0 \\ 0, & \text{jeśli } \operatorname{cap} K = 0 \end{cases}, \qquad \zeta \in \mathbb{C} \setminus K,$$

gdzie μ_K jest miarą równowagi zbioru K (zob. Dodatek).

Korzystając z powyższej definicji dla funkcji f_{K_j} i dzięki temu, że każdy ze zbiorów K_j zawiera się w pewnym kącie B_m możemy, przeprowadzając elementarne rachunki, otrzymać następujące oszacowania (o ile tylko zbiór K_j nie jest polarny):

$$\begin{aligned} 2^{j-1} \cos \frac{\pi}{4} &< |f_{K_j}(w)| < 2^{j+2}, \\ 2^{2j-2} \cos \frac{\pi}{4} &< |f'_{K_j}(w)| < 2^{2j+4}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

dla dowolnych $j \geqslant 1$ i $w \in A_l(0) \cap D$, gdzie $l \geqslant j + 4$. Niech ponadto

$$f_0(z) := \frac{1}{2 - z}, \qquad z \in D.$$

Łatwo sprawdzić, że $\|f_0\|_D \leqslant 1$ oraz $\sup_D |f_0| \leqslant 1$.

Oszacujemy funkcję $M_D(\cdot; 1)$ na zbiorach $D \cap A_N(0)$. Ustalmy dowolne $N \geqslant 9$ takie, że K_N nie jest polarny oraz punkt $w \in A_{N+4}(0) \cap D$. Połóżmy

$$f := f_0(w) f_{K_N} - f_{K_N}(w) f_0.$$

Zachodzi $f \in L_h^2(D)$ oraz $f(w) = 0$. Korzystając z nierówności (2.12), oszacujmy od dołu pochodną f w punkcie w:

$$|f'(w)| \geqslant \frac{1}{|2-w|}|f'_{K_N}(w)| - |f_{K_N}(w)|\frac{1}{|2-w|^2} \geqslant \frac{1}{3}2^{2N-2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{N+2} > 2^{2N-6}.$$

Poniżej, szacując normę w przestrzeni $L_h^2(D)$, korzystamy kolejno z nierówności (2.12) i Lematu 1.35 (zob. Uwaga 1.36), warunku (2.11) oraz założenia (2.6):

$$\begin{aligned}\|f\|_D &\leqslant 2^{N+2} + \|f_{K_N}\|_D \leqslant 2^{N+2} + \sqrt{-C\log\operatorname{cap} K_N}\\ &\leqslant 2^{N+2} + \sqrt{-16C\log\operatorname{cap}(A_N(0)\setminus D)} \leqslant T_1\sqrt{-\log\operatorname{cap}(A_N(0)\setminus D)}.\end{aligned}$$

Stała $T_1 > 0$ zależy jedynie od stałej C z Lematu 1.35 (a więc od średnicy zbioru D) oraz od T z warunku (2.6).

Mamy zatem dla $N \geqslant 9$ oraz $w \in A_{N+4}(0) \cap D$:

$$M_D(w;1) \geqslant \frac{|f'(w)|}{\|f\|_D} \geqslant \frac{1}{T_1 2^6}\frac{2^{2N}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}(A_N(0)\setminus D)}}. \tag{2.13}$$

Zwróćmy uwagę, że powyższa nierówność (pomijając środkową część, w której występuje funkcja f) jest prawdziwa dla wszystkich $N \geqslant 9$, a nie tylko dla tych, dla których zbiór K_N jest niepolarny.

Długość odcinka krzywej α zawartego w pierścieniu $A_N(0)$ można oszacować od dołu (dzięki warunkowi (2.4')). Niech $t_N, t_{N+1} \in [0,1]$ będą takimi punktami, że $t_N < t_{N+1}$, $|\alpha(t_N)| = \frac{1}{2^N}$, $|\alpha(t_{N+1})| = \frac{1}{2^{N+1}}$ oraz $\alpha([t_N, t_{N+1}]) \subset A_N(0)$. Wtedy

$$\int_{\alpha^{-1}(A_N(0))} |\alpha'(t)|\,dt \geqslant A|t_N - t_{N+1}| \geqslant |\alpha(t_N) - \alpha(t_{N+1})| \geqslant \frac{1}{2^{N+1}},$$

gdzie stała $A \equiv |\alpha'(t)|$, $t \in (0,1)$, pochodzi z warunku (2.4').

Ostatecznie, stosując powyższe oszacowania oraz Obserwację 2.2(c) (pamiętajmy, że $\Delta(0, \frac{1}{2}) \setminus \Delta(0, \frac{1}{2^9}) \subset D$), dostajemy:

$$\begin{aligned}\int_0^1 M_D\big(\alpha(t);\alpha'(t)\big)\,dt &\geqslant \sum_{N=9}^{\infty} \inf_{w\in A_{N+4}(0)\cap D} M_D(w;1)\frac{1}{2^{N+5}}\\ &\geqslant \frac{1}{2^{11}T_1}\sum_{N=9}^{\infty}\frac{2^N}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}(A_N(0)\setminus D)}} \geqslant \widetilde{T}\widehat{\gamma}_D(0).\end{aligned}$$

Stała $\widetilde{T} > 0$ zależy tylko od T_1, czyli od średnicy D i stałej T z warunku (2.6). $\square$

Dowód Przykładu 2.7. Pokażemy najpierw, że $\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$. Zauważmy, że dla dowolnego $j \geqslant 2$

$$A_j(0) \setminus D \subset \bigcup_{k=0}^{2^j-1} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j) \cup \bigcup_{k=0}^{2^{j+1}-1} \overline{\Delta}(x_{j+1,k}, r_{j+1}).$$

Zatem, dzięki własnościom pojemności (Twierdzenie D.23(d)), mamy

$$\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_j(0)\setminus D\big)} \leqslant 2^j \frac{1}{-\log r_j} + 2^{j+1}\frac{1}{-\log r_{j+1}} \leqslant \frac{2}{2^{2j}j^4} \tag{2.14}$$

i w konsekwencji

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\big(A_j(0)\setminus D\big)}} \leqslant \sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{2^j j^2} < +\infty.$$

Wobec Obserwacji 2.2(c), oznacza to, że $\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$.

Udowodnimy, że dolna granica $\widehat{\gamma}_D(z)$, gdy $z \to 0$, jest skończona. Połóżmy:

$$y_j := \frac{\frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j}}{2} = \frac{3}{2^{j+2}}, \qquad j \geqslant 3.$$

Wystarczy pokazać, że istnieje stała dodatnia C taka, że

$$\widehat{\gamma}_D(y_j) \leqslant C, \qquad j \geqslant 3. \tag{2.15}$$

Z Obserwacji 2.2(d) i Twierdzenia 1.31(b) dostaniemy wtedy również, że funkcja γ_D oraz jądro Bergmana nie dążą do nieskończoności, gdy argumenty zmierzają do zera.

Skorzystamy z Obserwacji 2.2(c), aby pokazać (2.15). W tym celu zauważmy, że dla ustalonego $j \geqslant 3$ zachodzą inkluzje:

$$\begin{aligned}
A_l(y_j)\setminus D &= \varnothing, && \text{gdy } l \geqslant j+3,\\
A_{j+2}(y_j)\setminus D &\subset A_j(0)\setminus D, &&\\
A_{j+1}(y_j)\setminus D &\subset \big(A_{j+1}(0)\cup A_j(0)\cup A_{j-1}(0)\big)\setminus D, &&\\
A_j(y_j)\setminus D &\subset \bigcup_{m=j-1}^{\infty} A_m(0)\setminus D, &&\\
A_l(y_j)\setminus D &\subset \bigcup_{m=l-2}^{l+3} A_m(0)\setminus D, && \text{gdy } l \leqslant j-1.
\end{aligned}$$

Udowodnimy ostatnią z nich — pozostałe dowodzi się podobnie lub znacznie prościej. Dla ustalonego $j \geqslant 3$ oraz $l \in \{2,\dots,j-1\}$ mamy $A_l(y_j)\cap A_m(0) = \varnothing$, jeśli zachodzi jedna z nierówności

$$y_j + \frac{1}{2^l} < \frac{1}{2^{m+1}} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{l+1}} - y_j.$$

Pierwsza z nich zachodzi, gdy $m < l-2$, a druga — gdy $m > l+3$.

Z powyższych inkluzji, dzięki Twierdzeniu D.23(d),(f) i nierówności (2.14), mamy następującą serię szacowań:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_l(y_j)\setminus D\big)} &= 0, && \text{gdy } l \geqslant j+3,\\
\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_{j+2}(y_j)\setminus D\big)} &\leqslant \frac{2}{2^{2j}j^4}, &&\\
\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_{j+1}(y_j)\setminus D\big)} &\leqslant \frac{6}{2^{2(j-1)}(j-1)^4}, &&\\
\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_{j}(y_j)\setminus D\big)} &\leqslant \sum_{m=j-1}^{\infty}\frac{2}{2^{2m}m^4} < \frac{1}{2^{2(j-2)}(j-2)^4}, &&\\
\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_l(y_j)\setminus D\big)} &\leqslant \frac{12}{2^{2(l-2)}(l-2)^4}, && \text{gdy } 2 < l \leqslant j-1,\\
\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_2(y_j)\setminus D\big)} &< 3. &&
\end{aligned}$$

Ostatecznie, korzystając z Obserwacji 2.2(c), dostajemy

$$\widehat{\gamma}_D(y_j) \leqslant 4\sum_{l=2}^{\infty}\frac{2^l}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\big(A_l(y_j)\setminus D\big)}} < 4\bigg(3 + 4\sum_{l=3}^{\infty}\frac{2^l}{2^{l-2}(l-2)^2}\bigg) < +\infty.$$

Pozostaje nam wykazać zupełność obszaru D. Dowiedziemy, że dla dowolnego punktu $z \in D$ takiego, że $|z| = \frac{1}{2^j}$ $(j \geqslant 5)$ zachodzi:

$$k_D(z) \geqslant \widetilde{C}\frac{2^j}{j^4}, \tag{2.16}$$

gdzie stała $\widetilde{C} > 0$ nie zależy od j.

Ustalmy $j \geqslant 5$ oraz $z \in D$ o module równym $\frac{1}{2^j}$. Punkt z leży na łuku między pewnymi punktami postaci $x_{j,k}$ i $x_{j,k+1}$. Można zauważyć, że

$$|x_{j,k} - x_{j,k+1}| \leqslant \frac{2\pi}{2^{2j}} \leqslant \frac{8}{2^{2j}},$$

dla wszystkich „sąsiednich” punktów $x_{j,k}, x_{j,k+1}$. Zatem, zbiór $A_{2j-5}(z)\setminus D$ musi zawierać co najmniej jedno koło $\Delta(x_{j,k}, r_j)$. Wykorzystamy teraz Twierdzenie 1.31(a), Obserwację 1.29(b) oraz fakt, że $A_{2j-5}(z)\setminus D \supset \Delta(x_{j,k}, r_j)$ dla pewnego k:

$$\begin{aligned}
k_D(z) \geqslant C\gamma_D(z) &\geqslant \frac{C}{8}\sum_{l=5}^{\infty}\frac{2^{2l}}{-\log \operatorname{cap}\big(A_l(z)\setminus D\big)}\\
&\geqslant \frac{C}{8}\cdot\frac{2^{4j-10}}{-\log \operatorname{cap}\big(A_{2j-5}(z)\setminus D\big)} \geqslant \frac{C}{8}\cdot\frac{2^{4j-10}}{-\log r_j} = \frac{C}{2^{13}}\cdot\frac{2^j}{j^4}.
\end{aligned}$$

Stała dodatnia C powyżej zależy jedynie od średnicy D.

Nierówność (2.16) wyklucza istnienie krzywej $\alpha \in \mathcal{C}^1([0,1), D)$, $\lim_{t\to 1}\alpha(t) = 0$ takiej, że jądro Bergmana k_D jest ograniczone na $\alpha([0,1))$, ponieważ obraz krzywej α musi przecinać nieskończenie wiele okręgów o środku w 0 i promieniach równych $\frac{1}{2^j}$.

Na podstawie Twierdzenia 2.4, można wyciągnąć wniosek, że D jest b–zupełny w punkcie 0. Pozostałe punkty brzegowe są regularne (Twierdzenie D.25), a zatem D jest wyczerpywalny (Twierdzenie 1.16) oraz b–zupełny (Twierdzenie 1.21) w tych punktach. $\square$

Dowód Twierdzenia 2.8. Pokażemy, że długość krzywej α względem metryki Bergmana β_D jest skończona. W obszarach ograniczonych wartości jądra Bergmana są oddzielone od zera (wynika to z Obserwacji 1.1(e),(j)). Ze względu na ten fakt oraz na Obserwację 1.2(e), wystarczy zatem udowodnić, że

$$\int_0^1 M_D\big(\alpha(t);\alpha'(t)\big)\,dt < \infty. \tag{2.17}$$

Dzięki własności lokalizacji (Twierdzenie 1.27 i Obserwacja 1.2(f)), możemy założyć bez straty ogólności (podobnie jak to uzasadnialiśmy w dowodzie Twierdzenia 2.3), że $z_0 = 0$ oraz

$$\Delta(0,1)\setminus\Delta\Big(0,\frac{1}{9}\Big) \subset D \subset \Delta(0,1). \tag{2.18}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} K_0 &:= \overline{\Delta}(0,1)\setminus\Delta(0,1-\varepsilon_0),\\ K_j &:= A_j(0)\setminus D, \qquad j \geqslant 1,\\ L_j &:= \bigcup_{k=j+1}^{\infty} K_k \cup \overline{\Delta}(0,\varepsilon_j), \qquad j\geqslant 1, \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon_0 < \frac{1}{4}$ jest pewną ustaloną liczbą dodatnią. Stałe $\varepsilon_j \in \big(0, \frac{\theta}{2^{j+1}}\big)$ wybieramy tak małe, aby

$$\frac{1}{-\log\operatorname{cap} L_j} < 2\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1}{-\log\operatorname{cap} K_k} \tag{2.19}$$

(możemy tak uczynić ze względu na Twierdzenie D.23(d),(f)).

Zauważmy, że z założenia $\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$ i Obserwacji 2.2(c) wynika, że

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\sqrt{-\log\operatorname{cap} K_k}} < +\infty. \tag{2.20}$$

Zdefiniujmy pomocnicze obszary

$$D_j := \big(D\cup\Delta(0,\varepsilon_j)\big)\cap\Delta(0,1-\varepsilon_0). \qquad j\geqslant 1$$

Powiększając odpowiednio zbiory K_j, $j\geqslant 1$, możemy założyć bez straty ogólności, dzięki własnościom pojemności logarytmicznej (Twierdzenie D.23(c)), że obszary $\mathbb{C}\setminus K_j$, $j\geqslant 1$ są regularne, a brzeg każdego ze zbiorów D_j jest sumą skończonej liczby łuków Jordana.

Niech $B \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym zbiorem zwartym takim, że $\mathbb{C} \setminus B$ jest obszarem regularnym oraz $0 < \operatorname{cap} B < 1$. Oznaczmy przez $p_B := p_{\mu_B}$ jego potencjał logarytmiczny (zob. Dodatek). Wybierzmy funkcje $\chi_B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ takie, że

$$\chi_B(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad t \leqslant \log \operatorname{cap} B \\ 0, & \text{gdy} \quad t \geqslant \dfrac{1}{2} \log \operatorname{cap} B \end{cases} \tag{2.21}$$

oraz

$$|\chi_B'(t)| \leqslant \frac{4}{-\log \operatorname{cap} B}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Niech $\varphi_B := \chi_B \circ p_B$. Jeżeli B jest polarny lub pusty, to przyjmijmy umowę $\varphi_B \equiv 0$. Dzięki twierdzeniu Frostmana (Twierdzenie D.27) $\varphi_B \equiv 1$ na B (o ile B nie jest polarny lub pusty). Ponadto,

$$\left| \frac{\partial \varphi_B}{\partial \bar{z}}(z) \right| = \left| \chi_B'(p_B(z)) \frac{\partial p_B(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leqslant \frac{4|f_B(z)|}{-\log \operatorname{cap} B}, \quad z \in D. \tag{2.23}$$

Ustalmy dodatkowo funkcję $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ taką, że $\varphi_0 \equiv 1$ na zbiorze K_0 oraz $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \overline{\Delta}(0, 1+\varepsilon_0) \setminus \Delta(0, 1-2\varepsilon_0)$.

Połóżmy

$$\psi_j := \max\{\varphi_0, \varphi_{K_1}, \ldots, \varphi_{K_j}, \varphi_{L_j}\}. \tag{2.24}$$

Mamy $\psi_j \equiv 1$ na ∂D_j. Pewne dodatkowe własności, których użyjemy w dalszej części dowodu, zostały zebrane w poniższym lemacie, który zostanie wykazany później.

Lemat 2.11. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ spełnia warunek* (2.18) *oraz niech α będzie krzywą spełniającą warunki* (2.4) *i* (2.8) *dla $z_0 = 0 \in \partial D$.*

Wtedy istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ oraz stałe $m, M > 0$ takie, że dla dowolnych $j > N_0$, $N \in \mathbb{N}$ oraz $x \in A_N(0) \cap \alpha([0,1])$ zachodzi

(a) $\operatorname{supp} \varphi_{K_j} \subset A_{j-1}(0) \cup A_j(0) \cup A_{j+1}(0)$, $\operatorname{supp} \varphi_{L_j} \subset \bigcup_{s=j}^\infty A_s(0)$;
(b) $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} \varphi_{K_j} \cup \operatorname{supp} \varphi_{L_j}) \geqslant \frac{m}{2^N}$, *gdy* $j > N$
oraz $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} \varphi_{K_j}) \geqslant \frac{m}{2^j}$, *gdy* $j \leqslant N$;
(c) $\left\| \frac{\partial \varphi_{K_j}}{\partial \bar{z}} \right\|_D \leqslant \frac{M}{\sqrt{-\log \operatorname{cap} K_j}}$, $\left\| \frac{\partial \varphi_{L_j}}{\partial \bar{z}} \right\|_D \leqslant \sum_{s=j+1}^\infty \frac{M}{\sqrt{-\log \operatorname{cap} K_s}}$.

Oszacujemy funkcję $M_D(\cdot; 1)$ wzdłuż krzywej α.

Ustalmy $N > 2$ oraz $x \in A_{N-1}(0) \cap \alpha([0,1])$. Weźmy dowolną funkcję $f \in L_h^2(D)$, $f \not\equiv 0$.

Ze wzoru całkowego Cauchy'ego oraz ze wzoru Greena dla funkcji lipschitzowskich (Twierdzenie D.36) dostajemy, że:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D_N} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D_N} \frac{f(z)\psi_N(z)\,dz}{(z-x)^2} \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{D_N} \frac{f(z)}{(z-x)^2} \frac{\partial \psi_N}{\partial \bar{z}}(z)\, d\mathcal{L}^2(z) \right|. \end{aligned}$$

Następnie stosujemy nierówność Cauchy'ego–Schwarza oraz Lemat 2.7:

$$
\begin{aligned}
&|f'(x)| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\operatorname{supp}\varphi_0}\frac{|f(z)|}{|z-x|^2}\left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial\overline{z}}(z)\right| + \frac{1}{\pi}\left(\sum_{j=2}^{N-1}\int_{A_j(0)} + \int_{\bigcup\limits_{s=N}^{\infty} A_j(0)}\right)\frac{|f(z)|}{|z-x|^2}\left|\frac{\partial\psi_N}{\partial\overline{z}}(z)\right| d\mathcal{L}^2(z) \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|_D\left\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial\overline{z}}\right\|_D \sup_{z\in\operatorname{supp}\varphi_0}\frac{1}{|z-x|^2} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{j=2}^{N-1}\int_{A_j(0)}\frac{|f(z)|}{|z-x|^2}\left(\left|\frac{\partial\varphi_{K_{j-1}}}{\partial\overline{z}}(z)\right| + \left|\frac{\partial\varphi_{K_j}}{\partial\overline{z}}(z)\right| + \left|\frac{\partial\varphi_{K_{j+1}}}{\partial\overline{z}}(z)\right|\right) d\mathcal{L}^2(z) \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{\bigcup\limits_{s=N}^{\infty} A_j(0)}\frac{|f(z)|}{|z-x|^2}\left(\left|\frac{\partial\varphi_{K_{N-1}}}{\partial\overline{z}}(z)\right| + \left|\frac{\partial\varphi_{K_N}}{\partial\overline{z}}(z)\right| + \left|\frac{\partial\varphi_{L_N}}{\partial\overline{z}}(z)\right|\right) d\mathcal{L}^2(z) \\
&\leqslant C_1\|f\|_D\left(1 + \sum_{j=1}^{N}\sup_{z\in\operatorname{supp}\varphi_{K_j}}\frac{1}{|z-x|^2}\left\|\frac{\partial\varphi_{K_j}}{\partial\overline{z}}\right\|_D + \sup_{z\in\operatorname{supp}\varphi_{L_N}}\frac{1}{|z-x|^2}\left\|\frac{\partial\varphi_{L_N}}{\partial\overline{z}}\right\|_D\right) \\
&\qquad\qquad\leqslant C_1\|f\|_D\left(1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{2^{2j}}{m^2}\frac{M}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}} + \sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{2^{2N}}{m^2}\frac{M}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}}\right).
\end{aligned}
$$

Stałe m, M pochodzą z Lematu 2.11 i zależą od zbioru D, natomiast stała $C_1 > 0$ jedynie od wyboru funkcji φ_0.

Mamy więc następującą nierówność dla $x \in A_{N-1}(0)\cap\alpha([0,1])$:

$$
M_D(x;1) \leqslant C_2\left(1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}} + 2^{2N}\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}}\right), \tag{2.25}
$$

gdzie $C_2 > 0$ jest pewną uniwersalną stałą zależną tylko od obszaru D.

Szacując poniższą całkę, wykorzystujemy warunek (2.9):

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 M_D\big(\alpha(t);\alpha'(t)\big)\,dt \\
&\qquad\leqslant \sum_{N=1}^{\infty}\left(\sup_{x\in A_N(0)\cap\alpha([0,1])} M_D(x;1)\int_{\alpha^{-1}(A_N(0))}|\alpha'(t)|\,dt\right) \\
&\qquad\leqslant C_2R\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N}\sum_{j=1}^{N}\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}} + 2^N\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}}\right) \\
&\qquad\leqslant C_2R + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{N=j}^{\infty}\frac{1}{2^N}\right)\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}} + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\sum_{N=1}^{j-1}2^N\right)\frac{1}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}} \\
&\qquad\leqslant C_2R + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}} + 2\sum_{j=2}^{\infty}\frac{2^j}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}K_j}}.
\end{aligned}
$$

Warunek (2.20) kończy dowód. □

Dowód Przykładu 2.9. Sprawdźmy, że krzywa α spełnia żądane własności. Warunki (2.4') i (2.9) zachodzą w oczywisty sposób. Weźmy zatem dowolny punkt $x_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ i niech x_1 będzie punktem z przedziału $(0, x_0)$ takim, że

$$\operatorname{dist}(x_0, \partial D) = |x_0 - (x_1 + iRx_1^a)| > Rx_1^a.$$

Wystarczy teraz pokazać, że $Rx_1^a > \frac{R}{2}x_0^a$ dla x_0 dostatecznie bliskich 0. Zwróćmy uwagę, że z elementarnych własności wykresu funkcji różniczkowalnej, mamy

$$\frac{x_0 - x_1}{Rx_1^a} = Rax_1^{a-1}.$$

Stąd wynika, że iloraz $\frac{x_0}{x_1}$ dąży do 1, gdy $x_0 \to 0$, a to gwarantuje już potrzebną nierówność.

Pokażemy teraz, że $\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$. Zauważmy, że dla $j \geqslant 2$

$$A_{qj-1}(0) \cup A_{qj}(0) \setminus D \subset \bigcup_{k=0}^{2^{pj}-1} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j),$$

a dla pozostałych $l \geqslant 2$ różnych od qj i $qj - 1$

$$A_l(0) \setminus D = \varnothing.$$

Podobnie jak w Przykładzie 2.7, dzięki Obserwacji 2.2(c) oraz Twierdzeniu D.23(d) mamy

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_D(0) \leqslant 4\sum_{l=2}^{\infty} \frac{2^l}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(A_l(0) \setminus D\right)}} &\leqslant 8\sum_{j=2}^{\infty} \frac{2^{qj}}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(\bigcup_{k=0}^{2^{pj}-1} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j)\right)}} \\ &\leqslant 8\sum_{j=2}^{\infty} 2^{qj}\sqrt{\frac{2^{pj}}{2^{(2q+p)j}j^4}} = 8\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^2} < +\infty.\end{aligned}$$

Udowodnijmy w końcu zupełność obszaru D. Analogicznie jak w Przykładzie 2.7, pokażemy, że dla dowolnego punktu z o module równym $\frac{1}{2^{qj}}$ (dla dostatecznie dużych j) zachodzi

$$k_D(z) \geqslant \widetilde{C}\frac{2^{pj}}{j^4}. \tag{2.26}$$

Gwarantuje to, że nie istnieje krzywa spełniająca warunek (2.4) dla punktu 0, wzdłuż której jądro Bergmana byłoby ograniczone. Na podstawie Twierdzenia 2.4 dostajemy b–zupełność D w punkcie 0. Zupełność w pozostałych punktach gwarantuje Twierdzenie 1.21 (poprzez Twierdzenie D.25).

Ustalmy $j \geqslant 2$ i weźmy punkt z o module równym $\frac{1}{2^{qj}}$. Dla „sąsiednich" punktów $x_{j,k}, x_{j,k+1}$ mamy:

$$|x_{j,k} - x_{j,k+1}| \leqslant \frac{2\pi}{2^{qj}} \cdot \frac{1}{2^{pj}} = \frac{2\pi}{2^{(p+q)j}}.$$

Z geometrii zbioru D wynika więc, że

$$\operatorname{dist}(z, \partial D) \leqslant \frac{R}{2^{qja}} + \frac{2\pi}{2^{(p+q)j}} < \frac{8}{2^{(p+q)j}},$$

dla $j > j_0$. Takie $j_0 \in \mathbb{N}$ istnieje, ponieważ $qa > p + q$.

W konsekwencji, dla odpowiednio dużego j (można założyć, że dla $j > j_0$) i dowolnego $z \in D$ o module równym $\frac{1}{2^{qj}}$ zbiór $A_{(p+q)j-5}(z) \setminus D$ zawiera co najmniej jedno koło $\Delta(x_{j,k}, r_j)$ dla pewnego $k \in \{0, \ldots, 2^{pj} - 1\}$. Zatem z Twierdzenia 1.31(a) oraz Obserwacji 1.29(b) mamy

$$\begin{aligned} k_D(z) \geqslant C\gamma_D(z) &\geqslant \frac{C}{8} \sum_{l=j_0}^{\infty} \frac{2^{2l}}{-\log \operatorname{cap}\left(A_l(z) \setminus D\right)} \\ &\geqslant \frac{C}{8} \cdot \frac{2^{2(p+q)j-10}}{-\log \operatorname{cap}\left(A_{(p+q)j-5}(z) \setminus D\right)} \geqslant \frac{C}{8} \cdot \frac{2^{2(p+q)j-10}}{-\log r_j} = \frac{C}{2^{13}} \cdot \frac{2^{pj}}{j^4}, \end{aligned}$$

dla punktów $z \in D$ o module równym $\frac{1}{2^{qj}}$ $(j > j_0)$. $\square$

Dowód Lematu 2.11. Z definicji funkcji χ_B oraz z definicji potencjału (zob. Definicja D.21) wynika, że dla zbioru B takiego, że $0 < \operatorname{cap} B < 1$, zachodzi

$$\operatorname{supp} \varphi_B \subset \{z \in \mathbb{C} : \, p_B(z) \leqslant \frac{1}{2} \log \operatorname{cap} B\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \, \operatorname{dist}(z, B) \leqslant \sqrt{\operatorname{cap} B}\}. \quad (2.27)$$

Zatem, aby inkluzje w punkcie (a) zachodziły, wystarczy pokazać, że $\sqrt{\operatorname{cap} K_j} < \frac{1}{2^{j+2}}$ oraz $\sqrt{\operatorname{cap} L_j} < \frac{1}{2^{j+1}}$ dla dostatecznie dużych j. Istotnie, z warunków (2.20) oraz (2.19) wynika, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje N_0 takie, że dla $j > N_0$ zachodzi

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} K_j &\leqslant \frac{-1}{\log \operatorname{cap} K_j} < \frac{\delta^2}{2^{2j+4}}, \\ \operatorname{cap} L_j &\leqslant \frac{-1}{\log \operatorname{cap} L_j} < 2 \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{-1}{\log \operatorname{cap} K_k} < 2 \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\delta^2}{2^{2k+4}} < \frac{\delta^2}{2^{2j+4}}. \end{aligned}$$

Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ oraz punkt $x \in A_N(0) \cap \alpha([0, 1))$. Weźmy dowolne $j > \max\{N, N_0\}$. Wtedy, korzystając z udowodnionych wyżej oszacowań, dostajemy

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} \varphi_{K_j} \cup \operatorname{supp} \varphi_{L_j}) &> \operatorname{dist}(x, \partial D \cup \Delta(0, \varepsilon_j)) - \sqrt{\operatorname{cap} K_j} - \sqrt{\operatorname{cap} L_j} \\ &> \frac{\theta}{2^{N+1}} - \varepsilon_j - \frac{2\delta}{2^{j+2}} > \frac{\theta}{2^{N+1}} - \frac{\theta}{2^{N+2}} - \frac{2\delta}{2^{N+3}}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że w definicji zbioru L_j wybieraliśmy $\varepsilon_j < \frac{\theta}{2^{j+1}}$. Teraz biorąc $\delta < \frac{\theta}{2}$, dostaniemy nierówność

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} \varphi_{K_j} \cup \operatorname{supp} \varphi_{L_j}) > \frac{\theta}{2^{N+3}}.$$

Podobnie dla $j = N-2, N-1, N$ (pamiętajmy, że $j > N_0$):

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}\varphi_{K_j}) > \operatorname{dist}(x, \partial D) - \sqrt{\operatorname{cap} K_j} > \frac{\theta}{2^{N+1}} - \frac{\delta}{2^{j+2}}$$

i kładąc $\delta < \frac{\theta}{4}$ otrzymujemy:

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}\varphi_{K_j}) > \frac{\theta}{2^{j+4}}.$$

Dla $j \leqslant N-3$ mamy, dzięki udowodnionemu już punktowi (a),

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}\varphi_{K_j}) > \operatorname{dist}(x, A_{j+1}(0)) > \frac{1}{2^{j+2}} - \frac{1}{2^N} \geqslant \frac{1}{2^{j+2}} - \frac{1}{2^{j+3}} = \frac{1}{2^{j+3}} \geqslant \frac{\theta}{2^{j+3}}.$$

Wystarczy przyjąć $m := \frac{\theta}{2^4}$.
Z warunku (2.23) wynika, że

$$\left\| \frac{\partial \varphi_B}{\partial \overline{z}} \right\|_D \leqslant \frac{4\|f_B\|_D}{-\log \operatorname{cap} B},$$

gdzie $B = K_j$ lub $B = L_j$, $j \geqslant 1$. Wystarczy teraz zastosować Lemat 1.35 (zob. Uwaga 1.36). $\square$

ROZDZIAŁ III

OBSZARY TYPU ZALCMANA

W pracy [Zal 1969] został wprowadzony specjalny typ obszarów na płaszczyźnie zespolonej (obszary typu (L)), których brzeg ma nieskończenie wiele składowych spójnych.

DEFINICJA 3.1. *Obszarami typu* (L) *w sensie Zalcmana* lub, krócej, *obszarami typu Zalcmana* albo *obszarami typu* (L) będziemy nazywać obszary postaci:

$$D := \Delta(0,1) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta}(x_k, r_k) \cup \{0\} \right), \tag{3.1}$$

gdzie $x_k > x_{k+1} > 0$, $\lim_{k \to +\infty} x_k = 0$, $\overline{\Delta}(x_k, r_k) \subset \Delta(0,1)$ oraz $\overline{\Delta}(x_k, r_k) \cap \overline{\Delta}(x_l, r_l) = \varnothing$, dla $k, l \geqslant 1, k \neq l$.

Obszary te były również badane w kontekście zupełności w sensie Bergmana (zob. [Ohs 1993], [Chen 1999], [Chen 2001]). Ohsawa ([Ohs 1993]) scharakteryzował hiperwypukłe obszary typu (L), które spełniają warunek (3.2), i podał przykład niehiperwypukłego i wyczerpywalnego obszaru tego typu. Chen wskazał przykład obszaru typu (L), który jest b–zupełny, ale nie hiperwypukły ([Chen 1999]). Zwonek ([Zwo 2001], zob. Twierdzenie 1.12) skonstruował inny przykład obszaru z brzegiem nieskończenie spójnym[(7)], który jest b–zupełny, ale nie wyczerpywalny — był to jednocześnie kontrprzykład do hipotezy Kobayashiego o twierdzeniu odwrotnym do 1.9.

Główną motywacją do badania tych obszarów było dla nas następujące pytanie Pfluga ([Pfl 2000]):

Które obszary typu (L), spełniające warunek

$$x_k = \frac{1}{2^k}, \tag{3.2}$$

są b–zupełne?

Przedstawimy pełną charakteryzację wyczerpywalności oraz b–zupełności (Twierdzenie 3.7) dla obszarów typu (L) w sensie Zalcmana, które spełniają warunek

$$\text{istnieje liczba } \Theta \in (0,1) \text{ taka, że } \frac{x_{k+1}}{x_k} \leqslant \Theta \text{ dla każdego } k \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Będą to wnioski z rezultatów z poprzedniego rozdziału lub ze znanych wcześniej wyników (por. [Juc 2004]). W szczególności, rozwiążemy problem postawiony przez Pfluga.

Zauważmy, że w przypadku obszarów typu (L) istotne będzie dla nas zachowanie się funkcji Bergmana jedynie w otoczeniu punktu 0.

(7) Nie jest to obszar typu (L) w rozumieniu Definicji 3.1

Obserwacja 3.2. *Niech D będzie obszarem typu (L) oraz niech $z_0 \in \partial D$, $z_0 \neq 0$. Wtedy D jest wyczerpywalny i b–zupełny w punkcie z_0.*

Dowód. Punkt $z_0 \in \partial D \setminus \{0\}$ leży na pewnym okręgu, który jest składową spójną ∂D, więc z Twierdzenia D.25 wynika, że jest punktem regularnym. Z Twierdzenia 1.16 mamy zatem, że

$$\lim_{D \ni z \to z_0} k_D(z) = +\infty,$$

a Twierdzenie 1.21 daje nam b–zupełność obszaru D w z_0. □

Wniosek 3.3. *Niech D będzie obszarem typu (L). Wtedy:*

(a) *D jest wyczerpywalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\gamma_D(0) = +\infty. \tag{3.4}$$

(b) *D jest b–zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\widehat{\gamma}_D(0) = +\infty. \tag{3.5}$$

Dowód.
(a). Bezpośrednio z definicji funkcji γ_D (1.11) wynika, że γ_D jest rosnąca na odcinku $[-\frac{1}{4}, 0]$. Z tego oraz z półciągłości z dołu (Obserwacja 1.29(a)) można wywnioskować, że warunek (3.4) jest równoważny warunkowi

$$\lim_{D \ni z \to 0} \gamma_D(z) = +\infty.$$

Twierdzenie 1.30 kończy dowód.
(b). Widać, że obszar D spełnia założenia (2.8) i (2.9) w Twierdzeniu 2.8. Fakt, że D jest b–zupełny w 0, oznacza tym samym, że zachodzi warunek (3.5).
Implikacja odwrotna wynika bezpośrednio z Wniosku 2.6. □

Dla obszarów typu (L) w sensie Zalcmana (zdefiniowanych wzorem (3.1)) rozważmy następujące warunki:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-x_k^2 \log r_k} = +\infty, \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k \sqrt{-\log r_k}} = +\infty. \tag{3.7}$$

Lemat 3.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem typu (L). Wtedy zachodzą następujące implikacje:*

$$(3.4) \implies (3.6), \qquad (3.5) \implies (3.7).$$

Ponadto, jeśli zachodzi warunek (3.3)*, to również*

$$(3.6) \implies (3.4) \quad \textit{oraz} \quad (3.7) \implies (3.5).$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód jednocześnie dla implikacji (3.4) $\Longrightarrow$ (3.6) oraz (3.5) $\Longrightarrow$ (3.7). Połóżmy

$$A := \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^{a+1}\big(-\log \operatorname{cap}\big(\overline{\Delta}(0,\delta)\setminus D\big)\big)^b}, \tag{3.8}$$

gdzie $a=1$ i $b=\frac{1}{2}$ (wtedy $A=\widehat{\gamma}_D(0)$) albo $a=2$ i $b=1$ (wtedy $A=\gamma_D(0)$).[8]

Załóżmy, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k^a(-\log r_k)^b} \tag{3.9}$$

jest zbieżny. Dla dostatecznie dużych k mamy wtedy

$$r_k \leqslant \frac{1}{4}x_k.$$

Ponieważ nie wpłynie to na zbieżność szeregu, możemy założyć, że nierówność ta zachodzi dla wszystkich $k \geqslant 1$.

Z geometrii zbioru D i z powyższej nierówności wynika, że dowolne koło $\overline{\Delta}(x_k, r_k)$, $k \geqslant 1$ przecina jednocześnie co najwyżej dwa zbiory $A_j(0)$ i $A_{j+1}(0)$ dla pewnego $j \geqslant 0$. Ponadto, zachodzi wtedy

$$x_k \leqslant \frac{1}{2^j}$$

oraz, dzięki Twierdzeniu D.23(d),

$$\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_j(z)\setminus D\big)} \leqslant \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ \overline{\Delta}(x_k,r_k)\cap A_j(0)\neq\varnothing}} \frac{1}{-\log r_k}.$$

Korzystając z tego, co zauważyliśmy powyżej, z subaddytywności funkcji $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \sqrt{x}$ (w przypadku, gdy $b=\frac{1}{2}$) oraz z Obserwacji 2.2(c) i 1.29(b), dostajemy

$$\begin{aligned} A &\leqslant 8\sum_{j=2}^{\infty} \frac{2^{aj}}{\big(-\log \operatorname{cap}\big(A_j(z)\setminus D\big)\big)^b} \leqslant 8\sum_{j=2}^{\infty} 2^{aj} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ \overline{\Delta}(x_k,r_k)\cap A_j(0)\neq\varnothing}} \frac{1}{(-\log r_k)^b} \\ &\leqslant 8\cdot\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ \overline{\Delta}(x_k,r_k)\cap A_j(0)\neq\varnothing}} \frac{1}{x_k^a(-\log r_k)^b} \leqslant 16\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k^a(-\log r_k)^b}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

czyli $A < +\infty$. Pierwsza część lematu została zatem udowodniona.

[8] Oczywiście, dowód jest prawdziwy dla każdego $a > 0$. Nie potrzebujemy go jednak tutaj w pełnej ogólności. W dalszej części rozdziału wykorzystamy jeszcze jedynie fragment poniższego rozumowania dla $a = 2$ i $b = \frac{1}{2}$.

Oszacujemy teraz całkę (3.8) od dołu, aby pokazać implikacje odwrotne. Załóżmy, bez utraty ogólności, że $x_1 \leqslant \frac{1}{4}$ i zauważmy, że $\overline{\Delta}(0,\delta)\setminus D \supset \overline{\Delta}(x_{k+1} - \frac{1}{2}r_{k+1}, \frac{1}{2}r_{k+1})$ dla $\delta \in [\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$. Stosując Twierdzenie D.23(a),(f), a następnie warunek (3.3), dostajemy

$$A \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \frac{d\delta}{\delta^{a+1}\big(-\log \operatorname{cap}\big(\overline{\Delta}(0,\delta)\setminus D\big)\big)^b}$$
$$\geqslant \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_{k+1}^a} - \frac{1}{x_k^a}\right)\frac{1}{(-\log \frac{1}{2}r_{k+1})^b} \geqslant \frac{1-\Theta^a}{2^b a}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{x_k^a(-\log r_k)^b}.$$

Pojawienie się stałej $\frac{1}{2^b}$ w ostatnim wyrażeniu wynika z nierówności $\frac{1}{2}r_k \geqslant r_k^2$ dla $k \geqslant 1$ (mamy $r_k \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{4}$, $k \geqslant 1$). Lemat został więc udowodniony. □

W powyższym lemacie warunek (3.3) jest konieczny. Pokazują to poniższe przykłady.

Przykład 3.5. *Niech*

$$D := \Delta(0,1) \setminus \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} \overline{\Delta}\Big(\frac{1}{k}, r_k\Big) \cup \{0\}\right),$$

gdzie $r_k > 0$ *są takie, że* $-\log r_k = k^4$. *Wtedy* D *spełnia warunek* (3.7)*, ale nie spełnia* (3.5)*.*

Dowód. Łatwo widać, że

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{x_k\sqrt{-\log r_k}} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{k^2} = +\infty.$$

Dla dowolnego $j \geqslant 1$ zachodzi

$$A_j(0)\setminus D \subset \bigcup_{k=2^j}^{2^{j+1}} \overline{\Delta}(\frac{1}{k}, r_k).$$

Gdy zastosujemy Twierdzenie D.33(d), dostaniemy

$$\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_j(0)\setminus D\big)} \leqslant \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{-\log r_k} \leqslant (2^j+1)\frac{1}{2^{4j}} < \frac{2}{2^{3j}}, \qquad j \geqslant 1.$$

Ostatecznie, z Obserwacji 2.2(c) mamy

$$\widehat{\gamma}_D(0) \leqslant 4\sum_{j=2}^{\infty}\frac{2^j}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\big(A_j(0)\setminus D\big)}} \leqslant 4\sqrt{2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^j}} < +\infty.$$

□

Aby skonstruować kontrprzykład do implikacji (3.6) $\Longrightarrow$ (3.4), potrzebne jest nieco subtelniejsze rozumowanie.

Przykład 3.6. *Niech*

$$D := \Delta(0,1) \setminus \Bigg(\bigcup_{j=2}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{j} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j) \cup \{0\} \Bigg),$$

gdzie $\frac{1}{2^{j+1}} < x_{j,k} < \frac{1}{2^j}, r_j > 0$, $(j \geqslant 2, k = 1, \ldots, j)$ *są takie, że*

$$-\log r_j = 2^{2j} j^2,$$

$$\bigcup_{k=1}^{j} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j) \subset A_j(0),$$

$$\operatorname{diam}\Bigg(\bigcup_{k=1}^{j} \overline{\Delta}(x_{j,k}, r_j) \Bigg) \leqslant (3j-1) r_j.$$

Wtedy D spełnia warunek (3.6)*, ale nie spełnia* (3.4)*.*

Dowód. Zauważmy, że taki zbiór da się skonstruować zgodnie z warunkami (3.1). Trzeba wziąć $x_{j,k} \in \big(\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}\big)$ $(j \geqslant 2, k = 1, \ldots, j)$ takie, że

$$x_{j,1} := \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{3}{2} r_j,$$
$$x_{j,k} - x_{j,k-1} = 3r_j, \qquad k = 2, \ldots, j.$$

Można to zrobić, ponieważ

$$3jr_j = 3je^{-2^{2j}j^2} < \frac{1}{2^{j+1}}, \qquad j \geqslant 2.$$

Sprawdźmy, że zachodzi warunek (3.6):

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{-x_{j,k}^2 \log r_j} \geqslant \sum_{j=2}^{\infty} j \frac{2^{2j}}{2^{2j} j^2} = +\infty.$$

Średnica zbioru $A_j(0) \setminus D$ $(j \geqslant 2)$ jest mniejsza niż $3jr_j$. Dlatego, stosując Twierdzenie D.23(d), dostajemy następującą nierówność

$$\frac{1}{\log \frac{3jr_j}{\operatorname{cap}\left(A_j(0) \setminus D\right)}} \leqslant \frac{j}{\log \frac{3jr_j}{r_j}}, \qquad j \geqslant 2,$$

która prowadzi do oszacowania:

$$\frac{1}{-\log \operatorname{cap}\big(A_j(0) \setminus D\big)} \leqslant \frac{1}{(\frac{1}{j} - 1)\log 3j - \log r_j} \leqslant \frac{2}{2^{2j} j^2}, \qquad j \geqslant 2.$$

W konsekwencji, dzięki Obserwacji 1.29(b),

$$\gamma_D(0) \leqslant 8 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2^{2j}}{-\log \operatorname{cap}\big(A_j(0) \setminus D\big)} \leqslant 8 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{j^2} < +\infty,$$

czyli warunek (3.4) nie jest spełniony. □

Poniższe twierdzenie jest wnioskiem z wyników z poprzedniego rozdziału, z Twierdzenia 1.30 (zob. również [Zwo 2001], [Juc 2004]) oraz z Kryterium Wienera (Twierdzenie D.26).

Charakteryzuje ono obszary typu (L) w sensie Zalcmana ze względu na własności hiperwypukłości (por. [Ohs 1993]), wyczerpywalności oraz b–zupełności.

Twierdzenie 3.7 (por. [Juc 2004]). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem typu (L) spełniającym warunek* (3.3). *Wtedy:*

(a) *D jest wyczerpywalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{x_k^2 \log r_k} = +\infty.$$

(b) *D jest b–zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k \sqrt{-\log r_k}} = +\infty.$$

(c) *Jeśli ponadto istnieje $\Theta' > 0$ takie, że*

$$\Theta' \leqslant \frac{x_{k+1}}{x_k}, \qquad k \geqslant 1, \tag{3.11}$$

to D jest hiperwypukły wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log x_k}{\log r_k} = +\infty.$$

Dowód. Punkty (a) i (b) wynikają bezpośrednio z Wniosku 3.3 i Lematu 3.4. Pozostaje udowodnić punkt (c) (por. [Ohs 1993]).

Z własności zespolonej i klasycznej funkcji Greena wynika, że hiperwypukłość jest równoważna regularności obszaru D (zob. Twierdzenie D.29 i Twierdzenie D.31). Ponieważ wiemy, że wszystkie punkty brzegowe zbioru D oprócz co najwyżej punktu 0 są regularne (Twierdzenie D.25), wystarczy więc zastosować kryterium Wienera (Twierdzenie D.26) do 0. Połóżmy $\rho_k := x_k$. Dzięki warunkom (3.3) i (3.11) mamy

$$0 < \Theta' \leqslant \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} \leqslant \Theta < 1, \qquad k \geqslant 1,$$

zatem założenia kryterium Wienera, dotyczące liczb ρ_k, są spełnione. Zauważmy, że dla zbioru

$$F_k = \{z \in \mathbb{C} : \rho_{k+1} \leqslant |z| \leqslant \rho_k\} \setminus D, \qquad k \geqslant 1,$$

zachodzą inkluzje

$$\overline{\Delta}\Big(x_k - \frac{1}{2}r_k, \frac{1}{2}r_k\Big) \subset F_k \subset \overline{\Delta}(x_{k+1}, r_{k+1}) \cup \overline{\Delta}(x_k, r_k), \qquad k \geqslant 1.$$

Dzięki własnościom pojemności (Twierdzenie D.23(a),(d),(f)) prowadzą one do następujących nierówności:

$$\frac{1}{-\log \frac{1}{2} r_k} \leqslant \frac{1}{-\log \operatorname{cap} F_k} \leqslant \frac{1}{-\log r_{k+1}} + \frac{1}{-\log r_k}, \qquad k \geqslant 1.$$

Mnożąc wszystkie wyrazy powyżej przez $-\log x_k$ i sumując po k, wnioskujemy (stosując ponownie warunek (3.11)), że szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \rho_k}{\log \operatorname{cap} F_n}$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log x_k}{\log r_k}$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne. Kryterium Wienera kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.7 daje odpowiedź na problem postawiony przez Pfluga [Pfl 2000], który cytowaliśmy na początku rozdziału. Daje on również możliwość wyboru stosunkowo łatwych przykładów obszarów wyczerpywalnych niehiperwypukłych i zupełnych niewyczerpywalnych (łatwiejszych niż w [Zwo 2001], por. przypis do Twierdzenia 1.12).

Jedynie dla porządku przedstawimy wniosek z tego twierdzenia, dotyczący obszarów spełniających warunek

$$x_k = \frac{1}{2^k}, \qquad k \geqslant 1. \tag{3.2}$$

Wniosek 3.8. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem typu (L) spełniającym warunek* (3.2). *Wtedy:*

(a) *D jest hiperwypukły wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{-\log r_k} = +\infty.$$

(b) *D jest wyczerpywalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{-\log r_k} = +\infty.$$

(c) *D jest b–zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{-\log r_k}} = +\infty.$$

Wnioskiem z rozważań z poprzedniego rozdziału jest również poniższy lemat, dotyczący zachowania się metryki Bergmana β_D w obszarach typu (L) (por. Corollary 5 w [Pfl–Zwo 2003]). Wiąże się to z dyskusją na temat, kiedy

$$\lim_{D \ni z \to \partial D} \beta_D(z) = +\infty.$$

Problem ten nie jest dotychczas rozwiązany, nawet dla obszarów typu (L) w sensie Zalcmana spełniających warunek (3.2) (zob. [Jar–Pfl 2004], Open problems).

Lemat 3.9. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem typu (L). Wtedy:*

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k^2 \sqrt{-\log r_k}} < +\infty \implies \limsup_{0 > x \to 0} \beta_D(x) < +\infty.$$

(b) *Jeśli dodatkowo D spełnia warunek* (3.3), *to*

$$\limsup_{0 > x \to 0} \beta_D(x) < +\infty \implies \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{x_k^2 \sqrt{-\log r_k}} < +\infty.$$

Dowód. (a). Jądro Bergmana k_D jest oddzielone od zera na zbiorze D (wynika to z Obserwacji 1.1(e),(j)), więc wystarczy pokazać (dzięki Obserwacji 1.2(e)), że

$$\limsup_{0>x\to 0} M_D(x;1) < +\infty.$$

Z oszacowania (2.25) w dowodzie Twierdzenia 2.8 (zbiór D spełnia założenia tego twierdzenia) wynika, że

$$M_D(x;1) \leqslant C\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\big(A_j(0)\setminus D\big)}}\right), \qquad x\in(-\frac{1}{4},0),$$

gdzie $C>0$ jest pewną stałą zależną jedynie od zbioru D.

Wystarczy zatem pokazać, że zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k^2\sqrt{-\log r_k}}$$

implikuje zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}\big(A_j(0)\setminus D\big)}}.$$

Wynika to bezpośrednio z ciągu nierówności (3.10) w dowodzie Lematu 3.4. Zauważmy, że pierwsza część dowodu Lematu 3.4 pozostaje prawdziwa również dla $a=2$ i $b=\frac{1}{2}$. Ponadto, nie musimy odwoływać się do Obserwacji 2.2, ponieważ nie korzystamy nigdzie z nierówności, w którą byłaby uwikłana całka (3.8).

(b). Z założenia oraz z ciągłości metryki Bergmana β_D wynika, że jest ona ograniczona na odcinku $(-\frac{1}{4},0)$. Oznacza to, że długość tego odcinka względem metryki Bergmana jest skończona. Stąd mamy, że D nie jest b–zupełny w punkcie 0 i w rezultacie $\widehat{\gamma}_D(0)<+\infty$ (Wniosek 3.3). Tym samym, założenia Lematu 2.5 są spełnione: jako krzywą α przyjmujemy parametryzację odcinka $(-\frac{1}{4},0)$ o stałej pochodnej; warunek (2.6) wynika z faktu, że $\widehat{\gamma}_D(0)<+\infty$; założenie $\Delta(0,\frac{1}{2})\setminus\Delta(0,\frac{1}{2^9})\subset D$ nie wpływa na zachowanie się metryki β_D w otoczeniu 0 (Twierdzenie 1.5).

Możemy zatem wykorzystać oszacowanie (2.13):

$$M_D(x;1)\geqslant C\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}(A_j(0)\setminus D)}}, \qquad x\in\Big[-\frac{1}{2^{j+5}},-\frac{1}{2^{j+4}}\Big], j\geqslant 9, \tag{3.12}$$

gdzie stała $C>0$ zależy tylko od zbioru D.

Dodatkowo, jądro Bergmana k_D jest ograniczone na odcinku $\big(-\frac{1}{4},0\big)$ — aby to pokazać, wystarczy np. powtórzyć Krok 2 z dowodu Twierdzenia 2.4.

Łącząc powyższe dwa fakty i Obserwację 1.2(e), dostajemy, że

$$\limsup_{j\to\infty}\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log\operatorname{cap}(A_j(0)\setminus D)}}<+\infty.$$

Pokazaliśmy wyżej, że $\widehat{\gamma}_D(0) < +\infty$, co oznacza, że szereg w warunku (3.7) jest zbieżny (Lemat 3.4). W takim razie, dla dostatecznie dużych liczb naturalnych k, mamy $r_k \leqslant \frac{1}{4}x_k$ i inkluzję

$$\overline{\Delta}(x_k, r_k) \subset A_j(0) \cup A_{j+1}(0) \setminus D,$$

dla pewnego $j = j(k) \geqslant 1$. Wynika stąd (i z Twierdzenia D.23(d)), że

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{x_k^2\sqrt{-\log r_k}} \\
&\qquad \leqslant \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{2^{2j(k)+2}}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(A_{j(k)}(0) \setminus D\right)}} + \frac{2^{2j(k)+4}}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(A_{j(k)+1}(0) \setminus D\right)}} \right) \\
&\qquad \leqslant 2 \limsup_{j\to\infty} \frac{2^{2j+2}}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(A_j(0) \setminus D\right)}} < +\infty,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Postępując analogicznie jak w dowodzie Lematu 3.9(b) można udowodnić nawet więcej, dzięki nierówności (3.12) (dla punktów x niekoniecznie rzeczywistych):

Obserwacja 3.10. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem typu (L), spełniającym warunek* (3.3). *Jeśli*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\left(A_j(0) \setminus D\right)}} = +\infty,$$

to

$$\lim_{D\ni z\to 0} M_D(z, 1) = +\infty \quad \textit{oraz} \quad \lim_{0>x\to 0} \beta_D(x) = +\infty.$$

Zbieżność szeregu w Lemacie 3.9(a) implikuje fakt, że obszar D nie jest b–zupełny w 0. Można w takim razie postawić pytanie, czy stąd, że

$$\lim_{0>x\to 0} \beta_D(x) = +\infty$$

wynika już zupełność obszaru D w sensie Bergmana. Poniższy przykład pokazuje, że nie musi tak być.

Przykład 3.11. *Niech*

$$D := \Delta(0, 1) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta}\left(\frac{1}{2^k}, r_k\right) \cup \{0\} \right),$$

gdzie $r_k > 0$ są takie, że $-\log r_k = k^4 2^{2k}$.

Wtedy

$$\lim_{0>x\to 0} \beta_D(x) = +\infty,$$

ale D nie jest b–zupełny w punkcie 0.

Dowód. Obszar D jest zupełny w sensie Bergmana, ponieważ (Wniosek 3.8(c))

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{-\log r_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Z drugiej strony,

$$\frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log \operatorname{cap}\,(A_j(0) \setminus D)}} \geqslant \frac{2^{2j}}{\sqrt{-\log \frac{1}{2} r_j}} \geqslant \frac{2^{2j+1}}{j^2 2^j}, \qquad j \geqslant 1,$$

bo $\overline{\Delta}\big(\frac{1}{2^j} - \frac{1}{2} r_j, \frac{1}{2} r_j\big) \subset A_j(0) \setminus D$. Z Obserwacji 3.10 dostajemy, że

$$\lim_{0 > x \to 0} \beta_D(x) = +\infty.$$

$\square$

ROZDZIAŁ IV

ZUPEŁNOŚĆ OBSZARÓW REINHARDTA

Jednym ze zbiorów podawanych jako przykład pseudowypukłego ograniczonego obszaru niehiperwypukłego, ale b–zupełnego jest poniższy obszar Reinhardta, skonstruowany przez Herborta ([Her 1999]):

$$D := \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \, |w|^2 < e^{-\frac{1}{|z|^2}}, |z| < 1\Big\}.$$

Problem, które pseudowypukłe ograniczone obszary Reinhardta w $\mathbb{C}^n$ są b–zupełne został całkowicie rozwiązany przez Zwonka ([Zwo 1999a]). Wynik ten (geometryczną charakteryzację tych obszarów) przytoczyliśmy w Rozdziale I (Twierdzenie 1.43). Wiadomo również, które obszary Reinhardta są hiperwypukłe ([Zwo 2000b], [Zwo 2000a], zob. Twierdzenie 1.42).

Kolejnym, pojawiającym się w naturalny sposób, jest problem postawiony przez Jarnickiego i Pfluga ([Jar–Pfl 2004]):

Podać charakteryzację wszystkich nieograniczonych pseudowypukłych obszarów Reinhardta, które są b–zupełne.

Przedstawimy jego częściowe rozwiązanie — analogon Twierdzenia 1.43 dla nieograniczonych pseudowypukłych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$ (Twierdzenie 4.1) oraz dla pseudowypukłych c–hiperbolicznych obszarów Reinhardta (Twierdzenie 4.2).

Przypomnijmy najpierw definicje stożków maksymalnych, które podaliśmy w Rozdziale I:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}(D) &:= \{v \in \mathbb{R}^n : \, a + \mathbb{R}_+ v \subset \log D\},\\
\widetilde{\mathfrak{C}}(D) &:= \{v \in \mathbb{R}^n : \, \text{istnieje} \lim_{t\to+\infty} \exp(a+tv) \in D\},\\
\mathfrak{C}'(D) &:= \mathfrak{C}(D) \setminus \widetilde{\mathfrak{C}}(D).
\end{aligned}$$

Definicje nie zależą od punktu $a \in \log D$, ponieważ, zgodnie z Twierdzeniem 1.41, $\log D$ jest wypukły.

TWIERDZENIE 4.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta (niekoniecznie ograniczonym) takim, że $\log D$ nie zawiera linii prostych. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *D jest b–zupełny.*
(b) *$\mathfrak{C}'(D) \cap \mathbb{Q}^2 = \varnothing$.*

Wnioskiem z już znanych twierdzeń jest następujący rezultat dotyczący c–hiperbolicznych obszarów Reinhardta.

Twierdzenie 4.2. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym c–hiperbolicznym obszarem Reinhardta. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *D jest b–zupełny.*

(b) $\mathfrak{C}'(D) \cap \mathbb{Q}^n = \varnothing$.

W obszarach nieograniczonych pojawia się problem istnienia metryki Bergmana, a nawet dodatniości jądra Bergmana. Pokażemy w Lemacie 4.8, że warunek (b) z Twierdzenia 4.1 implikuje β–hiperboliczność obszaru D (tzn. jądro Bergmana k_D jest dodatnie i β_D jest metryką). W przypadku Twierdzenia 4.2 wynika to z dowodu (zob. niżej).

Można zadać sobie pytanie, czy da sie w tym przypadku wykorzystać zacytowane przez nas w Rozdziale I, Twierdzenie 1.24 ([Chen–Zhang 2002]) dotyczące zupełności obszarów nieograniczonych.

Okazuje się, ze nie można go zastosować do nieograniczonych obszarów Reinhardta. Pokazuje to poniższy przykład.

Przykład 4.3. *Niech*

$$D := \big\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_2| < \min\{1, \exp(-|z_1| + 1)\}\big\}.$$

Wtedy D jest b–zupełny, ale nie są spełnione założenia Twierdzenia 1.24.

Dowód. Łatwo zauważyć, że $\log D = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < \min\{0, -\exp x_1 + 1\}\big\}$. Zatem $\mathfrak{C}(D) = \widetilde{\mathfrak{C}}(D) = \mathbb{R}^2_-$ oraz $\mathfrak{C}'(D) = \varnothing$. Z Twierdzenia 4.1 wynika, że D jest b–zupełny.

Niech $g_D(w, \cdot)$ będzie funkcją Greena obszaru D z biegunem w punkcie $w \in D$ (zob. Dodatek). Wtedy funkcja $z \mapsto g_D(w, (z, 0))$ jest ograniczona od góry i subharmoniczna na $\mathbb{C}$ (Twierdzenie D.31(a)), a zatem musi być stała (Twierdzenie D.17(c)). Oznacza to, że warunek (1.9) z założenia Twierdzenia 1.24 nie jest spełniony.[9] □

Zanim przystąpimy do dowodów, przypomnijmy kilka definicji i spostrzeżeń z Rozdziału 1.3.

Dla obszaru Reinhardta $D \subset \mathbb{C}^n$ zdefiniujmy:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}(D) &:= \{z^\alpha \in L^2_h(D) : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}(D) &:= \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : z^\alpha \in L^2_h(D)\}, \\ J(D) &:= \{j \in \{1, \dots, n\} : V_j \cap D \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

Będziemy wykorzystywać dwie poniższe obserwacje (Lemat 1.46 i Obserwacja 1.48):

Lemat 4.4 ([Zwo 1999a], [Zwo 2000a]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta oraz niech $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Wtedy*

$$z^\alpha \in L^2_h(D) \iff \forall\, v \in \mathfrak{C}(D) \setminus \{0\} : \langle \alpha + \mathbf{1}, v\rangle < 0.$$

[9] Można pokazać nawet więcej dla obszaru D — w klasie pseudowypukłych obszarów Reinhardta obszary hiperwypukłe muszą koniecznie być ograniczone ([Zwo 2000b], [Zwo 2000a], zob. Twierdzenie 1.42), a więc D z Przykładu 4.3 nie jest hiperwypukły.

Obserwacja 4.5 (zob. Obserwacja 1.48). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta. Zbiór* $\log D$ *zawiera linię prostą wtedy i tylko wtedy, gdy* $L_h^2(D) = \{0\}$.

W szczególności, jeśli $\log D$ *nie zawiera żadnej linii prostej, to zbiory* $\mathcal{E}(D)$ *i* $\mathcal{A}(D)$ *są niepuste.*

W związku z powyższą obserwacją, założenie, że $\log D$ nie zawiera linii prostych, pojawiające się w Twierdzeniu 4.1 oraz w następnych wynikach nie jest istotnym ograniczeniem.

Dla $A = [A_k^j]_{j,k=1,\dots,n} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, zdefiniujmy odwzorowanie:

$$\Phi_A(z) := (z^{A^1}, \dots, z^{A^n}),$$

dla takich $z \in \mathbb{C}^n$, że $z_k \neq 0$, gdy $A_k^j < 0$ dla pewnego $j = 1, \dots, n$. (Oznaczamy $z^{A^j} := (z_1^{A_1^j}, \dots, z_n^{A_n^j})$, A^j jest j–tym wierszem macierzy A).

Będą nas interesować tylko takie odwzorowania Φ_A, które są biholomorfizmami na $\mathbb{C}_*^n$, tzn. spełniające warunek $|\det A| = 1$ (lub, równoważnie $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ oraz $\det A \neq 0$) (zob. Obserwacja 1.49).

Dowód Twierdzenia 4.2. Z Twierdzenia 1.51 wynika, że istnieje odwzorowanie algebraiczne

$$\Phi_A : D \to \mathbb{C}^n, \quad \text{gdzie } A \in \mathbb{Z}^{n\times n}, |\det A| = 1, \tag{4.1}$$

które przekształca biholomorficznie D na obszar ograniczony.

Obserwacja 1.1(h) i Obserwacja 1.2(f) gwarantują, że D, jako obszar biholomorficzny z ograniczonym, jest β–hiperboliczny. Dzięki Twierdzeniu 1.43, wystarczy tylko sprawdzić, że warunek (b) jest niezmiennikiem dla biholomorfizmów algebraicznych. Dla odwzorowania Φ_A takiego, jak w warunku (4.1), mamy

$$\begin{aligned} &\mathfrak{C}(\Phi_A(D)) = A\mathfrak{C}(D) \\ \text{oraz} \qquad &\widetilde{\mathfrak{C}}(\Phi_A(D)) = A\widetilde{\mathfrak{C}}(D). \end{aligned}$$

Druga równość zachodzi dzięki tożsamości $\Phi_A(e^{a+tv}) = e^{A(a+tv)}$, dla $a \in \log D, v \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. A zatem jest także $\mathfrak{C}'(\Phi_A(D)) = A\mathfrak{C}'(D)$.

Z drugiej strony $A\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^n$, jeśli A jest macierzą o wyrazach całkowitych.

Warunek (b) jest zatem równoważny warunkowi $\mathfrak{C}'(\Phi_A(D)) \cap \mathbb{Q}^n = \varnothing$. □

Podamy teraz pewne charakteryzacje dodatniości jądra Bergmana i istnienia metryki Bergmana.

Lemat 4.6. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że* $\log D$ *nie zawiera linii prostych. Wtedy następujące dwa warunki są równoważne:*

(a) *Jądro Bergmana k_D jest ściśle dodatnie na D.*
(b) *Istnieje $\alpha \in \mathcal{A}(D)$ takie, że $\alpha_j = 0$ dla każdego $j \in J(D)$.*[10]

[10] W przypadku, gdy $J(D) = \varnothing$, warunek ten można rozumieć w dwojaki sposób: albo jako warunek pusto spełniony albo jako "Istnieje $\alpha \in \mathcal{A}(D)$". Obydwie możliwości są równoważne, ponieważ $\mathcal{A}(D) \neq \varnothing$, gdy $\log D$ nie zawiera linii prostych (Obserwacja 4.5).

Dowód. Dla dowodu lematu użyjemy Wniosku 1.4(a).

(b) $\Longrightarrow$ (a).

Zauważmy, że zbiór $\mathcal{E}(D)$ jest niepusty (Obserwacja 4.5). Stąd natychmiast wynika warunek (1.2) i w konsekwencji dodatniość jądra Bergmana.

(a) $\Longrightarrow$ (b).

Zbiór $\mathcal{E}(D)$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $L^2_h(D)$, więc istnieją odpowiednie stałe $a_\alpha > 0$ takie, że

$$k_D(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}(D)} a_\alpha |z^\alpha|^2, \qquad z \in D.$$

Można założyć, że $J(D) \neq \varnothing$. Dzięki własnościom pseudowypukłych obszarów Reinhardta (Twierdzenie 1.41) istnieje punkt $w \in D$ taki, że $w_j = 0$ dla wszystkich $j \in J(D)$. Mamy też $\alpha_j \geqslant 0$ dla $j \in J(D)$, $\alpha \in \mathcal{A}(D)$. Możemy zatem napisać

$$k_D(w) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}(D)\\ \alpha_j=0,\ \text{jeżeli } j\in J(D)}} a_\alpha |w^\alpha|^2 > 0,$$

z czego wnioskujemy istnienie żądanego α. □

Lemat 4.7. *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że $\log D$ nie zawiera linii prostych. Wtedy następujące dwa warunki są równoważne:*

(a) *Metryka Bergmana β_D jest dodatnio określona w każdym punkcie D.*

(b) $\forall\, j \in J(D)\ \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathcal{A}(D) : \alpha \neq \beta, \alpha_j = \beta_j = 0.$

Dowód. (a) $\Longrightarrow$ (b).

Można założyć, że $J(D) \neq \varnothing$. Załóżmy, że $2 \in J(D)$, innymi słowy $V_2 \cap D \neq \varnothing$. (Przypadek, gdy $1 \in J(D)$ dowodzi się analogicznie).

Ustalmy punkt $z^0 \in D, z^0 = (z^0_1, 0) \neq (0,0)$ i wektor $X \in \mathbb{C}^2, X = (X_1, 0) \neq (0,0)$. Z Wniosku 1.4 oraz Lematu 4.6 wynika istnienie funkcji $f \in L^2_h(D)$ takiej, że $f(z^0) = 0$ i $f'(z^0)X \neq 0$. Na podstawie Twierdzenia D.12 mamy następujące przedstawienie

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}(D)} a_\alpha z^\alpha.$$

Stąd

$$0 \neq f'(z^0)X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}(D):\, \alpha_2=0} \alpha_1 a_\alpha z_1^{\alpha_1-1} X_1,$$

więc istnieje $\alpha \in \mathcal{A}(D)$ takie, że $\alpha_2 = 0$. Co więcej, gdyby istniało tylko jedno takie α, wtedy byłoby $f(z^0) \neq 0$.

(b) $\Longrightarrow$ (a).

Z założenia i Lematu 4.6 wynika, że warunek (1.2) zachodzi. Pozostaje pokazać warunek (1.3), aby móc zastosować Wniosek 1.4.

Weźmy dowolny punkt $z^0 \in D$ i wektor $X \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Rozważymy trzy przypadki.

Przypadek 1: $z^0 = (0,0)$.

Mamy wtedy $J(D) = \{1,2\}$, co implikuje istnienie $(\alpha_1, 0), (0, \beta_2) \in \mathcal{A}(D)$ takich, że $\alpha_1, \beta_2 > 0$. Zdefiniujmy

$$C := \{a \in \mathbb{R}^2 : \langle a, v\rangle < 0,\ \text{dla każdego } v \in \mathfrak{C}(D) \setminus \{0\}\}. \tag{4.2}$$

Stożek C jest wypukły. Ponadto, z Lematu 4.4 wynika, że $(\alpha_1+1,1),(1,\beta_2+1)\in C$. Stąd możemy wyciągnąć wniosek, że również $(1,1),(2,1),(1,2)\in C$, co oznacza $(0,0),(1,0),(0,1)\in\mathcal{A}(D)$.

Połóżmy
$$f(z):=z_1+cz_2,$$
gdzie c jest stałą taką, że $X_1+cX_2\neq 0$. Oczywiście $f(0)=0$, $f\in L^2_h(D)$ oraz
$$f'(0)X:=X_1+cX_2\neq 0.$$

Przypadek 2: $z^0=(z_1^0,0)$, $z_1^0\neq 0$.

Z założenia mamy istnienie $(\alpha_1,0)\neq(\beta_1,0)\in\mathcal{A}(D)$ a z Lematu 4.4, dodatkowo, $(2\alpha_1+1,1)\in\mathcal{A}(D)$.

Jeśli $X_2\neq 0$, niech
$$f(z):=z_1^{2\alpha_1+1}z_2.$$
Wtedy $f'(z_1^0,0)X=(z_1^0)^{2\alpha_1+1}X_2\neq 0$.

Jeśli $X_2=0$, to
$$f(z):=z_1^{\alpha_1}-(z_1^0)^{\alpha_1-\beta_1}z_1^{\beta_1}.$$
W rezultacie, $f'(z_1^0,0)X=(z_1^0)^{\alpha_1-1}(\alpha_1-\beta_1)X_1\neq 0$.

W obydwu przypadkach mamy $f\in L^2_h(D)$ i $f(0)=0$.

Przypadek 3: $z^0\in\mathbb{C}^2_*$.

Niech $w:=\left(\frac{X_1}{z_1^0},\frac{X_2}{z_2^0}\right)$. Zbiór $\mathcal{A}(D)$ jest niepusty (Obserwacja 4.5). Możemy znaleźć $\alpha,\beta\in\mathcal{A}(D)$ takie, że
$$\langle\alpha-\beta,w\rangle\neq 0,$$
ponieważ stożek C zdefiniowany wzorem (4.2) jest otwarty. Połóżmy
$$f(z):=z^\alpha-(z^0)^{\alpha-\beta}z^\beta.$$
Zachodzi $f\in L^2_h(D)$, $f(z^0)=0$ oraz
$$f'(z^0)X=(z^0)^\alpha\left((\alpha_1-\beta_1)\frac{X_1}{z_1^0}+(\alpha_2-\beta_2)\frac{X_2}{z_2^0}\right)=(z^0)^\alpha\langle\alpha-\beta,w\rangle\neq 0,$$
co kończy dowód. □

W Twierdzeniu 4.1 warunek (a) zawiera w sobie założenie o dodatniości jądra i istnieniu metryki Bergmana. Pokażemy teraz, że warunek (b) również to implikuje.

Lemat 4.8. *Niech $D\subset\mathbb{C}^2$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że $\log D$ nie zawiera linii prostych.*

Jeżeli $\mathfrak{C}'(D)\cap\mathbb{Q}^2=\varnothing$, to D jest β–hiperboliczny (tzn. $k_D>0$ oraz β_D jest dodatnio określona).

Dowód. Skorzystamy z dwóch poprzednich lematów oraz z faktu, że $\mathcal{A}(D)\neq\varnothing$ (Obserwacja 4.5). Przypadek, gdy $J(D)=\varnothing$ jest natychmiastowy. Jeżeli $J(D)$ jest niepusty, to zachodzi co najmniej jedna z inkluzji $\mathbb{R}_-\times\{0\}\subset\mathfrak{C}(D)$ lub $\{0\}\times\mathbb{R}_-\subset\mathfrak{C}(D)$.

Ponieważ stożek $\mathfrak{C}(D)$ jest wypukły oraz $\widetilde{\mathfrak{C}}(D)\subset\mathbb{R}^2_-$, musi zachodzić również $\mathfrak{C}(D)\subset\mathbb{R}^2_-$. Na podstawie Lematu 4.4 oznacza to, że $\mathbb{Z}^2_+\subset\mathcal{A}(D)$. Zastosowanie Lematów 4.6 i 4.7 kończy dowód. □

Podamy teraz pewną charakteryzację zbioru $\mathfrak{C}(D)$ dla $D\subset\mathbb{C}^2$.

LEMAT 4.9. *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że $\log D$ nie zawiera linii prostych. Jeżeli $\mathfrak{C}'(D) \cap \mathbb{Q}^2 = \varnothing$, to*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}(D) = \mathbb{R}^2_- &&\iff && D \cap V_1 \cap V_2 \neq \varnothing,\\
&\mathfrak{C}(D) = \mathbb{R}_- \times \{0\} &&\iff && D \cap V_1 \neq \varnothing, D \cap V_2 = \varnothing,\\
&\mathfrak{C}(D) = \{0\} \times \mathbb{R}_- &&\iff && D \cap V_1 = \varnothing, D \cap V_2 \neq \varnothing,\\
&\mathfrak{C}(D) = \mathbb{R}_+ v \quad \text{dla pewnego } v \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}v \cap \mathbb{Q}^2 = \{0\} &&\iff && D \cap (V_1 \cup V_2) = \varnothing.
\end{aligned}$$

DOWÓD. Możemy założyć, że $(1,1) \in D$.

Podobnie jak w dowodzie poprzedniego lematu można stwierdzić, że jeśli $D \cap V_1 \neq \varnothing$, to $\mathbb{R}_- \times \{0\} \subset \mathfrak{C}(D)$ oraz, analogicznie, $\{0\} \times \mathbb{R}_- \subset \mathfrak{C}(D)$, gdy $D \cap V_2 \neq \varnothing$.

Zauważmy, że jeśli $v \in \mathfrak{C}(D) \cap \mathbb{Q}^2$, to

$$\lim_{t \to \infty} \left(e^{tv_1}, e^{tv_2}\right) =: w \in D,$$

ponieważ $\mathfrak{C}(D) \cap \mathbb{Q}^2 \subset \widetilde{\mathfrak{C}}(D) \subset \mathbb{R}^2_-$. Ponadto $w_j = 0$, gdy $v_j < 0$ i $w_j = 1$, gdy $v_j = 0$.

Powyższa obserwacja oraz wypukłość stożka $\mathfrak{C}(D)$ dają nam tezę lematu. □

Dodajmy jeszcze, że w ostatnim przypadku $\mathfrak{C}(D) = \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy D jest ograniczony oraz $\overline{D} \cap (V_1 \cup V_2) = \varnothing$.

Zanim przystąpimy do dowodu Twierdzenia 4.1, przedstawimy jeszcze kilka użytecznych wyników.

LEMAT 4.10. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym obszarem Reinhardta takim, że $J(D) = \{1, \dots, k\}$ oraz niech $\Phi = \Phi_A : D \to \mathbb{C}^n$ będzie algebraicznym biholomorfizmem na obraz.*

Wtedy istnieje permutacja $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ taka, że

$$\sigma \circ \Phi : \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}_* \to \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}_*$$

jest biholomorfizmem oraz $\sigma \circ \Phi(V_j) = V_j$ dla $j = 1, \dots, k$.

DOWÓD. Dla macierzy $A = \left[A^l_m\right]_{l,m=1,\dots,n} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ skojarzonej z biholomorfizmem Φ_A mamy $|\det A| = 1$. Co więcej,

$$A^l_m \geqslant 0, \qquad \text{dla } l = 1, \dots, n,\ m = 1, \dots, k,$$

ponieważ $D \cap V_j \neq \varnothing$ dla $j = 1, \dots, k$.

Weźmy dowolny punkt $z \in D \cap \mathbb{C}^n_*$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\det \Phi'(z) &= \det \left[\frac{\partial \Phi_l}{\partial z_m}(z)\right]_{l,m=1\dots,n} = \det \left[A^l_m \frac{1}{z_m} z^{A^l}\right]_{l,m=1\dots,n}\\
&= \prod_{l=1}^n z^{A^l} \frac{1}{z_1 \dots z_n} \det \left[A^l_m\right]_{l,m=1\dots,n} = \pm z_1^{\sum_{l=1}^n A^l_1 - 1} \dots z_n^{\sum_{l=1}^n A^l_n - 1}.
\end{aligned}$$

Pierwsze i ostatnie wyrażenie w powyższym ciągu równości są funkcjami holomorficznymi w D. Dlatego zachodzi również równość dla punktu $z = (0, \dots, 0, z_{k+1}, \dots, z_n) \in D$:

$$0 \neq \det \Phi'(z) = \pm z_1^{\sum_{l=1}^n A_1^l - 1} \dots z_n^{\sum_{l=1}^n A_n^l - 1}.$$

Wykorzystując zerowanie się współrzędnych $z_1 = \dots = z_k = 0$, dostajemy stąd

$$\sum_{l=1}^n A_j^l = 1 \quad \text{dla } j = 1, \dots, k.$$

Ponieważ $A_j^l \in \mathbb{Z}_+$ dla $j = 1, \dots, k$, możemy założyć (permutując współrzędne w razie potrzeby), że

$$A_j^l = \delta_{lj}, \quad \text{gdy } j = 1, \dots, k, \; l = 1, \dots, n,$$

gdzie δ_{lj} oznacza deltę Kroneckera.

W konsekwencji, otrzymujemy $\det \Phi'(z) \neq 0$ dla $z \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}_*^{n-k}$ oraz $\Phi(V_j) \subset V_j, j = 1, \dots, k$. To samo możemy udowodnić dla $\Phi^{-1} = \Phi_{A^{-1}}$. □

Poniższe lematy pochodzą z pracy [Zwo 2000a] (zob. również [Zwo 1999a]). Podajemy je bez dowodów.

Lemat 4.11 ([Zwo 1999a], [Zwo 2000a]). *Niech $\beta, v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, $\{x^\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ będą takie, że $\|x^\nu\| \to \infty$, $\frac{x^\nu}{\|x^\nu\|} \to v$, gdy $\nu \to \infty$, oraz $\langle \beta, v \rangle < 0$. Wtedy*

$$\langle \beta, x^\nu \rangle \to -\infty, \; \textit{gdy} \;\; \nu \to +\infty.$$

Lemat 4.12 ([Zwo 1999a], [Zwo 2000a]). *Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ domkniętym i wypukłym stożkiem niezawierającym linii prostych i takim, że $C \cap \mathbb{Q}^n = \{0\}$.*

Wtedy dla dowolnego $\delta > 0, v \in C \setminus \{0\}$ istnieje $\beta \in \mathbb{Z}^n$ takie, że

$$\langle \beta, v \rangle > 0,$$
$$\langle \beta, w \rangle < \delta \; \textit{dla każdego} \; w \in C, \|w\| = 1.$$

Lemat 4.13 ([Zwo 1999a], [Zwo 2000a]). *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie pseudowypukłym ograniczonym obszarem Reinhardta. Ustalmy $z_0 \in \partial D$ spełniający następujący warunek:*

$$\textit{dla dowolnego } j \in \{1, \dots, n\}, \; \textit{jeśli } z_j^0 = 0, \; \textit{to } D \cap V_j \neq \varnothing. \tag{4.3}$$

Wtedy dla dowolnego ciągu $(z_k)_{k=1}^\infty \subset D$ zbieżnego do z_0 oraz dla dowolnego $f \in$ $\operatorname{Span} \mathcal{E}(D)$

$$\lim_{j \to \infty} \frac{|f(z_k)|}{\sqrt{K_D(z_k)}} = 0. \tag{4.4}$$

UWAGA 4.14. *Podprzestrzeń* $\operatorname{Span}\mathcal{E}(D)$ *jest gęsta w* $L_h^2(D)$*, więc warunek* (4.4) *w poprzednim lemacie zachodzi dla wszystkich* $f \in L_h^2(D)$*.*

DOWÓD TWIERDZENIA 4.1. (a) $\Longrightarrow$ (b)

Dowód tej implikacji nie różni się w istotnych szczegółach od dowodu Twierdzenia 1.43 (zob. [Zwo 1999a], [Zwo 2000a]) i jest prawdziwy nawet dla obszarów nieograniczonych w $\mathbb{C}^n$.

Przytoczymy go tutaj ze względu na kompletność.

Załóżmy, że $(1,1) \in D$ i weźmy $v \in \mathfrak{C}'(D) \cap \mathbb{Q}^2$. Możemy założyć, że $v \in \mathbb{Z}^2$ oraz v_1, v_2 są względnie pierwsze. Wystarczy pokazać, że krzywa $(t^{-v_1}, t^{-v_2}), 0 < t < 1$, ma skończoną długość względem metryki Bergmana.

Połóżmy

$$\varphi(\lambda) := \big(\lambda^{-v_1}, \lambda^{-v_2}\big), \qquad \lambda \in \Delta(0,1) \setminus \{0\}.$$

Oczywiście $\varphi \in \mathcal{O}\big(\Delta(0,1) \setminus \{0\}, D\big)$. Niech $u(\lambda) := k_D(\varphi(\lambda))$. Dzięki Lematowi 4.4 mamy

$$u(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2 \colon \langle \alpha+1, v\rangle} a_\alpha |\lambda|^{-2\langle \alpha, v\rangle} = \sum_{j=j_0}^{\infty} b_j |\lambda|^{2j},$$

gdzie $b_{j_0} \neq 0$. Następnie

$$\beta_D^2\big(\varphi(\lambda); \varphi'(\lambda)\big) = \frac{\partial^2 \log u(\lambda)}{\partial\lambda\partial\overline{\lambda}} = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\overline{\lambda}}\left(\log \sum_{j=j_0}^{\infty} b_j |\lambda|^{2j-2j_0}\right).$$

Ponieważ ostatnie wyrażenie jest ograniczone dla $0 < |\lambda| < 1$, więc również mamy $\int_0^1 \beta_D\big(\varphi(t); \varphi'(t)\big)\, dt < +\infty$, co kończy dowód tej implikacji.

(b) $\Longrightarrow$ (a)

W dowodzie wykorzystamy kryterium Kobayashiego (Twierdzenie 1.9). Lemat 4.8 gwarantuje nam, że warunki (1.2) oraz (1.3) są spełnione. Wystarczy zweryfikować warunek (1.5) dla funkcji z podprzestrzeni $\operatorname{Span}\mathcal{E}(D)$, która jest gęsta w $L_h^2(D)$. Przestrzeń $\operatorname{Span}\mathcal{E}(D)$ składa się z kombinacji liniowych elementów z $\mathcal{E}(D)$, więc możemy się w rzeczywistości ograniczyć w dowodzie jedynie do funkcji ze zbioru $\mathcal{E}(D)$.

Weźmy dowolny ciąg $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty \subset D$, nieposiadający punktu skupienia w D oraz dowolną funkcję $z^\alpha \in \mathcal{E}(D)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $(1,1) \in D$ oraz $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty \subset D \cap \mathbb{C}_*^2$ (dzięki ciągłości jądra Bergmana).

Rozważymy trzy przypadki:

I. Ciąg $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty$ nie ma punktu skupienia w $\mathbb{C}^2$.

II. Ciąg $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty$ posiada punkt skupienia $z_0 \in \partial D$ spełniający warunek (4.3).

III. Punkt $(0,0) \in \partial D$ jest punktem skupienia ciągu $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty$.

Zwróćmy uwagę, że gdyby istniał punkt $z_0 \neq (0,0)$ nie spełniający warunku (4.3), dokładnie jedna z jego współrzędnych musiałaby być zerowa — dla ustalenia uwagi niech $z_1 = 0, z_2 \neq 0$. Wtedy $D \cap V_1 \neq \varnothing$, czyli $(-1,0) \in \mathfrak{C}'(D)$, co przeczy założeniu. Zatem powyższe trzy przypadki wyczerpują wszystkie możliwości zachowania się ciągu $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty$.

Przypadek I: Ciąg $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty$ nie ma punktu skupienia w $\mathbb{C}^2$

Niech

$$x^\nu := \log|z^\nu|, \qquad \nu \geqslant 1.$$

Mamy $\|x^\nu\| \to \infty$. Ponadto, biorąc w razie potrzeby stosowny podciąg, dostajemy

$$\frac{x^\nu}{\|x^\nu\|} \to v \in \mathfrak{C}(D), \qquad \nu \to \infty.$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\mathfrak{C}(D) \subset \mathbb{R}^2_-$.

Wtedy musi być $v = (-1, 0)$ lub $v = (0, -1)$. Załóżmy, że $v = (-1, 0)$. To oznacza, że $x_1^\nu \to -\infty$, czyli $z_1^\nu \to 0$ i $|z_2^\nu| \to +\infty$. Co więcej, z Lematu 4.9 wynika, że $D \cap V_1 \neq \varnothing$ oraz $\alpha_1 \geqslant 0$. Ponadto, inkluzja $\mathfrak{C}(D) \subset \mathbb{R}^2_-$ i Lemat 4.4 implikują, że funkcje stałe należą do $L^2_h(D)$.

Jeśli $\alpha_1 > 0$, to

$$\frac{|(z^\nu)^\alpha|}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} \leqslant \|1\|_D e^{\langle x^\nu, \alpha\rangle} \to 0, \qquad \nu \to \infty,$$

dzięki Lematowi 4.11.

Jeśli $\alpha_1 = 0$, wtedy możemy wziąć $\beta_2 \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $\beta_2 > \max\{\alpha_2, 0\}$. Mamy $z_2^{\beta_2} \in L^2_h(D)$ oraz

$$\frac{|(z^\nu)^\alpha|}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} = \frac{|z_2^\nu|^{\alpha_2}}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} \leqslant \|z_2^{\beta_2}\|_D |z_2^\nu|^{\alpha_2 - \beta_2} \to 0, \qquad \nu \to \infty,$$

ponieważ $z_2^\nu \to \infty$, gdy $\nu \to \infty$.

Jeżeli nie zachodzi $\mathfrak{C}(D) \subset \mathbb{R}^2_-$, to musi być $\mathfrak{C}(D) = \mathbb{R}_+ v$ dla pewnego $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}\cdot\mathbb{Q}^2$. Możemy zatem skorzystać z Lematu 4.12 i wziąć $\beta \in \mathbb{Z}^2$ spełniające warunek $0 < \langle \beta, v\rangle < -\langle \alpha + \mathbf{1}, v\rangle$. Mamy wtedy $z^{\alpha+\beta} \in L^2_h(D)$, bo $\langle \alpha + \beta + \mathbf{1}, v\rangle < 0$. Dzięki Lematowi 4.11, dostajemy

$$\frac{|(z^\nu)^\alpha|}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} \leqslant \|z^{\alpha+\beta}\|_D \big|(z^\nu)^{-\beta}\big| = \|z^{\alpha+\beta}\|_D e^{-\langle x^\nu, \beta\rangle} \to 0 \qquad \nu \to \infty.$$

Przypadek II: Ciąg $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty$ posiada punkt skupienia $z_0 \in \partial D$ spełniający warunek (4.3).

Zdefiniujmy obszar $\widetilde{D}$ w następujący sposób

$$\begin{aligned} &\widetilde{D} := D \setminus (V_1 \cup V_2), &&\text{jeżeli } z^0 \in \mathbb{C}^2_*,\\ &\widetilde{D} := D \setminus V_1, &&\text{jeżeli } z^0_2 = 0\\ \text{lub}\quad &\widetilde{D} := D \setminus V_2, &&\text{jeżeli } z^0_1 = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\log D = \log \widetilde{D}$, $L^2_h(D) = L^2_h(\widetilde{D})$ oraz $\mathfrak{C}(D) = \mathfrak{C}(\widetilde{D})$.

Ponadto, $\widetilde{D} \cap V_j$, $j = 1, 2$, może być albo pusty albo c–hiperboliczny (w tym wypadku koło albo pierścień, niekoniecznie ograniczony). Twierdzenie 1.51 pozwala nam wziąć biholomorfizm algebraiczny $\Phi = \Phi_A$ przekształcający $\widetilde{D}$ na obszar ograniczony.

Z Lematu 4.10 wynika, że $\det \Phi'(z^0) \neq 0$, a punkt $\Phi(z^0) \in \partial\Phi(\widetilde{D})$ spełnia warunek (4.3). Z faktu, że

$$f \circ \Phi^{-1} \cdot \det(\Phi^{-1})' \in L^2_h(\Phi(\widetilde{D})) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in L^2_h(D)$$

oraz Lematu 4.13, mamy dla dowolnego $f \in L_h^2(D)$ (a więc i dla $f(z) = z^\alpha$, które zostało ustalone na początku dowodu):

$$\frac{|f(z^\nu)|}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} = \frac{|f(z^\nu)|}{\sqrt{k_{\widetilde{D}}(z^\nu)}} = \frac{\left|f \circ \Phi^{-1}\big(\Phi(z^\nu)\big)\right|}{\sqrt{k_{\Phi(\widetilde{D})}\big(\Phi(z^\nu)\big)}\left|\det \Phi'(z^\nu)\right|}$$
$$= \frac{\left|\big(f \circ \Phi^{-1}\big)\big(\Phi(z^\nu)\big)\det(\Phi^{-1})'\big(\Phi(z^\nu)\big)\right|}{\sqrt{k_{\Phi(\widetilde{D})}\big(\Phi(z^\nu)\big)}} \to 0 \qquad (\nu \to \infty).$$

Przypadek III: Punkt $(0,0) \in \partial D$ jest punktem skupienia ciągu $(z^\nu)_{\nu=1}^\infty$.
Podobnie, jak w dowodzie Przypadku I, zdefiniujmy

$$x^\nu := \log|z^\nu|, \qquad \nu \geqslant 1,$$

i załóżmy (wybierając ewentualnie odpowiedni podciąg i przenumerowując jego wyrazy), że

$$\frac{x^\nu}{\|x^\nu\|} \to v \in \mathfrak{C}(D), \qquad \nu \to \infty.$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $D \cap V_1 \neq \varnothing$ i $D \cap V_2 = \varnothing$. (Przypadek, gdy $D \cap V_2 \neq \varnothing$ i $D \cap V_1 = \varnothing$ jest symetryczny). Mamy zatem $\alpha_1 \geqslant 0$ oraz, z Lematu 4.9, $\mathfrak{C}(D) = \mathbb{R}_- \times \{0\}$, co oznacza, że $v = (-1, 0)$ i $1 \in L_h^2(D)$.
Jeżeli $\alpha_1 > 0$, to stosujemy Lemat 4.11:

$$\frac{|(z^\nu)^\alpha|}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} \leqslant \|1\|_D e^{\langle x^\nu, \alpha\rangle} \to 0, \qquad \nu \to \infty.$$

Gdy $\alpha_1 = 0$, wtedy Lemat 4.4 gwarantuje istnienie $\beta_2 \in \mathbb{Z}$ takiego, że $\beta_2 < \alpha_2$ oraz $z_2^{\beta_2} \in L_h^2(D)$. Zatem

$$\frac{|(z^\nu)^\alpha|}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} = \frac{|z_2^\nu|^{\alpha_2}}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} \leqslant \|z_2^{\beta_2}\|_D |z_2^\nu|^{\alpha_2 - \beta_2} \to 0, \qquad \nu \to \infty,$$

ponieważ $z_2^\nu \to 0$, gdy $\nu \to \infty$.
Pozostaje nam jeszcze do rozpatrzenia przypadek, gdy $D \cap (V_1 \cup V_2) = \varnothing$.
Z Lematu 4.9 wnioskujemy, że v jest wektorem niewymiernym — takim, że $\mathbb{R}v \cap \mathbb{Q}^2 = \{0\}$. Lemat 4.12, zastosowany do stożka $\mathbb{R}_+ v$ i $\delta = \langle \alpha + \mathbf{1}, v\rangle$, daje nam istnienie $\beta \in \mathbb{Z}^2$ takiego, że $0 < \langle \beta, v\rangle < -\langle \alpha + \mathbf{1}, v\rangle$. Z kolei, z Lematu 4.4 dostajemy $z^{\alpha+\beta} \in L_h^2(D)$, bo $\langle \alpha + \beta + \mathbf{1}, v\rangle < 0$. Ponownie korzystamy z Lematu 4.11:

$$\frac{|(z^\nu)^\alpha|}{\sqrt{k_D(z^\nu)}} \leqslant \|z^{\alpha+\beta}\|_D \left|(z^\nu)^{-\beta}\right| = \|z^{\alpha+\beta}\|_D e^{-\langle x^\nu, \beta\rangle} \to 0 \qquad \nu \to \infty.$$

□

DODATEK

Definicje i rezultaty, zebrane poniżej, zostały zaczerpnięte z następujących pozycji: [Jak–Jar 1998] (Funkcje holomorficzne, Funkcje plurisubharmoiniczne), [Ran 1995] i [Lan 1972] (Teoria potencjału), [Kli 1991] (Zespolona funkcja Greena) oraz [Fed 1969]. Ze względu na wygodę oraz potrzeby niniejszej rozprawy, niektóre z nich zostały podane w formie innej niż w oryginale.

Funkcje holomorficzne

Definicja D.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy *holomorficzną* ($f \in \mathcal{O}(\Omega)$), jeśli dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ istnieje $r \in (0, \operatorname{dist}(a, \partial\Omega))$ i liczby $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \subset \mathbb{C}$ takie, że

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} a_\alpha (z-a)^\alpha, \qquad z \in \Delta(a,r)^n.$$

Odwzorowanie $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \to \mathbb{C}^m$, $(m > 1)$ nazywamy *odwzorowaniem holomorficznym* ($f \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^m)$), jeśli $f_j \in \mathcal{O}(\Omega), j = 1, \dots, m$.

Jeżeli Ω_1 jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}^n$ oraz $f : \Omega \to \Omega_1$ jest bijektywnym odwzorowaniem holomorficznym, to f nazywamy *biholomorfizmem* lub *odwzorowaniem biholomorficznym*, a o zbiorach Ω, Ω_1 mówimy, że są *biholomorficzne*.

Twierdzenie D.2 (Zasada identyczności). *Jeżeli $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem oraz $f, g \in \mathcal{O}(D)$, to następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \equiv g$.
(ii) $\operatorname{int}\{z \in D : f(z) = g(z)\} \neq \varnothing$.

Twierdzenie D.3 (Wzór całkowy Cauchy'ego). *Niech $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{C}$ będzie ograniczonymi obszarami, których brzeg jest skończoną sumą rozłącznych łuków Jordana, zorientowanych dodatnio. Oznaczmy $D := D_1 \times \dots \times D_n$. Jeżeli $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, to zachodzi wzór*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D_1} \cdots \int_{\partial D_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in D.$$

Definicja D.4. Dla zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ zdefiniujmy

$$L^2_h(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f(z)|^2 \, d\mathcal{L}^{2n}(z) < +\infty\}.$$

Jest to przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g\rangle_\Omega := \int_\Omega f(z)\overline{g}(z)\, d\mathcal{L}^{2n}(z), \qquad f, g \in L^2_h(\Omega),$$

i normą $\|f\|_\Omega := \langle f, f\rangle_D$.

Lemat D.5. *Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ oraz $r > 0$, spełniających warunek $K + \overline{\Delta}(0, r)^n \subset \Omega$, istnieje stała $C > 0$ taka, że*

$$\max_{z\in K} |f(z)| \leqslant C\|f\|_\Omega.$$

Twierdzenie Riemanna D.6. *Niech $D \subsetneq \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym (którego brzeg jest spójny). Wtedy D jest biholomorficzny z kołem jednostkowym.*

Twierdzenie Poincaré'go D.7. *Dla $n > 1$ kula jednostkowa $\mathbb{B}_n$ nie jest biholomorficzna z polidyskiem $\Delta(0, 1)^n$.*

Definicja D.8. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym. Mówimy, że Ω jest *obszarem holomorficzności*, jeśli nie istnieją obszary $\widetilde{\Omega}, \Omega_0 \subset \mathbb{C}^n$, takie, że $\widetilde{\Omega} \not\subset \Omega$, $\varnothing \neq \Omega_0 \subset \Omega \cap \widetilde{\Omega}$ i spełniające warunek

$$\text{dla dowolnego } \ f \in \mathcal{O}(\Omega) \ \text{ istnieje } \ \widetilde{f} \in \widetilde{\Omega} \ \text{ takie, że } \ \widetilde{f} = f \ \text{ w } \ \Omega_0.$$

Twierdzenie D.9. *Wszystkie obszary na płaszczyźnie zespolonej są obszarami holomorficzności.*

Definicja D.10. Zbiór $A \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy:

(a) *n–kołowym* lub *zbiorem Reinhardta*, jeśli dla dowolnych $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \partial\Delta(0, 1)$

$$(\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n) \in A;$$

(b) *zbalansowanym*, jeśli dla dowolnych $a \in A$, $\lambda \in \overline{\Delta}(0, 1)$

$$\lambda a \in A.$$

Definicja D.11. Dla zbioru Reinhardta $A \subset \mathbb{C}^n$ jego *obrazem logarytmicznym* nazywamy zbiór

$$\log A := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}) \in A\}.$$

Twierdzenie D.12. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem Reinhardta. Jeżeli $f \in \mathcal{O}(D)$, to istnieją liczby $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ takie, że zachodzi równość*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha, \qquad z \in D.$$

Ponadto, szereg $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |a_\alpha z^\alpha|$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie na D.

Twierdzenie D.13. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem Reinhardta. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *D jest obszarem holomorficzności.*
(ii) *$\log D$ jest wypukły oraz, dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$ i $\lambda \in \overline{\Delta}(0,1)$, jeśli $D \cap V_j \neq \varnothing$ i $(z', z_j, z'') \in D$, to $(z', \lambda z_j, z'') \in D$,*

gdzie $V_j := \{z \in \mathbb{C}^n : z_j = 0\}, j = 1, \ldots, n$.

Funkcje plurisubharmoniczne

Definicja D.14. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $h \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ nazywamy *harmoniczną*, jeśli

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \text{ na } \Omega.$$

Funkcję $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ nazywamy *subharmoniczną* ($u \in \mathrm{SH}(\Omega)$), jeśli spełnione są następujące dwa warunki:

(a) u jest półciągła z góry.
(b) Dla dowolnego obszaru $D \subset\subset \Omega$ i dla dowolnej funkcji h harmonicznej na D i ciągłej na $\overline{D}$ zachodzi

$$\text{jeśli } u \leqslant h \text{ na } \partial D, \text{ to } u \leqslant h \text{ na } D.$$

Twierdzenie D.15. *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli $u \in \mathrm{SH}(\Omega)$, to zachodzi wzór*

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})\, dt, \qquad z \in \Omega, 0 < r < \mathrm{dist}(z, \partial\Omega).$$

Definicja D.16. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ nazywamy *plurisubharmoniczną* ($u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$), jeśli zachodzą dwa warunki

(a) u jest półciągła z góry.
(b) Dla dowolnych $a \in \Omega, X \in \mathbb{C}^n$ funkcja jednej zmiennej

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : a + \zeta X \in \Omega\} \ni \lambda \mapsto u(a + \lambda X)$$

jest subharmoniczna.

Mówimy, że funkcja $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ jest *ściśle plurisubharmoniczna*, jeśli dla dowolnego obszaru $D \subset\subset \Omega$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że funkcja

$$D \ni z \mapsto u(z) - \varepsilon \|z\|^2$$

jest plurisubharmoniczna.

Twierdzenie D.17. *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym.*

(a) *Jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to $\log|f| \in PSH(\Omega)$.*
(b) *Jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega_1, \Omega)$, gdzie Ω_1 jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}^m$, to $u \circ f \in \mathrm{PSH}\,(\Omega_1)$.*
(c) *Jeśli funkcja $u \in \mathrm{PSH}\,(\mathbb{C}^n)$ jest ograniczona od góry, to jest stała.*
(d) *Jeśli $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem i funkcja $u \in \mathrm{PSH}\,(D)$ nie jest stała, to u nie osiąga maksimum globalnego w D.*
(e) *Jeśli $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, to u jest plurisubharmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $z \in \Omega$, $X \in \mathbb{C}^n$*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial u^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) X_j \overline{X}_k \geqslant 0.$$

Definicja D.18. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ nazywamy *wyczerpującą (dla Ω)*, jeśli

$$\{z \in \Omega :\ u(z) \leqslant t\} \subset\subset \Omega, \qquad \text{dla dowolnego } t < \sup_{\Omega} u.$$

Zbiór Ω nazywamy *pseudowypukłym*, jeśli istnieje ciągła, wyczerpująca funkcja plurisubharmoniczna dla Ω.

Zbiór Ω nazywamy *hiperwypukłym*, jeśli istnieje ciągła i ujemna, wyczerpująca funkcja plurisubharmoniczna dla Ω.

Twierdzenie D.19. *Zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest obszarem holomorficzności.*

Teoria potencjału

Definicja D.20. Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ nazywamy polarnym, jeśli istnieje funkcja $u \in \mathrm{SH}\,(\mathbb{C})$, $u \not\equiv -\infty$ taka, że $E \subset u^{-1}(-\infty)$.

Definicja D.21. Niech $\mathcal{P}(K)$ będzie zbiorem wszystkich probabilistycznych miar borelowskich μ, których support zawarty jest w zbiorze zwartym $K \subset \mathbb{C}$.

Zdefiniujmy *potencjał logarytmiczny* p_μ miary $\mu \in \mathcal{P}(K)$ w następujący sposób

$$p_\mu(z) := \int_K \log|z - w|\, d\mu(w), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Miarę $\nu \in \mathcal{P}(K)$ nazywamy *miarą równowagi* zbioru K, jeśli

$$I(\nu) = \sup\{I(\mu) :\ \mu \in \mathcal{P}(K)\},$$

gdzie

$$I(\mu) := \int_K p_\mu(z)\, d\mu(z)$$

jest *energią* miary μ.

Pojemnością logarytmiczną zbioru $E \subset \mathbb{C}$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{cap} E := e^{\sup\{I(\mu):\, \mu \in \mathcal{P}(K),\, K \text{ zwarty podzbiór } E\}}.$$

Twierdzenie D.22.

(a) *Potencjał* p_μ *jest funkcją subharmoniczną na* $\mathbb{C}$ *i harmoniczną w* $\mathbb{C}\setminus K$.

(b) *Jeżeli* K *jest niepolarnym zbiorem zwartym, to istnieje jedyna miara równowagi* μ_K.

(c) *Zbiór borelowski* E *jest polarny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{cap} E = 0$.

Twierdzenie D.23.

(a) *Jeśli* $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{C}$, *to* $\operatorname{cap} E_1 \leqslant \operatorname{cap} E_2$.

(b) *Jeśli* $(B_k)_{k=1}^\infty$ *jest wstępującą rodziną borelowskich podzbiorów* $\mathbb{C}$, *to*

$$\operatorname{cap}\big(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\big) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{cap} B_k.$$

(c) *Jeśli* $(K_k)_{k=1}^\infty$ *jest zstępującą rodziną zwartych podzbiorów* $\mathbb{C}$, *to*

$$\operatorname{cap}\big(\bigcap_{k=1}^\infty K_k\big) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{cap} K_k.$$

(d) *Jeśli* $B = \bigcup_{k=1}^N B_k$, *gdzie* B_k *są borelowskimi podzbiorami* $\mathbb{C}$ *oraz* $\operatorname{diam} B \leqslant d$ $(d > 0, N = 1, 2, \dots, \infty)$, *to*

$$\frac{1}{\log\left(\frac{d}{\operatorname{cap} B}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^N \frac{1}{\log\left(\frac{d}{\operatorname{cap} B_k}\right)}.$$

(e) *Jeśli* $B = \bigcup_{k=1}^N B_k$, *gdzie* B_k *są borelowskimi podzbiorami* $\mathbb{C}$ *oraz takimi, że* $\operatorname{dist}(B_k, B_l) \geqslant d > 0$ $(k, l = 1, \dots, N, k \neq l, N = 1, 2, \dots, \infty)$, *to*

$$\frac{1}{\log^+\left(\frac{d}{\operatorname{cap} B}\right)} \geqslant \sum_{k=1}^N \frac{1}{\log^+\left(\frac{d}{\operatorname{cap} B_k}\right)}.$$

(f) *Dla dowolnego zbioru zwartego* $K \subset \mathbb{C}$, *mamy* $\operatorname{cap} K \leqslant \operatorname{diam} K$ *oraz* $\operatorname{cap} K = \operatorname{cap}(\partial K)$. *Ponadto* $\operatorname{cap}\Delta(z,r) = \operatorname{cap}\partial\Delta(z,r) = r$ *dla* $z \in \mathbb{C}, r > 0$.

Definicja D.24. Niech $D \subsetneq \mathbb{C}$ będzie obszarem. Mówimy, że punkt $z_0 \in \partial D$ jest *punktem regularnym zbioru* D *(ze względu na problem Dirichleta)*, jeśli istnieje otoczenie otwarte U punktu z_0 i ujemna funkcja $u \in \mathrm{SH}(U \cap D)$ taka, że $\lim_{D\ni z\to z_0} u(z) = 0$.

Obszar D nazywamy *regularnym*, jeżeli każdy jego punkt brzegowy jest regularny.

Twierdzenie D.25. *Niech* $D \subsetneq \mathbb{C}$ *będzie obszarem oraz* $z_0 \in \partial D$. *Jeśli składowa spójna brzegu* D *zawierająca punkt* z_0 *jest różna od* $\{z_0\}$, *to* z_0 *jest punktem regularnym zbioru* D.

Twierdzenie D.26 (Kryterium Wienera). *Niech* $D \subsetneq \mathbb{C}$ *będzie obszarem oraz* $z_0 \in \partial D$. *Zdefiniujmy zbiory*

$$F_k := \{z \in \mathbb{C}\setminus D : \rho_{k+1} \leqslant |z - z_0| < \rho_k\}, \qquad k \geqslant 1,$$

gdzie $\rho_k, k \geqslant 1$ *są liczbami dodatnimi takimi, że* $1 < a < \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}} < b$, $k \geqslant 1$, *dla pewnych liczb* $a, b > 1$.

Wtedy punkt z_0 *jest regularny ze względu na problem Dirichleta dla* D *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\log \rho_k}{\log \operatorname{cap} F_k} = +\infty.$$

Twierdzenie D.27 (Twierdzenie Frostmana). *Niech μ będzie miarą równowagi niepolarnego zbioru zwartego K.*

Wtedy $p_\mu \geqslant \log \operatorname{cap} K$ na $\mathbb{C}$ oraz $p_\mu = \log \operatorname{cap} K$ on $K \setminus F$, gdzie $F \subset \partial K$ jest zbiorem polarnym typu F_σ.

Ponadto, jeżeli punkt $z \in \partial K$ jest regularny ze względu na problem Dirichleta dla nieograniczonej składowej spójnej $\mathbb{C} \setminus K$, to $p_\mu(z) = \log \operatorname{cap} K$.

Definicja D.28. Niech $D \subsetneq \mathbb{C}$ będzie obszarem. *(Klasyczną) funkcją Greena obszaru D z biegunem w punkcie $w \in D$* nazywamy funkcję $\mathbf{g}_D(w, \cdot) : D \to [-\infty, +\infty)$, spełniającą następujące warunki:

(a) $\mathbf{g}_D(w, \cdot)$ jest subharmoniczna na D i harmoniczna na $D \setminus \{w\}$;
(b) $\mathbf{g}_D(w, \cdot) - \log|\cdot - w|$ jest ograniczona na D;
(c) $\mathbf{g}_D(w, z) \to 0$, gdy $z \to z_0 \in \partial D \setminus F$, gdzie F jest polarnym podzbiorem ∂D.

Twierdzenie D.29. *Niech $D \subsetneq \mathbb{C}$ będzie obszarem takim, że zbiór $\mathbb{C} \setminus D$ jest niepolarny, oraz niech $w \in \partial D$.*

(a) *Istnieje jedyna funkcja Greena $\mathbf{g}_D(w, \cdot)$ dla D z biegunem w w.*
(b) *$\mathbf{g}_D(w, z) = \mathbf{g}_D(z, w)$ dla $z, w \in D$.*
(c) *$\lim_{z \to z_0} \mathbf{g}_D(w, z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z_0 \in \partial D$ jest punktem regularnym zbioru D.*

Zespolona funkcja Greena

Definicja D.30. Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. *Funkcją Greena obszaru D z biegunem w punkcie $w \in D$* nazywamy

$$g_D(w, z) := \sup\{u(z)\},$$

gdzie supremum bierzemy po wszystkich ujemnych funkcjach $u \in \operatorname{PSH}(D)$ takich, że $u - \log(\cdot - w)$ jest ograniczona od góry.

Twierdzenie D.31. *Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$ oraz niech $w \in D$.*

(a) *Funkcja $g_D(w, \cdot)$ jest plurisubharmoniczna na D.*
(b) *Dla dowolnego obszaru $G \subset\subset D$ i dla dowolnej funkcji $u \in PSH(G)$ zachodzi*

$$\textit{jeśli}\ \ u \leqslant g_D(w, \cdot)\ \ \textit{na}\ \ \partial G, \quad \textit{to}\ \ u \leqslant g_D(w, \cdot)\ \ \textit{na}\ \ G.$$

(c) *Jeżeli D jest ograniczonym obszarem hiperwypukłym, to g_D jest ciągła na $D \times \overline{D}$. W szczególności, $\lim_{z \to \partial D} g_D(w, z) = 0$.*
(d) *Jeżeli D jest obszarem w $\mathbb{C}$, którego dopełnienie nie jest zbiorem polarnym, to $g_D(w, \cdot) = \mathbf{g}_D(w, \cdot)$.*

Inne

TWIERDZENIE D.32 (NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA). *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$) z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi*

$$|\langle x, y\rangle_X|^2 \leqslant |\langle x, x\rangle_X||\langle y, y\rangle_X|.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są liniowo zależne.

TWIERDZENIE D.33 (TWIERDZENIE RIESZA). *Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Jeżeli $f : H \to \mathbb{C}$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym, to istnieje $y \in H$ takie, że*

$$f(x) = \langle x, y\rangle_H, \qquad x \in H.$$

DEFINICJA D.34. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją lipschitzowską*, jeżeli istnieje stała $L > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in \Omega$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\|x - y\|.$$

TWIERDZENIE D.35 (TWIERDZENIE RADEMACHERA). *Jeżeli $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, to f posiada pochodną w prawie wszystkich (względem miary $\mathcal{L}^n$) punktach zbioru Ω.*

TWIERDZENIE D.36 (WZÓR GREENA). *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie ograniczonym obszarem, którego brzeg jest skończoną sumą rozłącznych łuków Jordana, zorientowanych dodatnio. Jeżeli funkcje $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ są lipschitzowskie na pewnym otoczeniu Ω zbioru $\overline{D}$, to zachodzi wzór*

$$\int_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) d\mathcal{L}^2(x,y).$$

LISTA OZNACZEŃ

$\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych: $1, 2, 3, \ldots$;
$\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych;
$\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych;
$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych;
$\mathbb{C}$ — zbiór liczb zespolonych;
$\mathcal{R}e\, z$ — część rzeczywista liczby $z \in \mathbb{C}$;
$\mathcal{I}m\, z$ — część urojona liczby $z \in \mathbb{C}$;
$A_+ := A \cap [0, +\infty)$;
$A_- := A \cap (-\infty, 0]$;
$A_* := A \setminus \{0\}$;
$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$;
$A^n := \underbrace{A \times ... \times A}_{n}$;
$\overline{A}$ — domknięcie zbioru A;
$\Delta(w, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$;
$\mathbb{B}_n$ — kula jednostkowa w $\mathbb{C}^n$;
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — zespolony iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$;
$\| \cdot \|$ — norma euklidesowa w $\mathbb{C}^n$;
$\operatorname{dist}(z, A) := \sup_{a \in A} \|z - a\|$;
$\mathcal{L}^n$ — n–wymiarowa miara Lebesgue'a;
$\mathcal{C}(D, G)$ — zbiór odwzorowań ciągłych $f : D \to G$;
$\mathcal{C}^k(D, G)$ — zbiór odwzorowań klasy $\mathcal{C}^k$ $f : D \to G$;
$\mathcal{O}(D, G)$ — zbiór odwzorowań holomorficznych $f : D \to G$;
$\mathcal{C}(D) := \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$; $\mathcal{O}(D) := \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$;
$\mathrm{SH}\,(D)$ — zbiór funkcji subharmonicznych na D;
$\mathrm{PSH}\,(D)$ — zbiór funkcji plurisubharmonicznych na D;
$L^2_h(D)$ — przestrzeń funkcji holomorficznych na D, całkowalnych z kwadratem;
$\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ — iloczyn skalarny w przestrzeni $L^2_h(D)$;
$\| \cdot \|_D$ — norma w przestrzeni $L^2_h(D)$;
K_D — funkcja jądrowa Bergmana obszaru D;
k_D — jądro Bergmana obszaru D;
β_D — pseudometryka Bergmana obszaru D;
b_D — pseudoodległość Bergmana obszaru D,
$L_{\beta_D}(\alpha)$ — długość krzywej α względem pseudometryki β_D;
c_D — pseudoodległość Carathéodory'ego obszaru D;
g_D — zespolona funkcja Greena obszaru D;
$\mathbf{g}_D$ — klasyczna funkcja Greena obszaru D;

$\operatorname{cap} E$ — pojemność logarytmiczna zbioru E;
μ_K — miara równowagi zbioru K;
p_μ — potencjał logarytmiczny związany z miarą μ;
$\gamma_D(z) := \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^3(-\log \operatorname{cap}(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D))}$;
$\widehat{\gamma}_D(z) := \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{\delta^2\sqrt{-\log \operatorname{cap}(\overline{\Delta}(z,\delta)\setminus D)}}$;
$A_k(z) := \{w \in \mathbb{C} : \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant |w-z| \leqslant \frac{1}{2^k}\}$;
$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, dla $\alpha \in \mathbb{Z}^n$;
$\Phi_A(z) := (z^{A^1}, \dots, z^{A^n})$, dla $A = [A_k^j]_{j,k=1,\dots,n} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$;
$V_j := \{z \in \mathbb{C}^n : z_j = 0\}$;
$\mathcal{E} = \mathcal{E}(D) := \{z^\alpha \in L_h^2(D) : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$;
$\operatorname{Span} \mathcal{E}(D)$ — najmniejsza liniowa podprzestrzeń $L_h^2(D)$, zawierająca zbiór $\mathcal{E}(D)$;
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(D) := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : z^\alpha \in L_h^2(D)\}$;
$J(D) := \{j \in \{1, \dots, n\} : V_j \cap D \neq \varnothing\}$;
$\log D$ — obraz logarytmiczny zbioru Reinhardta D;
$\mathfrak{C}(D)$ — maksymalny stożek zawarty w $\log D$, dla zbioru Reinhardta D;
$\widetilde{\mathfrak{C}}(D) := \{v \in \mathbb{R}^n : \text{ istnieje } \lim_{t\to+\infty} \exp(a+tv) \in D\}$;
$\mathfrak{C}'(D) := \mathfrak{C}(D) \setminus \widetilde{\mathfrak{C}}(D)$.

LITERATURA CYTOWANA

[Ber 1950] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, Math. Surveys V, Amer. Math. Soc., 1950.

[Bre 1955] J. Bremermann, *Holomorphic continuation of the kernel and the Bergman metric*, in „Lectures on functions of a complex variable”, Univ. of Mich. Press (1955), 349–383.

[Bło–Pfl 1998] Z. Błocki, P. Pflug, *Hyperconvexity and Bergman completeness*, Nagoya Math. J. **151** (1998), 221–225.

[Bło 2004] Z. Błocki, *The Bergman metric and the pluricomplex Green function*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[Car–Ceg–Wik 1999] M. Carlehed, U. Cegrell, F. Wikström, *Jensen measures, hyperconvexity and boundary behavior of the pluricomplex Green function*, Ann. Polon. Math. **71** (1999), no. 1, 87–103.

[Chen 1999] B.–Y. Chen, *Completeness of the Bergman metric on non–smooth pseudoconvex domains*, Ann. Polon. Math. **71(3)** (1999), 242–251.

[Chen 2000] B.–Y. Chen, *A remark on the Bergman completeness*, Complex Variables, Theory Appl. **42** (2000), no. 1, 11–15.

[Chen 2001] B.–Y. Chen, *A note on Bergman completeness*, Int. J. Math. **12** (2001), no. 4, 383–392.

[Chen–Zhang 2000] B.–Y. Chen, J.–H. Zhang, *On Bergman completeness and Bergman stability*, Math. Ann. **318** (2000), 517–526.

[Chen–Zhang 2002] B.–Y. Chen, J.–H. Zhang, *The Bergman metric on a Stein manifold with a bounded plurisubharmonic function*, Trans. Amer. Math. Soc. **354(8)** (2002), 2997–3009.

[Chen–Kam–Ohs 2004] B.–Y. Chen, J. Kamimoto, T. Ohsawa, *Behavior of the Bergman kernel at infinity*, Math. Z., published online (5 May 2004).

[Die–For–Her 1984] K. Diederich, J. E. Fornaess, G. Herbort, *Boundary behaviour of the Bergman metric*, Proc. Symp. in Pure Math. **41** (1984), 59–67.

[Fed 1969] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer Verlag, 1969.

[Hed 1972] L. I. Hedberg, *Bounded point evaluations and capacity*, J. Funct. Anal. **10** (1972), 269–280.

[Her 1999] G. Herbort, *The Bergman metric on hyperconvex domains*, Math. Z. **232(1)** (1999), 183–196.

[Jak–Jar 1998] P. Jakóbczak, M. Jarnicki, *Wstęp do teorii funkcji holomorficznych wielu zmiennych zespolonych*, Wydawnictwo UJ, 2002.

[Jar–Pfl 1985] M. Jarnicki, P. Pflug, *Non–extendable holomorphic functions in Reinhardt domains*, Ann. Polon. Math. **46** (1985), 129–140.

[Jar–Pfl 1989] M. Jarnicki, P. Pflug, *Bergman completeness of complete circular domains*, Ann. Polon. Math. **50** (1989), 219–222.

[Jar–Pfl 1993] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[Jar–Pfl 2004] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis — revisited* (to appear).

[Jar–Pfl–Zwo 2000] M. Jarnicki, P. Pflug, W. Zwonek, *On Bergman completeness of non–hyperconvex domains*, Univ. Iag. Acta Math. **38** (2000), 169–184.

[Juc 2004] P. Jucha, *Bergman completeness of Zalcman type domains*, Studia Math. **163** (2004), 71–83.

[Kli 1991] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Oxford University Press, 1991.

[Kob 1959] S. Kobayashi, *Geometry of bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 267–290.

[Kob 1962] S. Kobayashi, *On complete Bergman metric*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 511–513.

[Lan 1972] N. S. Landkof, *Foundations of Modern Potential Theory*, Springer Verlag, 1972.

[Nik 2003] N. Nikolov, *The completeness of the Bergman distance of planar domains has a local character*, Complex Variables, Theory Apl. **48** (2003), no. 8, 705–709.

[Ohs 1981] T. Ohsawa, *A remark on the completeness of the Bergman metric*, Proc. Japan Acad. **57** (1981), 238–240.

[Ohs 1984] T. Ohsawa, *Boundary behavior of the Bergman kernel function on pseudoconvex domains*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **20** (1984), 897–902.

[Ohs 1993] T. Ohsawa, *On the Bergman kernel of hyperconvex domains*, Nagoya Math. J. **129** (1993), 43–52.

[Pfl 1975] P. Pflug, *Quadratintegrable holomorphe Funktionen und die Serre Vermutung*, Math. Ann. **216** (1975), 285–288.

[Pfl 1982] P. Pflug, *Various applications of the existence of well growing holomorphic functions*, Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory, J. A. Barossa (ed.), Math. Studies **71** (1982), North–Holland.

[Pfl 2000] P. Pflug, *Invariant metrics and completeness*, J. Korean Math. Soc. **37** (2000), no. 2, 269–284.

[Pfl–Zwo 2002] P. Pflug, W. Zwonek, L_h^2*–domains of holomorphy and the Bergman kernel*, Studia Math. **151** (2002), no. 2, 99–108.

[Pfl–Zwo 2003] P. Pflug, W. Zwonek, *Logarithmic capacity and Bergman functions*, Archiv der Math. **80** (2003), 536–552.

[Ran 1995] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, 1995.

[Vla 1966] V. Vladimirov, *Methods of the Theory of Several Complex Variables*, Cambridge, MA, 1966.

[Zal 1969] L. Zalcman, *Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 241–269.

[Zwo 1999a] W. Zwonek, *On Bergman completeness of pseudoconvex Reinhardt domains*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. **8** (1999), 537–552 (no. 3).

[Zwo 1999b] W. Zwonek, *On hyperbolicity of pseudoconvex Reinhardt domains*, Arch. Math. **72** (1999), 304–314.

[Zwo 2000a] W. Zwonek, *Completeness, Reinhardt domains and the method of complex geodesics in the theory of invariant functions*, Diss. Math. **388** (2000).

[Zwo 2000b] W. Zwonek, *On Carathéodory completeness of pseudoconvex Reinhardt domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 3, 857–864.

[Zwo 2001] W. Zwonek, *An example concerning Bergman completeness*, Nagoya Math. J. **164** (2001), 89–102.

[Zwo 2002] W. Zwonek, *Wiener's type criterion for Bergman exhaustiveness*, Bull. Pol. Acad. Math. **50(3)** (2002), 297–311.